

Ueber symbolisches Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften.

Von

TH. REYE in Strassburg i./E.

In der synthetischen und der analytischen Geometrie werden zahlreiche Transformationen und geometrische Verwandtschaften aufgestellt, und benutzt, um aus gegebenen räumlichen Gebilden andere abzuleiten und ihre Eigenschaften zu ermitteln. Dahin gehören die linearen und sonstigen Substitutionen, das Projiciren und Schneiden, die projective Verwandtschaft oder Homographie eindimensionaler Gebilde, die Affinität mit Einschluss der Aehnlichkeit und der Congruenz, die Collineation, insbesondere die perspective, die geschaarte und die planare Collineation, die reciproke Verwandtschaft oder Correlation, die geometrischen Verwandtschaften zweiten und höheren Grades, die Cremona'schen Transformationen, überhaupt alle eindeutigen Abbildungen. Diese geometrischen Verwandtschaften enthalten die involutorischen als wichtige Specialfälle, und zwar u. a. die Involution oder involutorische Homographie, die involutorischen Collineationen und unter ihnen die Spiegelungen an Ebenen, Geraden oder Punkten, die polare und die Null-Correlation, durch welche jeder Punkt in seine Polarebene bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung bzw. in eine durch ihn gehende Ebene transformirt wird, endlich die Inversion bezüglich einer Kugel oder eines Kreises.

Werden derartige Verwandtschaften oder Transformationen nach einander angewandt, so resultiren aus ihnen wiederum Verwandtschaften. Man kann nun mit geometrischen Verwandtschaften und ihren Resultirenden oder Producten geradezu rechnen, indem man sie symbolisch mit Buchstaben bezeichnet. Diese symbolische Rechnung eröffnet der reinen Geometrie ein neues Forschungsgebiet und stellt ihr alsbald interessante Aufgaben, indem sie ihr zugleich wirksame analytische Hilfsmittel zu deren Lösung darbietet. Sie macht u. a.

die Gruppentheorie*) ohne Weiteres anwendbar auf die geometrischen Verwandtschaften.

In der kürzlich erschienenen dritten Auflage meiner „Geometrie der Lage“ II und III sind mehrere Abschnitte**) dem symbolischen Rechnen mit geometrischen Verwandtschaften gewidmet. Für gewisse Hauptfälle der Homographie, Collineation oder Correlation werden daselbst die Fragen nach den Homographien, Collineationen und Correlationen, welche mit einer gegebenen vertauschbar sind, welche sie umkehren oder von ihr umgekehrt werden, vollständig erledigt. In anderen wichtigen Fällen aber werden diese nächstliegenden Fragen nur theilweise beantwortet; überhaupt bleibt auf diesem Gebiete noch sehr viel zu thun übrig. Ich komme deshalb nochmals darauf zurück, beschränke mich aber ausdrücklich auf eindeutige, umkehrbare, nicht ausgeartete Verwandtschaften. Ausgeschlossen sind damit u. A. die linearen Substitutionen mit verschwindender Determinante, weil sie ausgeartete Homographien, Collineationen oder Correlationen darstellen.

Um das Verständniss zu erleichtern, wiederhole ich zunächst von meinen früheren Untersuchungen die einleitenden Bemerkungen und die wichtigeren Rechnungen mit einigen Auslassungen und Zusätzen.

§ 1.

Rechnungsregeln.

1. Zwei räumliche Gebilde Σ, Σ_1 von gleicher Stufe, z. B. zwei Räume, Flächen oder Linien, heissen geometrisch verwandt, wenn jedem Elemente (d. h. jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene) $A, B, C, g, h, \varepsilon, \dots$ von Σ ein Element $A_1, B_1, C_1, g_1, h_1, \varepsilon_1, \dots$ von Σ_1 als entsprechendes zugewiesen ist, Wir stellen diese geometrische Verwandtschaft dar durch $\Sigma \overline{\wedge} \Sigma_1$ ***) oder ausführlicher durch:

$$ABCgh\varepsilon \dots \overline{\wedge} A_1B_1C_1g_1h_1\varepsilon_1 \dots,$$

bezeichnen sie mit φ_1 und sagen:

„Das räumliche Gebilde Σ wird durch die geometrische Verwandtschaft (die Substitution, Collineation, Correlation, quadratische Verwandtschaft etc.) φ_1 in das Gebilde Σ_1 transformirt oder verwandelt,

*) Vorzugsweise kommen hier die continuirlichen Gruppen in Betracht, deren Theorie Herr Sophus Lie bekanntlich seit 1873 ausgebildet hat. Vgl. darüber Lie's Theorie der Substitutionsgruppen, Leipzig 1888/90. Continuirliche Gruppen von Bewegungen untersuchte Herr C. Jordan schon 1868 in den *Annali di Matematica* Serie II^a, t. II.

**) Theil II S. 80—117, Theil III S. 219—224.

***) Bekanntlich hat von Staudt dieses Zeichen $\overline{\wedge}$ für „projectiv“ eingeführt.

oder Σ geht durch sie über in Σ_1 . Durch die umgekehrte oder inverse Verwandtschaft:

$$A_1 B_1 C_1 g_1 h_1 \varepsilon_1 \cdots \wedge A B C g h \varepsilon \cdots \text{ oder } \varphi_1^{-1}$$

geht ebenso Σ_1 über in Σ .

2. Aus φ_1 und der geometrischen Verwandtschaft $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$ oder:

$$A_1 B_1 C_1 g_1 h_1 \varepsilon_1 \cdots \wedge A_2 B_2 C_2 g_2 h_2 \varepsilon_2 \cdots \text{ oder } \varphi_2,$$

welche das Gebilde Σ_1 in Σ_2 transformirt, „resultirt“ eine dritte Verwandtschaft φ , nämlich $\Sigma \wedge \Sigma_2$ oder:

$$A B C g h \varepsilon \cdots \wedge A_2 B_2 C_2 g_2 h_2 \varepsilon_2 \cdots \text{ oder } \varphi_1 \varphi_2 = \varphi,$$

von welcher φ_1 und φ_2 die „Componenten“ oder „Factoren“ sind. Aus den zu φ_2 und φ_1 inversen Verwandtschaften φ_2^{-1} und φ_1^{-1} resultirt ebenso die zu φ inverse Verwandtschaft $\varphi_2^{-1} \varphi_1^{-1} = \varphi^{-1}$. In der anderen Reihenfolge φ_2, φ_1 haben die beiden Verwandtschaften nur dann eine Resultirende $\varphi_2 \varphi_1 = \sigma$, wenn das Gebilde Σ_2 mit Σ zusammenfällt. Durch $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi$ wird in diesem Falle das Gebilde Σ in sich selbst transformirt, dagegen geht durch $\varphi_2 \varphi_1 = \sigma$ das Gebilde Σ_1 in sich selbst über.

Sind die Componenten φ_1, φ_2 entweder beide Collineationen oder beide Correlationen, so ist ihre Resultirende φ eine Collineation. Demnach bilden in der Ebene oder im Raume die Collineationen eine Gruppe; mit ihnen zusammen aber bilden die Correlationen eine umfassendere Gruppe.

3. Für die Resultirende von drei oder mehr Verwandtschaften gilt das associative Gesetz, nämlich die Gleichung:

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \cdots = (\varphi_1 \varphi_2) \varphi_3 \varphi_4 \cdots = \varphi_1 (\varphi_2 \varphi_3) \varphi_4 \cdots = (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3) \varphi_4 \cdots;$$

d. h. sie bleibt ungeändert, wenn zwei oder mehrere aufeinander folgende Componenten durch ihre Resultirende ersetzt werden. Denn die Verwandtschaft $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ oder $\Sigma \wedge \Sigma_3$ resultirt nicht nur aus den Verwandtschaften φ_1, φ_2 und φ_3 oder:

$$\Sigma \wedge \Sigma_1, \Sigma_1 \wedge \Sigma_2 \text{ und } \Sigma_2 \wedge \Sigma_3,$$

sondern auch aus $(\varphi_1 \varphi_2)$ und φ_3 oder $\Sigma \wedge \Sigma_2$ und $\Sigma_2 \wedge \Sigma_3$, ebenso aber aus φ_1 und $(\varphi_2 \varphi_3)$. In einem symbolischen Producte von Verwandtschaften können und dürfen die Factoren i. A. nicht vertauscht werden (2).

4. Aus einer beliebigen Verwandtschaft φ und ihrer Umkehrung φ^{-1} resultirt die „Identität“, d. h. die Verwandtschaft, durch welche jedes Element des zu transformirenden Gebildes in sich selbst übergeht. In dem symbolischen Producte successiver Verwandtschaften kann die Identität beliebig eingeschaltet oder fortgelassen werden, weil sie auf die resultirende Verwandtschaft ohne Einfluss ist. Wir be-

zeichnen deshalb die Identität symbolisch durch Eins und setzen $\varphi\varphi^{-1} = 1$ und $\varphi^{-1}\varphi = 1$. Wenn aus zwei Verwandtschaften die Identität resultirt, so ist jede von ihnen die Umkehrung der anderen; denn aus $\varphi\chi = 1$ folgt $\varphi\chi\chi^{-1} = \chi^{-1}$ oder $\varphi = \chi^{-1}$.

