

Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II.

Von

A. SCHOENFLIES in Königsberg i./Pr.

Dem ersten Beitrag zur Theorie der Punktmengen*), der den Beweis eines speziellen Theorems enthielt, lasse ich *die allgemeine Theorie der ebenen perfekten Mengen* folgen. Sie kann als naturgemäße Weiterführung der Resultate betrachtet werden, die wir Herrn G. Cantor verdanken.

Das wichtigste und umfassendste Theorem der Cantorsche Theorie lautet bekanntlich: „daß jede abgeschlossene Punktmenge, die nicht abzählbar ist, durch allmähliche Abspaltung einzelner Punkte auf eine perfekte Menge reduziert werden kann“. Ist S die gegebene Menge, so ist

$$S = R + T,$$

wo R abzählbar und T perfekt ist. Man kann aber sofort die weitere Frage stellen, *welcher geometrische Bau den perfekten Mengen selber zukommt*. Hierüber ist bislang wenig gearbeitet worden. Nur die linearen, perfekten Mengen sind uns in ihrer inneren Struktur vollständig durchsichtig; für sie hat bereits Herr G. Cantor selbst die bezüglichen Resultate abgeleitet. Von dem geometrischen Charakter der ebenen oder räumlichen, perfekten Mengen wissen wir jedoch noch so gut wie gar nichts.

Diese Lücke soll der folgende Beitrag für die ebenen Mengen ausfüllen, er soll eine vollständige Analyse aller perfekten, ebenen Mengen liefern. Um eine geometrische Einsicht in den Bau dieser Mengen zu erzielen, wird es sich zunächst darum handeln, sie in gewisse einfache Bestandteile zu zerlegen. Man kann die Methode, die Herr Cantor für die Reduktion der abgeschlossenen Mengen benutzt hat, in der Weise auf die perfekten Mengen verallgemeinern, daß außer den einzelnen Punkten isolierte, zusammenhängende Bestandteile auftreten, die von der Gesamtmenge in analoger Weise abgespalten werden, wie die isolierten Punkte. Auch hier besteht das Hauptresultat in dem Nachweis einer Gleichung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} + \mathfrak{I},$$

*) Diese Annalen, Bd. 58, S. 195.

wo \mathfrak{S} die gegebene perfekte Menge ist, \mathfrak{R} eine stets abzählbare Menge isolierter, zusammenhängender Bestandteile und \mathfrak{T} eine dem angegebenen Reduktionsprozeß nicht mehr zugängliche Menge, deren Natur übrigens noch sehr mannigfach sein kann. Sie ist entweder eine *zusammenhängende* Menge oder aber eine solche *nicht* zusammenhängende Menge, die unbegrenzt in Teilmengen zerlegt werden kann, deren jede immer wieder eine unbegrenzte Teilbarkeit besitzt.

Der zweite Teil der Untersuchung hat sich mit den Eigenschaften der eben erwähnten einfachsten Bestandteile selber zu befassen. Wie ich bereits in meinem ersten Beitrag erwähnte, hängen diese Untersuchungen auf das Engste mit der Analysis situs zusammen; sie sollen *die geläufigen Begriffe und Sätze der Analysis situs mit den Mitteln der Mengentheorie prüfen und in voller Allgemeinheit begründen*. Die Notwendigkeit dieser Aufgabe wird kaum bestritten werden. Sie beruht darauf, daß die Analysis situs die Grundlage der gesamten Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie bildet. Freilich hat man kürzlich begonnen, den Kurvenbegriff im Interesse der Beweise zunächst enger zu fassen. Aber mag eine solche Beschränkung auch zunächst nützlich sein, so ist doch für jeden Satz seine *volle Tragweite* zu ermitteln und zu sichern.

Die naturgemäße Grundlage der vorliegenden Aufgabe kann meines Erachtens nichts anderes sein, als die Analysis situs der aus gewöhnlichen Polygonen zusammengesetzten Gebilde. Dem entsprechen auch die von Herrn Pringsheim*) eingeführten *Treppenwege*, die eine *monotone* Funktion approximieren sollen. Was hier für den einfachsten Fall geschehen ist, kann aber auf *jedes* geometrische Gebilde, — wie beschaffen es auch immer sei — ausgedehnt werden. Diese Tatsache bildet eines der wichtigsten Hilfsmittel der folgenden Untersuchungen.