5. Die einfachen Regeln für das Rechnen mit Verwandtschaften ergeben sich hiernach leicht, sind übrigens aus der Substitutionentheorie längst bekannt*). Eine Gleichung zwischen geometrischen Verwandtschaften:

$$\chi_1\chi_2 \dots \chi_k = \psi_1\psi_2 \dots \psi_m$$

bedeutet, dass die aufeinander folgenden Verwandtschaften ihrer einen Seite dieselbe Resultirende φ haben, wie die der anderen Seite. Mit ihr zugleich gilt die Gleichung:

$$\chi_k^{-1} \dots \chi_2^{-1}\chi_1^{-1} = \psi_m^{-1} \dots \psi_2^{-1}\psi_1^{-1},$$

deren beide Seiten die zu φ inverse Verwandtschaft φ^{-1} darstellen. Man leitet aus einer Gleichung andere ab, indem man den Verwandtschaften ihrer beiden Seiten geeignete Verwandtschaften vorangehen oder nachfolgen lässt, sie also vorne oder hinten mit passenden Verwandtschaften multiplicirt. Wird die obige Gleichung vorne mit χ_1^{-1} oder hinten mit ψ_m^{-1} multiplicirt, so ergeben sich wegen

$$\chi_1^{-1}\chi_1 = 1 = \psi_m\psi_m^{-1}$$

die Gleichungen:

$$\chi_2\chi_3 \dots \chi_k = \chi_1^{-1}\psi_1\psi_2 \dots \psi_m \quad \text{und} \quad \chi_1\chi_2 \dots \chi_k\psi_m^{-1} = \psi_1\psi_2 \dots \psi_{m-1},$$

welche lehren, wie Verwandtschaften von einer Seite der Gleichung auf die andere gebracht werden. Jede Gleichung zwischen Verwandtschaften lässt sich hiernach leicht umformen in Gleichungen:

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \dots \varphi_n = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_n^{-1}\varphi_{n-1}^{-1} \dots \varphi_1^{-1} = 1,$$

deren eine Seite die Identität ist. Die Verwandtschaften auf der anderen Seite einer solchen Gleichung dürfen cyklisch permutirt werden (H. Wiener); multiplicirt man nämlich die erstere Gleichung vorne mit φ_1^{-1} und hinten mit φ_1 , so ergibt sich:

$$\varphi_2\varphi_3 \dots \varphi_n\varphi_1 = \varphi_1^{-1}\varphi_1 = 1.$$

§ 2.

Ueberführung und Vertauschbarkeit geometrischer Verwandtschaften.

6. Wir beschränken uns nunmehr auf Verwandtschaften, die ein beliebiges Gebilde Σ , z. B. den Raum, ein ebenes Feld oder eine Curve, in sich selbst transformiren. Durch eine solche Verwandtschaft φ

*) Vgl. Camille Jordan, *Théorie des substitutions*, Paris 1870; Netto, *Substitutionentheorie*, Leipzig 1882.

werden die Elemente des Gebildes Σ paarweise einander zugewiesen; und zwar wird das „erste“ Element jedes Paares durch φ in das homologe „zweite“ Element transformirt, durch die umgekehrte Verwandtschaft φ^{-1} aber geht das zweite Element jedes Paares in das erste über. Werden durch φ die Elemente eines jeden Paares mit einander vertauscht, so ist $\varphi^{-1} = \varphi$; die Verwandtschaft ist in diesem Falle von ihrer Umkehrung nicht verschieden und heisst „involutorisch.“

Die Elemente gewisser Paare können, wenn sie gleichartig sind, in je einem „Doppelemente“ der Verwandtschaft zusammenfallen; sie können, wenn ungleichartig, incident sein. So hat eine räumliche Collineation bekanntlich i. A. vier Doppelpunkte, sechs Doppelgerade und vier Doppelebenen, welche die Eckpunkte, Kanten und Flächen des reellen oder imaginären „Haupttetraeders“ der Collineation bilden. In einer räumlichen Correlation aber umhüllen die Ebenen, welche durch ihre homologen Punkte gehen, i. A. eine Fläche Φ^2 zweiter Classe, und diese Punkte liegen i. A. auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung; die beiden „Kernflächen“ F^2 und Φ^2 gehen sowohl durch die Correlation als auch durch ihre Umkehrung in einander über und haben vier reelle oder imaginäre Doppelgerade der Correlation, die vier Kanten des windschiefen „Hauptvierseits“ gemein.*) Die beiden Diagonalen des Hauptvierseits werden durch die Correlation mit einander vertauscht. — Eine Verwandtschaft φ hat dieselben Doppelemente wie ihre Umkehrung φ^{-1} .

7. Sei $\Sigma \frown \Sigma_1$ eine beliebige Verwandtschaft φ zwischen zwei zusammenfallenden Gebilden. Durch eine andere Verwandtschaft ψ werde das Gebilde Σ in Σ' und zugleich Σ_1 in Σ'_1 transformirt. Dann resultirt aus den drei Verwandtschaften:

$\Sigma' \frown \Sigma$, $\Sigma \frown \Sigma_1$ und $\Sigma_1 \frown \Sigma'_1$ oder ψ^{-1} , φ und ψ die Verwandtschaft $\Sigma' \frown \Sigma'_1$ oder $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$. Wir sagen in diesem Falle mit C. Jordan und Stephanos**): Die Verwandtschaft φ wird durch die andere ψ „übergeführt“ in die Verwandtschaft $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$. Jedes Elementepaar und jedes Doppelement von φ wird durch die Verwandtschaft ψ in ein Elementepaar resp. in ein Doppelement von φ' verwandelt.

Die Gleichung $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'$ lässt sich umformen in jede der folgenden Gleichungen:

$$\psi^{-1}\varphi^{-1}\psi = \varphi'^{-1}, \quad \varphi\psi = \psi\varphi', \quad \varphi = \psi\varphi'\psi^{-1},$$

auch folgt aus ihr $\psi^{-1}\varphi\psi\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi'\varphi'$ oder $\psi^{-1}\varphi^2\psi = \varphi'^2$, und ebenso $\psi^{-1}\varphi^n\psi = \varphi'^n$. Wenn also φ durch ψ in φ' übergeführt

*) Schröter, Journal für d. r. u. a. Math. 77, S. 140; vgl. Reye, Geom. d. Lage, 3. Aufl. III, S. 222.

**) C. Jordan a. a. O.; Stephanos in den Math. Annalen 22, S. 310 u. flgde.

wird, so werden φ^{-1} und $\varphi^{\pm n}$ durch ψ in φ'^{-1} und $\varphi'^{\pm n}$ übergeführt; zugleich werden φ' und $\varphi'^{\pm n}$ durch ψ^{-1} in resp. φ und $\varphi^{\pm n}$ übergeführt.

8. Eine Gleichung zwischen Verwandtschaften:

$$\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_k$$

bleibt gültig, wenn alle darin vorkommenden Verwandtschaften φ, χ ersetzt werden durch diejenigen φ', χ' , in welche sie durch irgend eine Verwandtschaft ψ übergeführt werden. Denn zunächst gilt auch die Gleichung:

$$\psi^{-1} \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k \psi = \psi^{-1} \chi_1 \chi_2 \dots \chi_k \psi;$$

wird aber hierin zwischen je zwei successiven Verwandtschaften φ oder χ die Identität $\psi \psi^{-1}$ eingeschaltet (4), so ergibt sich sofort:

$$\varphi_1' \varphi_2' \dots \varphi_k' = \chi_1' \chi_2' \dots \chi_k',$$

weil

$$\psi^{-1} \varphi_i \psi = \varphi_i' \quad \text{und} \quad \psi^{-1} \chi_i \psi = \chi_i'.$$

Jede Gleichung zwischen geometrischen Verwandtschaften oder Transformationen stellt demnach eine invariante Eigenschaft derselben dar. Eine involutorische Verwandtschaft $\varphi = \varphi^{-1}$ insbesondere kann nur in involutorische Verwandtschaften übergeführt werden.

9. Zwei Verwandtschaften φ, ψ heißen „vertauschbar“, wenn $\varphi \psi = \psi \varphi$ ist, wenn also ihre Resultirende nicht abhängt von ihrer Reihenfolge. Von zwei vertauschbaren Verwandtschaften wird jede durch die andere in sich selbst übergeführt; und wenn eine Verwandtschaft φ durch eine andere ψ in sich selbst übergeführt wird, so sind φ und ψ vertauschbar. Denn jede der beiden Gleichungen:

$$\varphi \psi = \psi \varphi \quad \text{und} \quad \psi^{-1} \varphi \psi = \varphi$$

folgt aus der anderen.

Die mit einer Verwandtschaft φ vertauschbaren Verwandtschaften ψ, ψ_1, \dots bilden eine Gruppe, d. h. ihre Resultirenden sind ebenfalls mit φ vertauschbar; aus $\varphi \psi = \psi \varphi$ und $\varphi \psi_1 = \psi_1 \varphi$ folgt nämlich:

$$\varphi \psi \psi_1 = \psi \varphi \psi_1 = \psi \psi_1 \varphi.$$

Die Gruppe enthält auch die Umkehrungen und die Potenzen ihrer Verwandtschaften (7). Sie wird durch jede ihrer Verwandtschaften ψ in sich selbst übergeführt; denn die Verwandtschaft $\psi^{-1} \psi_1 \psi = \psi_1'$ ist zugleich mit ihren drei Componenten in der Gruppe enthalten.

Spiegelungen an normalen Ebenen sind vertauschbar; eine Schiebung oder Translation und eine Spiegelung sind nur dann vertauschbar, wenn die Schiebungsrichtung zu der spiegelnden Ebene oder Geraden parallel ist; zwei Schiebungen sind allemal vertauschbar. Die ganzen Potenzen einer Verwandtschaft φ und ihrer Umkehrung φ^{-1} stellen vertauschbare

Verwandtschaften dar; wegen $\varphi\varphi^{-1} = 1$ gelten für sie die algebraischen Rechnungsregeln:

$$\varphi^m \varphi^{\pm n} = \varphi^{m \pm n} = \varphi^{\pm n} \varphi^m.$$

Die Verwandtschaften $1, \varphi^{\pm 1}, \varphi^{\pm 2}, \varphi^{\pm 3}, \dots$ bilden eine endliche oder unendliche Gruppe, jenachdem φ eine „cyklische“ Verwandtschaft ist oder nicht. Im ersteren Falle enthält die Gruppe nur eine endliche Anzahl n verschiedener Verwandtschaften, und zwar ist φ^n die Identität, also $\varphi^n = 1, \varphi^{n+1} = \varphi, \varphi^{k \pm 1} = \varphi^{\pm 1}$. Eine involutorische Verwandtschaft ω ist binär cyklisch, und jede binär cyklische Verwandtschaft ist involutorisch; denn aus $\omega = \omega^{-1}$ folgt $\omega^2 = 1$, und umgekehrt.