In dem vorliegenden Beitrag betrachte ich insbesondere die Begriffe der *geschlossenen Kurve*, der *Gebietsgrenze* und *Gebietsteilung*, sowie ihr Verhältnis zu den sie bestimmenden oder durch sie bestimmten *abgeschlossenen* Mengen. Es ist mir nur eine Arbeit des Herrn Phragmén bekannt, die ein spezielles hierhergehöriges Theorem enthält.**)

Es ist zweckmäßig, die Untersuchung auf *alle* abgeschlossenen Mengen auszudehnen. Andererseits ist es naturgemäß, daß man nur abgeschlossene Mengen in Rücksicht zieht. Nur sie erfreuen sich einer Art Gesetzmäßigkeit. Eine nicht abgeschlossene Menge hat denselben Charakter, wie eine *willkürliche* Funktion, die man mit Bezug auf eine abgeschlossene Menge definieren kann, für die also wieder die abgeschlossene Menge das Operationsgebiet abgibt.

*) Berichte der Akad. d. Wiss. München, Bd. 25, S. 56 ff.

**) Acta math. 7, S. 43.

§ 1.

Definition und Hilfssätze.

Ich stelle zunächst die zur Anwendung kommenden Definitionen nebst einigen Hilfssätzen kurz zusammen. Diejenigen, die schon im ersten Beitrage enthalten sind, erfahren zugleich eine teilweise Ergänzung.

Ist \mathfrak{S} eine beliebige *abgeschlossene Menge* und bedeutet \mathfrak{E} die Menge *aller* Punkte einer Ebene*), so heißt die durch die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S} + \mathfrak{M}$$

definierte Menge \mathfrak{M} die *Komplementärmenge* von \mathfrak{S} .

Als *einfachen Weg* oder kurz als *Weg* bezeichne ich einen sich nirgends kreuzenden *Streckenzug*, der entweder nur aus einer endlichen Zahl von Strecken besteht, oder aber, falls er aus unendlich vielen Strecken besteht, nur *einen* oder höchstens *zwei* Grenzpunkte besitzen soll, nämlich den *Anfangspunkt* resp. den *Endpunkt*. Zwei derartige einander nirgends kreuzende Wege, die denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt besitzen, bilden ein *einfaches Polygon*. Für dieses Polygon gelten die bekannten Sätze der Teilung, Zerlegung und Zusammensetzung. Durch

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{I}(\mathfrak{P}), \mathfrak{A}(\mathfrak{P})$$

soll das *Polygon*, sein *Inneres* resp. sein *Äußeres* bezeichnet werden; es ist dann

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{I}(\mathfrak{P}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{P}).$$

Insbesondere erwähne ich noch den folgenden evidenten Satz:

1) Ist \mathfrak{M} die Komplementärmenge einer Menge \mathfrak{S} und sind \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 zwei einfache, zur Menge \mathfrak{M} gehörige Polygone, die einen Punkt gemein haben, so lassen sie sich an diesem Punkte so abändern, daß sie zusammen ein einziges einfaches Polygon bilden, das ebenfalls der Menge \mathfrak{M} angehört.

Unter einem *Weg*, der einen Punkt s der Menge \mathfrak{S} mit einem Punkt m von \mathfrak{M} verbindet, wird ein solcher verstanden, dessen Punkte, von s abgesehen, sämtlich zu \mathfrak{M} gehören, und der höchstens in s einen Grenzpunkt besitzt. Von diesen Wegen gelten folgende, leicht beweisbare Sätze:

2) Zwei Wege, die von einem Punkt m zu zwei verschiedenen Punkten s_1 und s_2 von \mathfrak{S} führen, lassen sich so legen, daß sie sich nicht kreuzen.

Sind nämlich l_1 und l_2 die beiden Wege und enthält z. B. l_2 unendlich viele Strecken, so kann l_1 nur eine endliche Zahl dieser Strecken kreuzen, da sonst der Grenzpunkt von l_2 auf l_1 liegen müßte. Dadurch ist der Satz auf Streckenzüge mit endlicher Seitenzahl zurückgeführt.

*) Die Ebene ist die Ebene der Funktionentheorie; dadurch wird erreicht, daß man jede gegebene Menge als im Endlichen liegend annehmen kann.

3) Zwei Wege l' und l'' , die denselben Punkt s von \mathfrak{S} mit zwei verschiedenen Punkten m' und m'' verbinden, lassen sich ebenfalls so legen, daß sie sich nicht kreuzen.

Kreuzen sie sich nämlich und ist m_1 der erste Kreuzungspunkt, so tauscht man die Teilwege, die von m' und m'' bis m_1 führen, gegen einander aus. Dies modifiziert die Wege l' und l'' so, daß sie in m_1 einen gemeinsamen Punkt haben, ohne sich aber in ihm zu kreuzen. Gemäß Satz 1) lassen sie sich deshalb durch Wege ersetzen, die in m_1 nicht mehr zusammentreffen. Ebenso kann man mit jedem weiteren Kreuzungspunkt verfahren; auch muß man zu jedem Kreuzungspunkt nach einer endlichen Zahl von Schritten gelangen. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt weiter:

4) Zwei Wege, die von demselben Punkt m zu demselben Punkt s führen, lassen sich so legen, daß sie sich nirgends kreuzen, mithin ein einfaches Polygon bestimmen.

Ich erwähne ferner die folgenden einleuchtenden Begriffsbestimmungen:

Ist $\varrho(p, s)$ der *Abstand* eines Punktes p von einem Punkt s einer abgeschlossenen Menge \mathfrak{S} , so ist $\varrho(p, s)$ eine in \mathfrak{S} *stetige* Funktion.*) Ihr Minimum heißt *Abstand des Punktes p von \mathfrak{S}* und soll durch $\varrho(p, \mathfrak{S})$ bezeichnet werden. Dieser Abstand ist eine in jedem endlichen Gebietsteil G *stetige* Funktion, er erreicht in G ein Maximum und es gibt mindestens einen in G gelegenen Punkt — der natürlich zur Menge \mathfrak{M} gehört — für den dies Maximum eintritt. Analog kann man den *Abstand* $\varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ zweier abgeschlossener Mengen definieren. Haben die Mengen \mathfrak{S} und \mathfrak{S}' keinen Punkt gemein, so ist $\varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ von Null verschieden; auch gibt es mindestens ein Punktpaar s, s' so daß $\varrho(s, s') = \varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ ist.

Aus der Stetigkeit von $\varrho(p, \mathfrak{S})$ folgt insbesondere, daß es für jede Schar von Parallelen eine *erste* und *letzte* gibt, die Punkte der Menge \mathfrak{S} enthalten oder von \mathfrak{S} einen gegebenen Abstand besitzen. Auf ihr beruht auch die Existenz des zu einem Punkt m gehörigen *punktfreien Bereiches*.

Dieser Bereich, dessen Entstehung ich in meinem ersten Beitrage genauer erörtert habe**), existiert für beliebige abgeschlossene Mengen ebenso, wie für perfekte; er ist ein Rechteck, dessen Inneres zu \mathfrak{M} gehört, während sein Umfang eine endliche oder unendliche, jedenfalls abgeschlossene Teilmenge von \mathfrak{S} enthält. Man kann m mit jedem auf dem Umfange des Bereichs liegenden Punkt von \mathfrak{S} durch einen zu \mathfrak{M} gehörigen Weg verbinden, er soll ein von m zu \mathfrak{S} führender Weg heißen. *Einen solchen gibt es also für jeden Punkt m .* Dagegen bemerke ich schon

*) Für die Übertragung des Stetigkeitsbegriffs auf beliebige abgeschlossene Mengen vergl. meinen Bericht S. 115 ff.

**) Diese Annalen, Bd. 58, S. 207. Vergl. auch meinen Bericht, S. 81.

jetzt, daß es nicht immer einen Weg gibt, der von einem Punkt m zu einem beliebigen Punkt von \mathfrak{S} führt.