10. Ueber vertauschbare Homographien, Collineationen und Correlationen wird in meiner „Geometrie der Lage“ a. a. O. Folgendes bewiesen. Zwei Homographien in einer Punktreihe sind vertauschbar, wenn sie dieselben zwei reellen Doppelpunkte haben. Zwei ebene oder räumliche Collineationen φ, ψ sind vertauschbar, wenn sie die Eckpunkte eines Dreiecks ABC resp. eines Tetraeders $ABCD$ zu gemeinsamen Doppelpunkten haben. Die beiden Punktgruppen $PP_1P_2\dots$ und $QQ_1Q_2\dots$, in welche zwei beliebige Punkte P und Q durch die Collineationen $1, \varphi, \varphi^2, \dots$ übergehen, sind collinear, und eine der mit φ vertauschbaren Collineationen ψ wird dargestellt durch:

$$ABCP P_1 P_2 \dots \nearrow ABCQ Q_1 Q_2 \dots$$

resp.

$$ABCDPP_1P_2\dots \nearrow ABCDQQ_1Q_2\dots$$

Mit Correlationen ist eine Collineation i. A. nicht vertauschbar. — Wenn eine räumliche Correlation χ die vier Kanten eines reellen windschiefen Vierseits zu Doppelgeraden hat, so ist sie vertauschbar mit den ∞^2 Collineationen und Correlationen, welche dieselben vier Doppelgeraden haben und die Orte F^2 und Φ^2 incidenter homologer Punkte und Ebenen von χ in sich selbst resp. in einander transformieren (vgl. 6); insbesondere ist sie mit zwei Nullcorrelationen vertauschbar.

Nun können aber die vier Doppelgeraden einer räumlichen Correlation und die Doppelpunkte einer Collineation oder Homographie paarweise imaginär sein, auch können sie alle oder theilweise zusammenfallen. Die Fragen, mit welchen Correlationen, Collineationen und Homographien in diesen Fällen eine gegebene Correlation, Collineation oder Homographie vertauschbar ist, bleiben a. a. O. unerledigt.

§ 3.

Umkehrung geometrischer Verwandtschaften.

11. Als zwei der wichtigsten Aufgaben über geometrische Verwandtschaften habe ich a. a. O. die folgenden bezeichnet: Die Ver-

wandtschaften χ zu bestimmen, welche eine gegebene Verwandtschaft φ umkehren, d. h. in ihre Umkehrung φ^{-1} überführen; und die Verwandtschaften φ zu bestimmen, welche durch eine gegebene Verwandtschaft χ umgekehrt werden. Die zu bestimmenden Verwandtschaften genügen der Gleichung $\chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}$ und deren Umformungen:

$\chi^{-1}\varphi^{-1}\chi = \varphi$, $\chi^{-1}\varphi\chi\varphi = 1$, $(\chi\varphi)^2 = \chi^2$, $(\varphi\chi)^2 = \chi^2$, $\chi\varphi\chi^{-1} = \varphi^{-1}$; auch folgt aus jener Gleichung:

$$\chi^{-1}\varphi^n\chi = \varphi^{-n} \quad (\text{vgl. 7}).$$

Wenn also eine Verwandtschaft φ durch eine andere χ umgekehrt wird, so wird sie auch durch χ^{-1} umgekehrt; und mit ihr werden ihre Potenzen φ^n , die zu ihr inverse Verwandtschaft φ^{-1} und deren Potenzen durch χ und χ^{-1} umgekehrt. Aus je zwei der Verwandtschaften χ , χ_1 , χ_2 , ..., welche φ umkehren, resultirt folglich eine mit φ vertauschbare Verwandtschaft $\chi\chi_1 = \psi$.

12. Ueberhaupt bilden die mit φ vertauschbaren Verwandtschaften ψ und die Verwandtschaften χ , welche φ umkehren, zusammen eine Gruppe. Aus $\psi\varphi = \varphi\psi$ und $\chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}$ folgt nämlich, wenn $\psi = \chi\chi_1$ gesetzt wird:

$$\varphi = \psi^{-1}\varphi\psi = \chi_1^{-1}\chi^{-1}\varphi\chi\chi_1 = \chi_1^{-1}\varphi^{-1}\chi_1 \quad \text{oder} \quad \chi_1^{-1}\varphi^{-1}\chi_1 = \varphi.$$

Jede mit φ vertauschbare Verwandtschaft ψ ist sonach darstellbar als Resultirende von zwei der Verwandtschaften χ , χ_1 , ..., welche φ und φ^{-1} umkehren, wenn solche existiren. Die eine χ dieser beiden Componenten kann unter jenen Verwandtschaften sogar beliebig angenommen werden; aus ihr und den übrigen Verwandtschaften, welche φ umkehren, resultiren alle mit φ vertauschbaren Verwandtschaften ψ , ψ_1 , ...

Keht eine Verwandtschaft χ zwei vertauschbare Verwandtschaften φ , ψ um, so kehrt sie auch deren Resultirende um. Denn aus:

$$\varphi\psi = \psi\varphi = \varrho, \quad \chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1} \quad \text{und} \quad \chi^{-1}\psi\chi = \psi^{-1}$$

folgt:

$$\chi^{-1}\varphi\psi\chi = \varphi^{-1}\psi^{-1} \quad \text{oder} \quad \chi^{-1}\varrho\chi = \varrho^{-1}.$$

13. Wenn die Verwandtschaft χ eine andere φ umkehrt, so transformirt sie jedes Elementepaar PP_1 von φ in ein Elementepaar $P'P'_1$ von φ^{-1} und folglich jedes Doppelement von φ und φ^{-1} in ein anderes oder unter Umständen in sich selbst; aus dem Elementepaar PP' von χ aber ergiebt sich mittelst der Verwandtschaft φ ein anderes Elementepaar $P_1P'_1$ von χ , indem P durch φ in P_1 , und P' durch φ^{-1} in P'_1 übergeht.

Ist χ nebst einem Elementepaare PP_1 von φ gegeben, und verwandelt sich dieses Paar durch die Verwandtschaften χ , χ^2 , χ^3 , ... in die resp. Elementepaare:

$$P'P'_1, P''P''_1, P'''P'''_1, \dots,$$

so gehen die Elemente $PP_1'P''P_1''' \dots$ durch φ in resp. $P_1P'P_1''P''' \dots$ über. Die Verwandtschaft φ wird also dargestellt durch:

$$PP_1'P''P_1''' \dots \wedge P_1P'P_1''P''' \dots,$$

wenn diese Elemente zu ihrer Bestimmung ausreichen; sie ist in diesem Falle durch ihr Elementepaar PP_1 und die sie umkehrende Verwandtschaft χ bestimmt.

Ist φ nebst einem Elementepaare PP' von χ gegeben, und wird das erste Element P dieses Paares durch die Verwandtschaften $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ in P_1, P_2, P_3, \dots transformirt, das zweite Element P' aber durch $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \dots$ in resp. $P'_{-1}, P'_{-2}, P'_{-3}, \dots$, so gehen die Elemente $PP_1P_2P_3 \dots$ durch χ in resp. $P'P'_{-1}P'_{-2}P'_{-3} \dots$ über. Falls diese Elemente zu der Bestimmung von χ ausreichen, so wird die Verwandtschaft χ dargestellt durch:

$$PP_1P_2P_3 \dots \wedge P'P'_{-1}P'_{-2}P'_{-3} \dots;$$

sie kehrt die Verwandtschaft φ um und ist durch φ und das Elementepaar PP' bestimmt.

14. Eine nicht specielle räumliche oder ebene Collineation (Correlation) φ ist hiernach durch höchstens ∞^3 resp. ∞^2 Collineationen und Correlationen χ umkehrbar, eine nicht involutorische Homographie aber durch höchstens ∞^1 Homographien. Denn der Raum resp. die Ebene enthält nur ∞^3 resp. ∞^2 Elemente P' , in welche ein gegebener Punkt P durch eine Collineation oder Correlation χ transformirt werden kann; aus einem Elementepaare PP' von χ aber ergeben sich (13) mit Hülfe der Verwandtschaft φ unendlich viele andere Elementepaare von χ , von denen aber bekanntlich eine kleine Anzahl zur Bestimmung von χ ausreicht. — Ebenso wird bewiesen, dass eine nicht specielle räumliche oder ebene Collineation (Correlation) mit höchstens ∞^3 resp. ∞^2 Collineationen und Correlationen vertauschbar ist, und eine nicht involutorische Homographie mit höchstens ∞^1 Homographien.

15. Ueber die Collineationen und Correlationen, welche eine gegebene Collineation oder Correlation umkehren, habe ich a. a. O. Folgendes bewiesen. Eine räumliche Collineation φ mit reellem Haupttetraeder (6) wird umgekehrt durch die ∞^3 polaren Correlationen, welche das Tetraeder zum Poltetraeder haben. Die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen (10) bilden mit diesen polaren Correlationen zusammen eine Gruppe. Analoges gilt von einer ebenen Collineation mit drei reellen Doppelpunkten. Durch Collineationen kann eine Collineation i. A. nicht umgekehrt werden. — Eine räumliche Correlation χ mit reellem Hauptvierseit (vgl. 6) wird umgekehrt durch ∞^2 polare Correlationen χ_1 und durch ∞^2 geschaart involutorische Collineationen φ . Dieselben vertauschen die Gegenkanten des Hauptvierseits mit einander; die beiden Kernflächen F^2 und Φ^2 der Correlation χ (6) gehen durch

die ∞^2 Correlationen χ_1 in einander und durch die ∞^2 Collineationen φ in sich selbst über. Die ∞^2 mit χ vertauschbaren Collineationen und Correlationen (10) bilden mit diesen ∞^2 involutorischen Collineationen φ und Correlationen χ_1 zusammen eine Gruppe. Analoges gilt von den ∞^1 involutorischen Collineationen und Correlationen, welche eine ebene Correlation χ' umkehren; doch wird deren Existenz a. a. O. nur für den einen Hauptfall nachgewiesen, dass die beiden Kernkegelschnitte, welche die Orte incidenter homologer Elemente von χ' sind, in zwei reellen Punkten sich berühren.

16. Nur die involutorischen Verwandtschaften ω sind mit den sie umkehrenden Verwandtschaften χ vertauschbar; denn aus:

$$\chi^{-1}\omega\chi = \omega^{-1} \text{ und } \omega\chi = \chi\omega$$

folgt $\omega = \omega^{-1}$.

Die Resultirende von zwei involutorischen Verwandtschaften ω, ω_1 wird durch jede derselben umgekehrt; aus $\varphi = \omega\omega_1$ und $\omega_1^2 = \omega^2 = 1$ folgt nämlich:

$$\omega\varphi = \omega_1 \text{ und } (\omega\varphi)^2 = \omega^2 \text{ oder } \omega^{-1}\varphi\omega = \varphi^{-1},$$

ebenso aber $(\varphi\omega_1)^2 = \omega_1^2$ oder $\omega_1^{-1}\varphi\omega_1 = \varphi^{-1}$. Wird eine Verwandtschaft φ durch eine involutorische Verwandtschaft ω umgekehrt, so resultirt sie aus ω und einer anderen involutorischen Verwandtschaft ω_1 ; denn aus:

$$(\omega\varphi)^2 = \omega^2 = 1 \text{ und } \varphi = \omega\omega_1 \text{ oder } \omega\varphi = \omega_1$$

folgt $\omega_1^2 = 1$.

Diese Sätze bringen die Umkehrungsprobleme in Verbindung mit der Lehre von den harmonischen Verwandtschaften, denen wir zunächst uns zuwenden.

§ 4.

Harmonische Verwandtschaften angewendet auf die Umkehrungsprobleme.

17. Zwei Verwandtschaften φ, ϑ heißen harmonisch, wenn die eine und damit jede von ihnen aus der anderen und einer involutorischen Verwandtschaft ω resultirt*), wenn also:

$$\varphi = \vartheta\omega = \vartheta\omega^{-1} \text{ und folglich } \vartheta = \varphi\omega = \varphi\omega^{-1}$$

ist. Beispielsweise resultirt aus einer Collineation oder Correlation φ und einer Spiegelung eine mit φ harmonische Collineation resp. Correlation. Mit einer Homographie in einem Elementargebilde sind ∞^2 Homographien harmonisch, weil in dem Gebilde ∞^2 Involutionen

*) Vgl. Stephanos in diesen Annalen 22, S. 320, welchem Segre im Journal für d. r. u. a. Math. 100, S. 318 den Begriff der „harmonischen Homographien“ entlehnte. Vgl. auch die Abhandlungen von Hermann Wiener in den Berichten der Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1890 S. 261, 1891 S. 424 und 644.

existiren. Mit einer ebenen oder räumlichen Collineation (Correlation) sind ∞^4 resp. ∞^8 andere Collineationen (bezw. Correlationen) und ∞^5 resp. ∞^9 Correlationen (bezw. Collineationen) harmonisch; denn in der Ebene resp. im Raume giebt es ∞^4 resp. ∞^8 involutorische Collineationen und ∞^5 resp. ∞^9 polare Correlationen.

18. Die beiden Verwandtschaften φ, ϑ sind harmonisch, wenn aus der einen und der Umkehrung der anderen eine involutorische Verwandtschaft resultirt, wenn also eine und damit jede der Verwandtschaften:

$$\vartheta^{-1}\varphi, \varphi^{-1}\vartheta, \vartheta\varphi^{-1}, \varphi\vartheta^{-1}$$

involutorisch ist; zugleich mit φ und ϑ sind demnach ihre Umkehrungen φ^{-1} und ϑ^{-1} harmonisch. Ist nämlich $\vartheta^{-1}\varphi$ eine involutorische Verwandtschaft ω , so wird:

$$\vartheta^{-1}\varphi = \varphi^{-1}\vartheta = \omega \quad \text{und} \quad \varphi = \vartheta\omega = \vartheta\omega^{-1};$$

zugleich wird $\vartheta^{-1}\varphi\vartheta^{-1}\varphi = \omega^2 = 1$, und folglich ist auch $\varphi\vartheta^{-1} = \vartheta\varphi^{-1}$ eine involutorische Verwandtschaft.

Die Gleichung $\vartheta^{-1}\varphi = \varphi^{-1}\vartheta$ lässt sich, wenn $\vartheta = \vartheta^{-1}$ ist, umformen in $\vartheta^{-1}\varphi\vartheta = \varphi^{-1}$. Wenn also von zwei harmonischen Verwandtschaften $\varphi\vartheta$ die eine ϑ involutorisch ist, so kehrt sie die andere um (Segre). Zugleich wird diese andere Verwandtschaft $\varphi = \vartheta\omega$ die Resultirende von ϑ und einer zweiten involutorischen Verwandtschaft ω .

Zwei Verwandtschaften haben zu einander eine invariante Beziehung, wenn sie harmonisch oder vertauschbar sind, oder wenn die eine durch die andere umgekehrt wird (8).

19. Zwei Homographien φ, ϑ in einer Punktreihe sind harmonisch, wenn zwei beliebige Punkte P, Q der Reihe durch φ in die resp. Punkte P_1, Q_1 , dagegen durch ϑ in die resp. Punkte Q_1, P_1 übergehen (Segre). Denn die Homographie $\varphi^{-1}\vartheta$ ist involutorisch, weil sie die Punkte P_1, Q_1 mit einander vertauscht. Ist die Homographie φ gegeben, von ϑ aber nur ein Punktepaar PQ_1 bekannt, so bilden die beiden Punkte Q, P_1 , in welche Q_1 und P durch resp. φ^{-1} und φ übergehen, ein zweites Paar homologer Punkte von ϑ . Eine mit φ harmonische Homographie ϑ ist demnach i. A. eindeutig bestimmt, wenn von ihr zwei Paare homologer Punkte PQ_1 und RS_1 beliebig in der Punktreihe angenommen werden.

20. Mit der Homographie:

$$ABC \dots PQ \dots \wedge A_1 B_1 C_1 \dots P_1 Q_1 \dots \text{ oder } \varphi$$

sind harmonisch die ∞^1 Involutionen oder involutorischen Homographien:

$$AB_1 . BA_1, AC_1 . CA_1, BC_1 . CB_1, \dots, PQ_1 . QP_1, \dots;$$

denn die Punkte P, Q gehen durch φ über in P_1, Q_1 , dagegen durch die Involution

$$PQ_1 \cdot QP_1 \text{ oder } PQQ_1 \wedge Q_1P_1P$$

in die resp. Punkte Q_1, P_1 (vgl. 19). Die Homographie φ wird durch jede dieser ∞^1 Involutionen umgekehrt (18); aus den Involutionen resultiren folglich ∞^1 mit φ vertauschbare Homographien ψ (vgl. 11, 14). Jede dieser Homographien ψ resultirt aus zwei jener Involutionen, von denen die eine sonst beliebig ist (12); sie wird folglich ebenso wie φ durch jede der ∞^1 Involutionen umgekehrt (16). Die ∞^1 Homographien ψ sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit φ vertauschbar. Sie bilden mit einander und auch mit den sie umkehrenden Involutionen eine Gruppe.

Hat die Homographie φ zwei reelle Doppelpunkte M, N , so ist sie darstellbar durch:

$$MNPQ \wedge MNP, Q_1;$$

hieraus aber folgt bekanntlich $MNPQ \wedge NMQ_1P_1$, und $MN.PQ_1.QP_1$ ist demnach eine Involution. Die Doppelpunkte M, N von φ bilden also ein gemeinsames Punktpaar der ∞^1 mit φ harmonischen Involutionen (Segre). Eine Punktinvolution ω ist, wie man hiernach leicht beweist, mit den ∞^2 Homographien harmonisch, deren Doppelpunkte je ein Punktpaar von ω bilden; sie kehrt alle diese Homographien um.

Die obigen Sätze lassen sich ohne Weiteres auf alle Elementargebilde ausdehnen und werden hernach insbesondere auf Regelschaaren angewendet werden.

21. Eine räumliche Collineation φ und eine Correlation ϑ sind harmonisch, wenn durch φ die Eckpunkte A, B, C, D und durch ϑ die ihnen gegenüber liegenden Flächen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Tetraeders in die resp. Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 eines anderen Tetraeders übergehen. Denn die Correlation $\varphi\vartheta^{-1} = \omega$ transformirt jeden Eckpunkt des Tetraeders $ABCD$ in die gegenüberliegende Fläche und ist deshalb bekanntlich eine polare, involutorische. Wenn die Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ perspective Lage haben, so wird auch ϑ eine polare Correlation*); die Collineation $\varphi = \vartheta\omega$ aber wird in diesem Falle von jeder der beiden involutorischen Correlationen ϑ, ω umgekehrt, weil sie deren Resultirende ist (16).