Der eben definierte Bereich läßt folgende Verallgemeinerung zu. Wird $\varepsilon < \rho(m, \mathfrak{S})$ gewählt, so kann man um m einen rechteckigen Bereich von der Art konstruieren, daß auf jeder seiner Seiten mindestens ein Punkt liegt, der von \mathfrak{S} den Abstand ε hat. Man geht auch hier von einem den Punkt m umgebenden Quadrat aus, läßt es zunächst so lange wachsen, bis mindestens eine Seite einen Punkt der genannten Art enthält, und läßt alsdann die andern Seiten sich weiter von m entfernen, bis für sie der Reihe nach das gleiche zutrifft. Dabei ist zu beachten, daß, wenn der Bereich zugleich innerhalb eines gewissen Polygons \mathfrak{P} bleiben soll, das Wachstum einer Seite auch dadurch ein Ende finden kann, daß die Seite an das Polygon anstößt. Er möge dann der *im Innern von \mathfrak{P} liegende Bereich* heißen.

§ 2.

Ergänzende Betrachtungen über den Zusammenhangsbegriff.

In meinem ersten Beitrag habe ich den *Zusammenhang* für *perfekte Mengen* und ihre *Komplementärmengen* gesondert definiert. Ich gebe hierzu einige Ergänzungen; insbesondere ist noch zu zeigen, daß beide Definitionen im Einklang miteinander stehen.

Eine *perfekte Menge* wurde als *zusammenhängend* bezeichnet, wenn sie nicht in Teilmengen zerlegbar ist, deren jede *perfekt* ist. Die Definition könnte dahin abgeändert werden, daß die Teilmengen nicht beide *abgeschlossen* sein sollen, und kann in dieser Weise auch auf abgeschlossene Mengen ausgedehnt werden. Da jedoch für abgeschlossene Mengen, die nicht *perfekt* sind, der Zusammenhang nicht in Frage kommen kann, so genügt es die Definition auf *perfekte Mengen* zu beschränken.

Genau genommen, bedarf aber die Definition des Nachweises ihrer Berechtigung. Insbesondere soll ja der Zusammenhang einer beliebigen Menge als Verallgemeinerung desjenigen einfacheren Begriffs erscheinen, der sich auf Polygone bezieht und der hier die Grundlage bildet. Wir beweisen daher den folgenden Satz:

I. *Ist die perfekte Menge \mathfrak{Z} nicht zusammenhängend, so kann man sie in zwei perfekte Teilmengen zerlegen, von denen die eine innerhalb, die andere außerhalb eines einfachen Polygons mit endlicher Seitenzahl liegt.*

Da die Menge \mathfrak{Z} nicht zusammenhängend ist, so läßt sie sich auf eine oder mehrere Arten in *perfekte Teilmengen* zerlegen. Seien \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 zwei solche Mengen, daß

$$\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}$$

ist. Wir setzen noch

$$\varrho(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = \delta; \quad \varrho(m, \mathfrak{X}_1) = \varrho_1, \quad \varrho(m, \mathfrak{X}_2) = \varrho_2,$$

wo m ein beliebiger Punkt der Menge \mathfrak{M} ist, und umgeben die Menge \mathfrak{X} mit einem Quadrat q , so daß auch $\varrho(q, \mathfrak{X}) \geq \delta$ ist. Endlich sei q' ein innerhalb von q liegendes Quadrat, dessen Seiten von q den Abstand δ haben.

Nun seien t_1 und t_2 zwei solche Punkte von \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 , daß $\varrho(t_1, t_2) = \delta$ ist. Auf jeder Teilstrecke $t_1' \cdots t_2'$ von $t_1 \cdots t_2$ ist mit ϱ_1 und ϱ_2 auch der Quotient $\varrho_1 : \varrho_2$ eine stetige Funktion des Ortes; auf ihr gibt es daher mindestens einen Punkt von \mathfrak{M} , der von \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 den gleichen Abstand hat. Sei μ_0 ein solcher, so konstruiere man den zu ihm gehörigen punktfreien Bereich S_0 und zwar so, daß seine Seiten zu q parallel sind. Mögen zunächst weder S_0 noch die weiterhin zu konstruierenden Bereiche an q oder aneinander anstoßen, dann liegt keine ihrer Seiten außerhalb von q' .