22. Wir nehmen an, die Collineation φ habe nicht unendlich viele Doppelemente und sei insbesondere weder perspectiv noch geschaart. Dann lässt sich eine sie umkehrende polare Correlation ϑ so bestimmen, dass sie einer gegebenen Ebene α einen beliebigen Punkt A_1 als Pol

*) Vgl. von Staudt, Geometrie der Lage, S. 135 und Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., Seite 135, wo der analoge Satz über perspective Dreiecke bewiesen ist.

zuweist. Durch φ möge nämlich α in α_1 , und durch φ^{-1} möge A_1 in A übergehen. Die durch φ collinearen Ebenen α, α_1 erzeugen dann durch ihre homologen Punkte i. A. eine Strahlencongruenz dritter Ordnung, nämlich die Axencongruenz eines cubischen Ebenenbüschels. Seien nun BB_1, CC_1 und DD_1 drei paar homologe Punkte von α und α_1 , deren Verbindungslinien in einem Punkte der Geraden AA_1 sich schneiden; dann liegen die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ perspectiv und bestimmen (21) eine polare Correlation ϑ , welche die Collineation φ umkehrt. Weil der Pol A_1 der Ebene $\alpha = BCD$ dreifach unendlich viele Lagen annehmen kann, so ergibt sich hieraus und aus früheren Sätzen (13, 14):

23. Eine räumliche Collineation φ , die weder perspectiv noch geschaart ist, noch unendlich viele Doppelpunkte hat, wird durch ∞^3 polare Correlationen ϑ umgekehrt, auch wenn sie keine oder nur zwei reelle Doppelpunkte hat. Wenn eine Ebene α durch die Collineationen $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ übergeht in resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, ein beliebiger Punkt A_1 aber durch $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \dots$ in resp. A, A_{-1}, A_{-2}, \dots , so transformirt (13) eine dieser polaren Correlationen die Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ in die resp. Punkte $A_1, A, A_{-1}, A_{-2}, \dots$ und ist durch die Beziehung:

$$\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \wedge A_1 A A_{-1} A_{-2} \dots$$

i. A. eindeutig bestimmt*). Hat die Collineation φ vier und nur vier reelle Doppelpunkte, so bilden diese ein gemeinsames Poltetraeder der ∞^3 polaren Correlationen ϑ , welche φ umkehren (15).

Die Collineation φ ist vertauschbar mit ∞^3 Collineationen ψ , welche aus den ∞^3 polaren Correlationen ϑ resultiren und mit ihnen eine Gruppe bilden (12). Diese ∞^3 Collineationen ψ werden ebenso wie φ durch jede der ∞^3 polaren Correlationen ϑ umgekehrt (16), weil sie aus je ∞^3 Paaren derselben resultiren (12); sie sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit φ vertauschbar. Wird ein beliebiges Punktpaar AA' durch die Collineation $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ transformirt in die resp. Punktpaare $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, \dots$, so bestimmt die projective Beziehung:

$$AA_1A_2A_3 \dots \wedge A'A'_1A'_2A'_3 \dots$$

i. A. eine dieser ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen ψ . Zwei beliebige Punkte A, A' gehen also i. A. durch die Collineation φ und deren Potenzen in zwei collineare Punktsysteme über, und zwar ist die Collineation dieser Systeme mit φ vertauschbar.

*) Diese projective Beziehung reicht zur Bestimmung der Correlation nur dann nicht aus, wenn die Collineation φ perspectiv oder geschaart oder planar ist, oder aber, wenn die Ebenen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ abwechselnd durch zwei Geraden gehen. Der letzte dieser Fälle tritt ein, wenn φ eine halbgeschaarte Collineation ist (vgl. 29).

§ 5.

Umkehrung specieller Collineationen.

24. Ueber die vorhin ausgeschlossenen Specialfälle der räumlichen Collineation sei Folgendes bemerkt.

Eine perspective Collineation oder „Homologie“ mit dem Centrum S und der Homologieebene η ist vertauschbar mit den ∞^9 Collineationen, welche S und η zu Doppelementen haben, und wird umgekehrt durch die ∞^9 Correlationen, welche S und η in einander transformiren. Denn jedes der ∞^6 Tetraeder, welche S zum Eckpunkte und η zur gegenüberliegenden Fläche haben, ist Haupttetraeder von ∞^3 jener Collineationen (10) und Poltetraeder von ∞^3 dieser Correlationen (15). Uebrigens sind nur ∞^6 dieser Correlationen polar; alle übrigen resultiren aus einer von ihnen und den ∞^9 mit der Homologie vertauschbaren Collineationen, von welchen ∞^4 involutorisch sind.

Eine geschaarte Collineation φ mit reellen Doppelpunktgeraden (Axen) u, u' ist vertauschbar mit den ∞^7 Collineationen und den ∞^7 Correlationen, welche die beiden windschiefen Geraden u, u' in sich selbst transformiren; sie wird umgekehrt durch die ∞^7 Collineationen und die ∞^7 Correlationen, welche u und u' mit einander vertauschen, insbesondere durch ∞^4 involutorische Collineationen und ∞^5 polare Correlationen. Denn jedes der ∞^4 Tetraeder, welche u und u' zu Gegenkanten haben, ist das Haupttetraeder von ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen (10) und ein Poltetraeder von ∞^3 polaren Correlationen, welche φ umkehren (15); ausserdem wird φ umgekehrt durch ∞^4 involutorische Collineationen, welche u mit u' vertauschen (vgl. 20). Aus je einer dieser involutorischen Collineationen und polaren Correlationen und den ∞^7 mit φ vertauschbaren Collineationen resultiren die übrigen ∞^7 Collineationen und Correlationen, welche φ umkehren. Die ∞^7 mit φ vertauschbaren Collineationen und Correlationen bilden mit ihnen und ebenso mit einander eine Gruppe.

Wenn eine Collineation die Punkte einer Geraden u zu Doppelpunkten hat, so hat sie zugleich eine Gerade v und deren Ebenen zu Doppelementen*), auf v aber i. A. noch zwei Doppelpunkte K, L . Sie ist in diesem Falle mit ∞^5 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^5 Correlationen umgekehrt. Sind die Doppelpunkte K, L reell, so ist jedes der ∞^2 Tetraeder, welche K, L und irgend zwei Punkte der Geraden u zu Eckpunkten haben, das Haupttetraeder von ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen und ein Poltetraeder von ∞^3 polaren Correlationen, welche φ umkehren. Aus einer dieser Corre-

*) Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 72.

lationen und den ∞^5 mit φ vertauschbaren Collineationen aber resultiren die übrigen ∞^5 Correlationen, welche φ umkehren; sie vertauschen die Punkte K, L mit den resp. Ebenen Lu, Ku .

25. Für ebene Collineationen gelten analoge Sätze wie für die räumlichen. Eine nicht perspective ebene Collineation ist mit ∞^2 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^2 polare ebene Correlationen umgekehrt, die ähnlich wie oben (23) bestimmt werden. Jene ∞^2 Collineationen sind auch mit einander vertauschbar und bilden sowohl für sich als auch mit den ∞^2 polaren Correlationen eine Gruppe. Eine perspective Collineation oder Homologie in der Ebene ist mit ∞^4 Collineationen vertauschbar und wird durch ∞^4 ebene Correlationen umgekehrt, von denen aber nur ∞^3 polar sind.

26. Ausser den geschaarten giebt es noch andere räumliche Collineationen, die nicht nur durch Correlationen sondern auch durch Collineationen umkehrbar und sowohl mit Correlationen als auch mit Collineationen vertauschbar sind. Wenn eine Collineation φ eine allgemeine Fläche F^2 zweiter Ordnung in sich selbst transformirt, so ist sie mit ∞^3 Correlationen χ vertauschbar und wird durch ∞^3 Collineationen φ' umgekehrt. Sie führt nämlich zugleich mit F^2 die polare Correlation χ' in sich selbst über, welche F^2 zur Kernfläche hat, ist also mit χ' vertauschbar (9). Aus χ' aber und den ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen ψ resultiren die ∞^3 mit φ vertauschbaren Correlationen χ , die übrigens mit den ψ und mit einander nicht vertauschbar sind. Und aus χ' und den ∞^3 polaren Correlationen ϑ , welche φ umkehren (23), resultiren die ∞^3 Collineationen φ' , welche φ umkehren. Die Collineation φ transformirt ausser F^2 noch unendlich viele andere Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe in sich selbst; in diese Flächen wird F^2 durch die ∞^3 mit φ vertauschbaren und ebenso durch die φ umkehrenden Collineationen und Correlationen verwandelt.

27. Die Collineation φ heisst eine [eigentliche] Hermite'sche, wenn sie jede der beiden Regelschaaren eines einschaligen Hyperboloides oder hyperbolischen Paraboloides in sich selbst transformirt. Sie hat dann in jeder dieser Regelschaaren zwei reelle oder imaginäre Doppelstrahlen, welche Gegenkanten ihres Haupttetraeders sind. Sie ist bestimmt*) durch die beiden in ihr enthaltenen Homographien:

$$abc \dots \wedge a_1 b_1 c_1 \dots \quad \text{und} \quad pqr \dots \wedge p_1 q_1 r_1 \dots,$$

welche je eine der beiden Regelschaaren in sich selbst transformiren, und wird dargestellt durch:

*) von Standt, Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 6; vgl. Reye, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 30.

$$abcpqr \frown a_1 b_1 c_1 p_1 q_1 r_1.$$

Die neun Punkte ap, aq, \dots, cr gehen durch sie über in die resp. Punkte $a_1 p_1, a_1 q_1, \dots, c_1 r_1$.

Die Hermite'sche Collineation φ wird zugleich mit jenen beiden Homographien umgekehrt durch ∞^2 involutorische Collineationen und durch ∞^2 polare Correlationen, welche die beiden Regelschaaren in sich selbst und ihre Doppelstrahlen in einander transformiren (20), und von denen je eine dargestellt wird durch:

$$abb_1 pqq_1 \frown b_1 a_1 a q_1 p_1 p.$$

Und weil die Collineation φ vertauschbar ist mit ∞^3 Collineationen ψ und Correlationen χ (26), welche diese vier Doppelstrahlen in sich selbst transformiren, so wird sie umgekehrt durch die ∞^3 Collineationen φ' und polaren Correlationen ϑ , welche die reellen oder imaginären Doppelstrahlen von jeder der beiden Regelschaaren mit einander vertauschen. Sie verwandelt die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst, welche durch diese vier Doppelstrahlen gehen*).

Wenn eine Collineation φ eine cubische Raumcurve in sich selbst transformirt, so ist sie eine Hermite'sche. Die Raumcurve enthält nämlich i. A. zwei Doppelpunkte von φ und liegt mit deren Tangenten auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren Regelschaaren durch φ in sich selbst übergehen. Diese Hermite'sche Collineation φ transformirt ∞^2 cubische Raumcurven in sich selbst**), welche die beiden Doppelpunkte und deren Tangenten und Schmiegungeebenen mit einander gemein haben und durch die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen und Correlationen in einander übergehen.

28. Zu den Hermite'schen Collineationen gehören die geschaarten; denn eine geschaarte Collineation hat ∞^2 Doppelstrahlen und transformirt ∞^3 von ihnen gebildete Regelschaaren und deren ∞^3 Leit-schaaren in sich selbst. Eine geschaart involutorische Collineation ω ist völlig bestimmt durch ihre beiden windschiefen Involutionsachsen u, u' , wenn diese reell sind; denn sie vertauscht je zwei durch u und u' harmonisch getrennte Punkte, Ebenen oder Strahlen mit einander. Sie wird folglich in sich selbst übergeführt durch die ∞^7 Collineationen und Correlationen, welche die Involutionsachsen u, u' theils in sich selbst, theils in einander transformiren. Diese ∞^7 Collineationen und Correlationen sind daher mit der geschaart involutorischen Collineation ω vertauschbar (9); mit einander sind sie i. A. nicht vertauschbar. Wenn eine Collineation die beiden Geraden u, u' in sich selbst transformirt, so hat sie auf jeder von ihnen zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte

*) Vgl. Rosanes im Journal für d. r. u. a. Math. 80, S. 67; Voss in den Math. Annalen 13, S. 353; Sturm in den Math. Annalen 26, S. 470.

**) Das bewies schon Herr Sturm in diesen Annalen 26, S. 490.

mit ω gemein; vertauscht sie dagegen u mit u' , so hat sie keine Doppelpunkte mit ω gemein; ist aber dennoch mit dieser involutorischen Collineation vertauschbar.

29. Wenn eine Collineation φ zwei windschiefe Gerade u, u' mit einander vertauscht, d. h. jede von ihnen in die andere transformirt, so vertauscht sie die ∞^2 Strahlen einer linearen Congruenz paarweise mit einander. Die Punktreihe u nämlich wird durch die Collineation φ und ihre Umkehrung φ^{-1} in zwei auf u' liegende projective Punktreihen verwandelt, und diese haben zwei reelle oder imaginäre Punkte A', B' entsprechend gemein, in welche gewisse zwei Punkte A, B von u durch φ und zugleich durch φ^{-1} übergehen. Die Punkte von jeder der beiden Geraden AA' und BB' werden folglich durch φ paarweise mit einander vertauscht, mit ihnen zugleich aber die ∞^2 Geraden, welche AA' und BB' schneiden. Da ein beliebiger Punkt P auf einem dieser Strahlen liegt, so geht er durch φ und φ^{-1} in zwei Punkte des zugeordneten Strahles über. Die lineare Congruenz dieser paarweise einander zugeordneten Strahlen ist hiernach leicht zu construiren, auch wenn ihre Axen AA' und BB' imaginär sind. Sie existirt auch in diesem Falle, weil die Geraden u, u' durch die mit φ vertauschbaren Collineationen und durch die Collineationen, welche φ umkehren, in je zwei Gerade übergehen, die gleichfalls durch φ mit einander vertauscht werden.

Die Collineation φ^2 ist eine geschaarte; die Collineation φ möge deshalb „halbgeschaart“ heissen. Die zwei paar Doppelpunkte der Punktinvolutionen auf AA' und BB' bilden das Haupttetraeder von φ ; sie trennen, wenn sie reell sind, je zwei Gerade harmonisch, welche wie u und u' durch φ mit einander vertauscht werden.

30. Eine halbgeschaarte Collineation φ ist vertauschbar mit den ∞^2 geschaart involutorischen Collineationen ω , deren Involutionenachsen durch φ mit einander vertauscht werden (28). Jede dieser Collineationen ω vertauscht die vier Doppelpunkte von φ paarweise mit einander (29). Aus je zweien der Collineationen ω resultiren die ∞^3 mit φ vertauschbaren Collineationen ψ , welche mit φ die vier Doppelpunkte gemein haben; die Resultirenden aus diesen ∞^3 Collineationen ψ und einer beliebigen der Collineationen ω aber sind ∞^3 mit φ vertauschbare Collineationen ψ' , welche wie ω die Doppelpunkte von φ paarweise mit einander vertauschen. Die Collineationen ψ bilden eine Gruppe für sich und eine umfassendere Gruppe mit den Collineationen ψ' . Sie sind mit einander vertauschbar (23); dagegen sind die Collineationen ψ' weder mit jenen ψ noch mit einander vertauschbar.

31. Die halbgeschaarte Collineation φ ist, wie leicht zu beweisen, eine Hermite'sche, wenn ihre vier Doppelpunkte alle reell oder alle imaginär sind; sie wird (27) in diesen beiden Hauptfällen durch ∞^3

Collineationen und Correlationen umgekehrt. Für den Fall reeller Doppelpunkte werde φ dargestellt durch:

$$AA'BB'P \frown A'AB'BP_1,$$

und es seien MM' und NN' die zwei paar Doppelpunkte von φ , welche A von A' resp. B von B' harmonisch trennen. Dann liegen die Kanten der beiden windschiefen Vierecke $MM'NN'$ und $MM'N'N$ auf zwei durch die Punkte P und P_1 gehenden Flächen zweiter Ordnung, deren Regelschaaren durch φ in sich selbst übergehen. Die halbgeschaarte Collineation φ wird demnach (27) umgekehrt durch die ∞^3 halbgeschaarten Collineationen und polaren Correlationen, welche von je einem der beiden Vierecke die Gegenkanten mit einander vertauschen. Sie ist, wie hieraus folgt, vertauschbar mit den ∞^3 Correlationen und Collineationen, welche die vier Kanten von je einem der beiden Vierecke zu Doppelstrahlen haben, sowie mit den ∞^3 halbgeschaarten Collineationen ψ' , welche M mit M' und N mit N' vertauschen (vgl. 30). In der Gruppe dieser mit φ vertauschbaren und jener φ umkehrenden Collineationen und Correlationen sind eine Anzahl von Untergruppen leicht zu unterscheiden.

§ 6.

Umkehrung räumlicher Correlationen.

32. Wir erörtern in Kürze die Frage nach den Collineationen und Correlationen, welche eine räumliche *Correlation* χ umkehren oder aber mit ihr vertauschbar sind. Die ∞^1 Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe, welche durch die vier reellen oder imaginären Hauptstrahlen von χ gehen, werden durch χ in einander transformirt, und zwar paarweise involutorisch, weil die Correlation zwei von ihnen, nämlich ihre beiden Kernflächen F^2 und Φ^2 , mit einander vertauscht (6). Die ∞^1 Flächen bilden also einen involutorischen Flächenbüschel. Die beiden Doppelflächen dieses Büschels gehen durch χ in sich selbst über*), und jede von ihnen ist folglich die Kernfläche einer mit χ vertauschbaren polaren Correlation. Wir beschränken uns auf den Hauptfall, in welchem wenigstens eine dieser beiden Flächen eine Regelfläche R^2 ist. Weil die Doppelstrahlen von χ auf R^2 liegen und ein windschiefes Hauptvierseit bilden, so wird jede der beiden Regelschaaren von R^2 durch die Correlation χ in sich selbst transformirt, und die Collineation χ^2 ist eine Hermite'sche.

33. Die Correlation χ ist bestimmt durch die beiden in ihr enthaltenen Homographien, welche je eine der beiden Regelschaaren der

*) Voss in den Math. Annalen 13, S. 370.

Fläche R^2 in sich selbst verwandeln*). Die Doppelstrahlen dieser Homographien bilden die zwei paar Gegenkanten des Hauptvierseits von χ , können übrigens paarweise imaginär sein oder zusammenfallen. Die Correlation χ wird zugleich mit den beiden Homographien umgekehrt durch ∞^2 involutorische Collineationen und polare Correlationen, welche die beiden Regelschaaren in sich selbst transformiren und die Doppelstrahlen paarweise mit einander vertauschen (vgl. 27). Auch wenn die vier Doppelstrahlen paarweise imaginär sind oder zusammenfallen, existiren diese ∞^2 Collineationen und Correlationen. Aus ihnen resultiren ∞^2 mit χ vertauschbare Collineationen und Correlationen; diese aber werden durch dieselben ∞^2 involutorischen Collineationen und Correlationen umgekehrt wie χ , weil sie aus je ∞^2 Paaren derselben resultiren (12, 16), und sie sind deshalb ebensowohl mit einander wie mit χ vertauschbar. Sie haben mit χ die vier Doppelstrahlen gemein und bilden sowohl mit einander als auch mit jenen, welche χ umkehren, eine Gruppe. Die früheren Sätze (10 und 15) sind hiedurch vervollständigt und verallgemeinert.

§ 7.

Resultirende involutorischer Collineationen und Correlationen.

34. Wir wenden uns jetzt zu der noch kaum berührten Frage nach den Verwandtschaften, welche durch eine gegebene Verwandtschaft umgekehrt werden.

Eine involutorische Verwandtschaft kehrt nur die Verwandtschaften um, welche aus ihr und je einer anderen involutorischen Verwandtschaft resultiren (16). Eine Punktinvolution kehrt demgemäss ∞^2 Homographien um, und zwar alle die, deren Doppelpunkte je ein Punktepaar der Involution bilden (20). Durch eine involutorische räumliche Collineation (oder Correlation) aber werden die ∞^8 Collineationen und die ∞^9 Correlationen (bezw. die ∞^8 Correlationen und die ∞^9 Collineationen) umgekehrt, welche aus ihr und je einer der ∞^8 involutorischen Collineationen und der ∞^9 involutorischen Correlationen resultiren (vgl. 17). Um sie näher zu bestimmen, brauchen wir nur die Resultirenden von je zwei involutorischen Collineationen und Correlationen zu untersuchen.