Auf dem Umfang von S_0 gibt es nun mindestens je einen Punkt von \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 , und daher auch mindestens zwei Intervalle, von denen ein Endpunkt zu \mathfrak{X}_1 und einer zu \mathfrak{X}_2 gehört, während die inneren Punkte zu \mathfrak{M} gehören; sie seien $\sigma_1 = \tau_1 \cdots \tau_2$ und $\sigma_1' = \tau_1' \cdots \tau_2'^*$). Jedem von ihnen gehört wieder mindestens je ein Punkt an, für den $\varrho_1 = \varrho_2$ ist; diese Punkte seien μ_1 und μ_1' . Konstruiert man zu ihnen die zugehörigen punktfreien Bereiche S_1 und S_1' , die beide an S_0 angrenzen, so bilden sie mit S_0 ein Polygon \mathfrak{P}_1 , dessen Umfang wiederum Punkte von \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 enthält. Auf ihm gibt es daher wieder mindestens zwei Intervalle σ_2 und σ_2' , von denen ein Endpunkt zu \mathfrak{X}_1 und einer zu \mathfrak{X}_2 gehört, und auf jedem mindestens einen Punkt, für den $\varrho_1 = \varrho_2$ ist. Sind μ_2 und μ_2' zwei solche, so konstruiert man zu ihnen die Bereiche S_2 und S_2' , die mit \mathfrak{P}_1 ein Polygon \mathfrak{P}_2 bestimmen, für das die gleichen Schlüsse gelten usw.

Der Flächeninhalt aller so konstruierter Bereiche bleibt oberhalb einer angebbaren Größe. Schlägt man nämlich um einen Punkt μ_i mit dem Radius $\frac{1}{2}\delta$ einen Kreis, so gehört das Innere dieses Kreises zu \mathfrak{M} und liegt dem obigen gemäß auch innerhalb q' . Demnach macht der zu μ_i gehörige Bereich mindestens ein Viertel des in diesen Kreis eingeschriebenen Quadrats aus, und hat also mindestens den Inhalt $\frac{1}{8}\delta^2$. Daher muß unser Konstruktionsverfahren nach einer endlichen Zahl von Schritten zu Ende kommen. Dies ist auf zweierlei Weise möglich. Es kann der letzte Bereich S_i wie der letzte Bereich S_i' an q angrenzen; alsdann bilden alle Bereiche einen das Innere von q durchziehenden Polygonstreifen und jeder diesen Streifen durchziehende Weg l zerlegt q in zwei Teilpolygone, deren

*) Die Intervalle können einen Endpunkt gemein haben.

jedes eine Teilmenge von \mathfrak{Z} umschließt, die naturgemäß perfekt ist.*) Die Konstruktion kann aber auch dadurch zum Stillstand kommen, daß der letzte Bereich an einen bereits vorhandenen Bereich angrenzt. Als dann entsteht ein ringförmiger, polygonaler Bereich.***) Und man kann in ihm ein einfaches Polygon endlicher Seitenzahl so zeichnen, daß innerhalb und außerhalb von ihm eine naturgemäß perfekte Teilmenge von \mathfrak{Z} enthalten ist.

Die Komplementärmenge \mathfrak{M} einer abgeschlossenen Menge \mathfrak{S} wurde als *zusammenhängend* definiert, wenn sich je zwei Punkte von \mathfrak{M} durch einen zu \mathfrak{M} gehörigen einfachen Weg verbinden lassen. Um zu zeigen, daß sich diese Definition mit derjenigen für perfekte Mengen in Übereinstimmung befindet, beweise ich folgenden Satz:

Werden zu einer nicht abgeschlossenen, zusammenhängenden Menge die ihr fehlenden Grenzpunkte hinzugefügt, so entsteht eine perfekte, zusammenhängende Menge.

Die Menge \mathfrak{Z} , die aus \mathfrak{M} durch Hinzufügung der Grenzpunkte entsteht, ist naturgemäß abgeschlossen. Einen isolierten Punkt könnte sie nur enthalten, falls er schon zu \mathfrak{M} gehört hätte; dies ist ebenfalls ausgeschlossen und \mathfrak{Z} daher perfekt. Wäre nun \mathfrak{Z} nicht zusammenhängend und wären \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 irgend zwei perfekte Teilmengen von \mathfrak{Z} , so müßte jede von ihnen, wie leicht ersichtlich, auch Punkte von \mathfrak{M} enthalten. Nach Satz I gäbe es überdies ein einfaches Polygon, das nicht zu \mathfrak{Z} , also auch nicht zu \mathfrak{M} gehört, und \mathfrak{Z} in zwei getrennte Teilmengen zerlegte. Es gäbe daher Punkte von \mathfrak{M} , die nicht verbindbar wären, was aber ein Widerspruch ist. Aus diesem Satze kann die Übereinstimmung unserer beiden Definitionen gefolgert werden.