35. Zwei polare Correlationen χ, χ_1 haben bekanntlich i. A. ein einziges Poltetraeder gemein, dessen Gegenelemente sie mit einander vertauschen. Sie sind bestimmt durch das Poltetraeder und durch die beiden Punkte P, P_1 , in welche sie eine gegebene Ebene π trans-

*) von Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, S. 6; vgl. Beyer, Geometrie der Lage II, 3. Aufl., S. 30.

formiren. Aus ihnen resultirt die Collineation $\chi\chi_1$, welche das Poltetraeder zum Haupttetraeder hat und P in P_1 verwandelt; diese nicht specielle Collineation aber wird durch jede der beiden polaren Correlationen umgekehrt. Eine polare Correlation kehrt demnach die ∞^9 Collineationen um, welche je eines ihrer ∞^6 Poltetraeder zum Haupttetraeder haben (vgl. 15).

36. Eine polare Correlation χ wird durch eine geschaart involutorische Collineation φ in eine andere polare Correlation übergeführt, welche mit ihr i. A. ein einziges Poltetraeder gemein hat. Dieses Tetraeder wird durch φ in sich selbst transformirt, seine Eckpunkte bilden zwei Punktepaare AA' und BB' von φ und liegen auf zwei Doppelstrahlen der involutorischen Collineation; seine übrigen zwei paar Gegenkanten werden durch φ und ebenso durch χ mit einander vertauscht und bilden daher das Hauptvierseit $ABA'B'$ der Correlation $\varphi\chi$. Diese nicht specielle Correlation wird sowohl durch φ als auch durch χ umgekehrt (34). Die ∞^3 Correlationen, welche $ABA'B'$ zum Hauptvierseit haben, resultiren alle aus der involutorischen Collineation φ und den ∞^3 polaren Correlationen, welche die Gegenkanten von $ABA'B'$ mit einander vertauschen.

Eine geschaart involutorische Collineation φ kehrt demnach die ∞^9 Correlationen um, deren Hauptvierseite je zwei Punktepaare von φ zu Gegenpunkten haben. Eine polare Correlation χ aber kehrt die ∞^8 Correlationen um, deren Hauptvierseite in je einem der ∞^6 Poltetraeder von χ enthalten sind, und deren Kernflächen durch χ in einander übergehen (15)*.

37. Alle noch übrigen Producte von je zwei involutorischen Collineationen und Correlationen stellen specielle Collineationen oder Correlationen dar, wie wir gleich nachweisen werden.

Aus einer polaren Correlation χ und einer centrisc involutorischen Collineation φ' resultirt eine specielle Correlation $\chi\varphi'$, welche die Ebenen einer gewissen Geraden g mit den Punkten einer anderen Geraden g_1 ebenso, wie die Correlation χ , involutorisch vertauscht. Die beiden Geraden g, g_1 sind reciproke Polaren in Bezug auf χ , und g geht durch das Centrum, g_1 aber liegt in der Involutionsebene der Collineation φ' . Eine centrisc involutorische Collineation kehrt ∞^9 , eine polare Correlation aber ∞^6 derartige specielle Correlationen um.

38. Aus einer polaren Correlation χ und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine halbgeschaarte Collineation $\chi\chi'$, sodass $(\chi\chi')^2$ eine geschaarte Collineation ist. Denn der lineare Complex der Doppelstrahlen

*) In meiner „Geometrie der Lage“ III, S. 224, Nr. 120 wurde diese letztere Bedingung übersehen, und irrthümlich angegeben, dass eine polare Correlation ∞^9 (statt ∞^8) andere Correlationen umkehre.

von χ' wird durch χ in einen anderen linearen Complex transformirt, und die ∞^2 gemeinsamen Strahlen dieser beiden Complexe werden durch χ und ebenso durch $\chi\chi'$ paarweise mit einander vertauscht. Die beiden Axen der linearen Congruenz dieser Strahlen sind reciproke Polaren bezüglich beider Correlationen und die Träger zweier Punktinvolutionen der Collineation $\chi\chi'$. Sie schneiden die Kernfläche der polaren Correlation χ in den Gegenpunkten eines Vierseits, dessen Kanten vier gemeinsame Doppelstrahlen von χ , χ' und $\chi\chi'$ sind. — Eine Nullcorrelation kehrt ∞^3 , eine polare Correlation kehrt ∞^5 halbgeschaarte Collineation um.

39. Aus zwei geschaart involutorischen Collineationen φ , φ_1 resultirt eine [Hermite'sche] Collineation $\varphi\varphi_1$, welche ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt. Die zwei paar Involutionen von φ und φ_1 sind nämlich zwei paar reciproke Polaren in Bezug auf ∞^1 Flächen zweiter Ordnung*), die einen Büschel bilden. Eine beliebige dieser Flächen aber wird durch jede der Collineationen φ , φ_1 und folglich auch durch deren Resultirende $\varphi\varphi_1$ in sich selbst transformirt; und wenn sie eine Regelfläche ist, so gehen ihre beiden Regelschaaren durch φ und ebenso durch φ_1 in einander, durch $\varphi\varphi_1$ also in sich selbst über. Will man den Beweis auch für den Fall imaginärer Axen führen, so ist leicht zu zeigen, dass jede der beiden involutorischen Collineationen ∞^5 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Diese beiden Mannigfaltigkeiten haben einen Flächenbüschel gemein, weil sie fünffach unendlich und in der neunfach unendlichen linearen Mannigfaltigkeit aller Flächen zweiter Ordnung enthalten sind.

Eine geschaart involutorische Collineation φ kehrt hiernach ∞^8 Hermite'sche Collineationen um, deren Doppelpunkte paarweise durch φ mit einander vertauscht werden (vgl. 27).

40. Aus einer geschaart involutorischen Collineation φ und einer centrisc involutorischen φ' resultirt eine specielle Collineation $\varphi\varphi'$, welche die Punkte einer Geraden g und die Ebenen einer Geraden g_1 involutorisch paart. Die Geraden g , g_1 sind die gemeinsamen Doppelstrahlen von φ und φ' , und zwar liegt g in der Involutionsebene von φ' , während g_1 durch das Involutioncentrum von φ' geht. — Eine centrisc involutorische Collineation kehrt ∞^8 , eine geschaart involutorische aber ∞^6 solche specielle Collineationen um.

Aus einer geschaart involutorischen Collineation φ und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine specielle Correlation $\varphi\chi'$, welche nicht bloss vier sondern ∞^1 Doppelstrahlen hat. Denn die gemeinsamen Doppelstrahlen von φ und χ' sind zugleich solche von $\varphi\chi'$ und bilden

*) Vgl. meine Geometrie der Lage, 3. Aufl., II, S. 274.

eine Regelschaar. Die Correlation $\varphi\chi'$ hat ausser ihnen noch zwei Doppelstrahlen, welche Leitstrahlen der Regelschaar sind und durch φ und χ' in einander übergehen. Die Collineation $(\varphi\chi')^2$ ist eine geschaarte. — Eine Nullcorrelation kehrt ∞^8 , eine geschaart involutorische Collineation kehrt ∞^5 solche specielle Correlationen um.

41. Aus zwei centrisch involutorischen Collineationen φ' , φ_1' resultirt eine specielle Collineation $\varphi'\varphi_1'$, welche alle Punkte einer Geraden u und alle Ebenen einer Geraden v zu Doppelementen hat. In u schneiden sich die Involutionsebenen und auf v liegen die beiden Centren von φ' und φ_1' . Auf v liegen noch zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte von $\varphi'\varphi_1'$, welche ein gemeinsames Punktepaar von φ' und φ_1' bilden. — Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^6 solche specielle Collineationen um.

Aus einer centrisch involutorischen Collineation φ' und einer Nullcorrelation χ' resultirt eine sehr specielle Correlation, welche zwei Büschel von Doppelstrahlen hat. Der eine dieser Büschel liegt in der Involutionsebene von φ' und hat deren Nullpunkt in Bezug auf χ' zum Mittelpunkt; der andere hat das Centrum von φ' zum Mittelpunkte und liegt in dessen Nullebene. Beide Büschel bestehen aus gemeinsamen Doppelstrahlen von φ' und χ' . — Eine centrisch involutorische Collineation kehrt ∞^5 , eine Nullcorrelation aber ∞^6 solche specielle Correlationen um.

Aus zwei Nullcorrelationen χ' , χ_1' resultirt eine geschaarte Collineation $\chi'\chi_1'$; denn die ∞^2 gemeinsamen Doppelstrahlen von χ' und χ_1' sind zugleich solche von $\chi'\chi_1'$. Eine Nullcorrelation kehrt die ∞^5 geschaarten Collineationen um, deren Doppelpunktsgersten sie mit einander vertauscht (vgl. 24).

§ 8.

Associirte Verwandtschaften.

42. Die Verwandtschaften φ , welche durch eine gegebene Verwandtschaft χ umgekehrt werden, lassen sich aus den Lösungen der symbolischen Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ ohne Weiteres ableiten. Wird nämlich $\psi = \chi\varphi$ gesetzt, so ergibt sich:

$$(\chi\varphi)^2 = \chi^2 \text{ und folglich } \chi^{-1}\varphi\chi = \varphi^{-1}.$$

Die Verwandtschaft $\chi^{-1}\psi = \varphi$ wird demnach durch χ umgekehrt; aus χ und jeder durch χ umkehrbaren Verwandtschaft φ aber resultirt eine Verwandtschaft $\chi\varphi = \psi$, welche der Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ genügt.

Zwei Verwandtschaften ψ , χ nenne ich „associirt“, wenn sie der Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ genügen, wenn also ihre zweiten Potenzen eine und dieselbe Verwandtschaft darstellen. Wenn zwei Verwandtschaften mit einer dritten associirt sind, so sind sie auch mit einander associirt.

Die involutorischen Verwandtschaften sind mit der Identität und mit einander associirt.

Die mit χ associirten Verwandtschaften ψ sind mit der Verwandtschaft χ^2 vertauschbar; denn:

$$\text{aus } \psi^2 = \chi^2 \text{ folgt } \psi^3 = \psi\chi^2 = \chi^2\psi.$$

Die Gleichung $\psi^2 = \chi^2$ lässt sich umformen in:

$$\chi^{-1}\psi = \chi\psi^{-1} \text{ und } \psi\chi^{-1} = \psi^{-1}\chi;$$

die Seiten dieser beiden Gleichungen aber stellen zwei inverse Verwandtschaften φ und φ^{-1} dar, welche durch χ und ebenso durch ψ umgekehrt werden.

43. Zwei associirte Verwandtschaften sind nur dann vertauschbar, wenn sie harmonisch sind, wenn also aus der einen und der Umkehrung der anderen eine involutorische Verwandtschaft resultirt. Denn aus:

$$\begin{aligned} \chi^{-1}\psi &= \chi\psi^{-1} \text{ und } \psi\chi = \chi\psi \text{ oder } \chi^{-1}\psi = \psi\chi^{-1} \\ \text{folgt} \quad \psi\chi^{-1} &= \psi\chi^{-1} \text{ oder } (\chi\psi^{-1})^2 = 1. \end{aligned}$$

Diese involutorische Verwandtschaft ist mit χ und ψ vertauschbar, weil aus

$$\chi^{-1}\psi = \chi\psi^{-1} = \psi\chi^{-1} = \omega$$

sich ergibt:

$$\psi = \chi\omega = \omega\chi \text{ und } \chi = \psi\omega = \omega\psi.$$

Ist eine Verwandtschaft χ mit einer involutorischen Verwandtschaft ω vertauschbar, so ist sie mit $\psi = \chi\omega = \omega\chi$ harmonisch, associirt und vertauschbar; denn es ist:

$$(\psi\chi^{-1})^2 = \omega^2 = 1, \quad \psi^2 = \chi\omega^2\chi = \chi^2 \text{ und } \psi\chi = \chi\omega\chi = \chi\psi.$$

44. Zwei associirte Collineationen ψ , φ , deren zweite Potenzen $\psi^2 = \varphi^2$ eine nicht specielle Collineation darstellen, sind vertauschbar (23), weil sie beide mit φ^2 vertauschbar sind. Sie sind deshalb zugleich harmonisch (43), und die Collineation $\varphi\psi^{-1} = \omega$ ist involutorisch und mit φ und ψ vertauschbar. Mit einer nicht speciellen räumlichen Collineation φ aber sind höchstens und i. A. sieben involutorische Collineationen vertauschbar. Drei von ihnen sind geschaart, und ihre Involutionssachsen bilden die drei paar Gegenkanten des Haupttetraeders von φ ; die übrigen vier sind centrisc involutorisch und haben je einen Eckpunkt des Haupttetraeders zum Centrum und die gegenüberliegende Fläche zur Involutionsebene. Die Collineation φ ist demnach i. A. mit nur sieben anderen räumlichen Collineationen ψ associirt, welche aus φ und jenen sieben involutorischen Collineationen resultiren; sie kehrt, abgesehen von diesen involutorischen, keine Collineationen um.

Die allgemeine räumliche Collineation φ ist mit keiner Correlation χ associirt, kehrt also auch keine Correlation um. Denn wäre $\chi^2 = \varphi^2$, so würde die Collineation φ^2 oder χ^2 die beiden Kernflächen von χ und unendlich viele andere Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformiren (vgl. 26), also eine specielle Collineation sein.

Eine ebene Collineation ist i. A. mit nur drei anderen Collineationen associirt und kehrt i. A. weder Collineationen noch Correlationen um, ausgenommen drei mit ihr vertauschbare involutorische Collineationen. Eine Homographie ist i. A. mit nur einer anderen Homographie associirt und mit nur einer Involution vertauschbar. Der Beweis ist analog wie oben zu führen.

45. Wenn eine Collineation φ allgemeine Flächen zweiter Ordnung in sich selbst transformirt (vgl. 26), so ist sie mit unendlich vielen Correlationen χ associirt. Denn sie ist vertauschbar mit den unendlich vielen polaren Correlationen ω , welche je eine dieser Flächen zur Kernfläche haben; die Correlationen $\chi = \varphi \omega = \omega \varphi$ aber, welche aus φ und je einer der Correlationen ω resultiren, genügen der Gleichung $\chi^2 = \varphi^2$ und sind mit der Collineation φ associirt, vertauschbar und harmonisch (43). In diesem Falle hat also die Gleichung $\chi^2 = \varphi^2$ unendlich viele Lösungen; insbesondere hat sie ∞^1 Lösungen, wenn φ eine Hermite'sche, und ∞^3 Lösungen, wenn φ eine geschaarte Collineation ist (27, 28). Mit einer geschaarten Collineation sind übrigens auch die ∞^4 Collineationen associirt, welche aus ihr und den ∞^4 mit ihr vertauschbaren involutorischen Collineationen resultiren.

46. Eine halbgeschaarte Collineation φ_1 vertauscht die ∞^2 Strahlen einer linearen Congruenz paarweise mit einander (29). Sie kehrt deshalb (24) die ∞^3 geschaarten Collineationen um, deren Doppelpunktgeraden je eines dieser ∞^2 Strahlenpaare von φ_1 bilden. Zwei dieser geschaarten Collineationen sind vertauschbar, wenn sie die zwei paar Gegenkanten eines windschiefen Vierecks $ABA'B'$ zu Doppelpunktgeraden haben (24); zugleich mit ihnen wird dann ihre Resultirende durch φ_1 umgekehrt (12). Diese Resultirende transformirt die Regelschaaren aller durch die Viereckskanten gehenden Flächen zweiter Ordnung in sich selbst und ist eine Hermite'sche Collineation mit den vier Doppelpunkten A, B, A', B' . Die halbgeschaarte Collineation φ_1 kehrt demnach ∞^2 Hermite'sche Collineationen um, welche A, B, A' und B' zu Doppelpunkten haben; sie vertauscht nicht bloss die Gegenkanten sondern auch die Gegenpunkte des Vierecks $ABA'B'$ mit einander.

Nun kann aber jedes der beiden Punktpaare AA' und BB' mit ∞^1 anderen Punktpaaren von φ_1 vertauscht werden, die mit ihm in einer Geraden liegen und eine Involution bilden (29). Die halbgeschaarte Collineation φ_1 kehrt demnach ∞^4 Hermite'sche Collinea-

tionen φ um, deren Doppelpunkte sie paarweise mit einander vertauscht, und ist mit ∞^4 Collineationen $\psi = \varphi_1 \varphi$ associirt. Sie transformirt i. A. ∞^1 Flächen zweiter Ordnung in sich selbst (31), ist also mit ∞^1 polaren Correlationen χ' vertauschbar und folglich mit ∞^1 Correlationen $\chi = \varphi_1 \chi' = \chi' \varphi_1$ associirt, vertauschbar und harmonisch.

47. Eine räumliche Correlation χ vertauscht die beiden Diagonalen u, u' ihres Hauptvierseits mit einander (vgl. 6) und kehrt deshalb (24) die ∞^1 geschaarten Collineationen φ' um, welche diese Diagonalen zu Doppelpunktsgersten haben. Sie ist mit den ∞^1 Correlationen $\chi_1 = \chi \varphi'$ associirt, welche aus ihr und je einer dieser ∞^1 Collineationen resultiren und gleich ihr die Geraden u, u' mit einander vertauschen. Die ∞^1 Correlationen χ_1 und Collineationen φ' sind mit der Collineation χ^2 vertauschbar (42), nicht aber alle mit der Correlation χ (vgl. 16). Mit χ sind i. A. zwei polare und zwei Nullcorrelationen vertauschbar (32, 10). Die Correlation χ ist daher mit den vier Collineationen associirt, welche aus ihr und je einer dieser involutorischen Correlationen resultiren (42). Andere mit χ associirte Collineationen und andere durch χ umkehrbare Correlationen, als die vier, giebt es i. A. nicht.

48. Wenn eine specielle Correlation χ die Strahlen einer Regelschaar pqr paarweise mit einander vertauscht und deren Leitschaar abc beliebig in sich selbst transformirt, so kehrt sie ∞^2 geschaarte Collineationen φ' und ∞^2 specielle Correlationen χ' um, und ist folglich mit ∞^2 Correlationen $\chi \varphi'$ und Collineationen $\chi \chi'$ associirt. Sie kehrt nämlich zunächst die ∞^2 geschaarten Collineationen φ' um, welche je zwei durch χ vertauschbare Strahlen von pqr zu Axen haben (24). Diese ∞^2 Collineationen sind vertauschbar mit der polaren Correlation χ_1 , auf deren Kernfläche die Regelschaaren pqr und abc liegen. Weil aber χ_1 auch mit der Correlation χ vertauschbar ist und daher durch χ umgekehrt wird, so resultiren ∞^2 durch χ umkehrbare Correlationen $\chi' = \chi_1 \varphi'$ aus χ_1 und je einer der ∞^2 geschaarten Collineationen φ' (12). Diese Correlationen χ' haben alle Strahlen der Regelschaar abc und je zwei durch χ vertauschbare Strahlen der Schaar pqr zu Doppelstrahlen, sind also speciell. Ihre zweiten Potenzen und die von χ sind geschaarte Collineationen.

Unsere Untersuchung ist hiermit beendet; die Fragen nach den Homographien, Collineationen und Correlationen, welche mit einer gegebenen Homographie, Collineation oder Correlation vertauschbar sind, dieselbe umkehren oder durch sie umgekehrt werden, sind

erledigt. Ihre Beantwortung führte uns zu eingehenden Erörterungen über die Collineationen und Correlationen, die mit einer gegebenen harmonisch oder aber associirt sind. Hervorragende Bedeutung hatten in allen diesen Fragen und Erörterungen die involutorischen Verwandtschaften und überhaupt diejenigen, welche gewisse Elemente paarweise mit einander vertauschen.

Strassburg, den 21. Februar 1893.