Endlich bemerke ich der Vollständigkeit halber noch folgendes. Ist m ein Punkt von \mathfrak{M} , so gibt es auch eine gewisse *Umgebung* von m , die ganz zu \mathfrak{M} gehört. Denn sonst müßte m ein Punkt von \mathfrak{S} sein. Mit Rücksicht hierauf soll \mathfrak{M} auch als *Gebiet* bezeichnet werden.

§ 3.

Die approximierenden Polygonfiguren.

Jede abgeschlossene Menge läßt sich in ein von Polygonen begrenztes Gebiet so einschließen, daß der Abstand der bezüglichen Polygone von ihr in gewissen, vorgeschriebenen Grenzen liegt. Diese Tatsache, die für jede beliebig geartete Menge gilt, wie die in sie eingehenden geometrischen Gebilde auch beschaffen sein mögen, bildet eines der hauptsächlichsten

*) Diese Mengen brauchen übrigens nicht mit \mathfrak{Z}_1 resp. \mathfrak{Z}_2 identisch zu sein.

**) Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich die Innenfläche dieses Bereiches auf Null reduziert, dies ändert jedoch die weiteren Schlüsse nicht.

Hilfsmittel der weiteren Schlüsse und bedarf daher einer ausführlichen Darlegung, wie einleuchtend sie auch scheinen mag. Doch soll es sich nur darum handeln, auf möglichst einfache Weise die Existenz solcher polygonalen Gebiete nachzuweisen.*)

Die Menge \mathfrak{S} denken wir uns wieder in dem Quadrat q enthalten. Nun sei \mathfrak{P} ein die Menge \mathfrak{S} einschließendes Polygon, dessen Seiten denen von q parallel laufen. Ferner werde ε so bestimmt, daß

$$\varrho(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}) = \delta, \quad \varepsilon < \frac{1}{2} \delta$$

ist, so ändern wir das Polygon \mathfrak{P} zunächst in folgender Weise ab. Ist p eine Seite von \mathfrak{P} , so verschieben wir sie, während das Polygon zusammenhängend bleibt, parallel mit sich in das Innere von \mathfrak{P} , bis entweder

$$(1) \quad \varrho(p, \mathfrak{S}) = \frac{1}{2} \varepsilon$$

ist, also auf ihr mindestens ein Punkt m liegt, für den dieselbe Gleichung besteht, oder aber, bis sie der Lage nach mit einer andern Polygonseite zusammenfällt. In dem letzteren Falle kann \mathfrak{P} dadurch in zwei getrennte Polygone zerfallen; alsdann hat jedes von ihnen weniger Seiten als \mathfrak{P} selbst. Zerfällt jedoch \mathfrak{P} bei diesem Verfahren nicht, so verliert es mindestens eine Ecke. Wendet man also dieses Verfahren der Reihe nach auf jede Seite von \mathfrak{P} an, so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einem oder mehreren Polygonen, bei denen *alle* Seiten mindestens einen Punkt enthalten, für den die Gleichung (1) gilt. Diese Polygone seien

$$P_1, P_2, \dots, P_i.$$

Ich bemerke, daß *jedes Polygon, das im Laufe des weiteren Verfahrens entsteht, ebenfalls sofort dem vorstehenden Prozeß unterworfen werden soll.*

Enthält das Polygon P_1 auf einer Seite p_1 einen Punkt m , für den

$$(2) \quad \varrho(m, \mathfrak{S}) \geq \varepsilon$$

ist, so konstruieren wir zu m den im Innern von P_1 liegenden in § 1 definierten Bereich S , dessen Seiten der Gleichung (1) genügen. Dabei ist zu beachten, daß die Seiten des Bereiches auch dadurch fest werden können, daß sie, noch ehe sie der Relation (1) genügen, an P_1 anstoßen. Dies setzen wir so lange fort, wie sich auf einem Polygon P_i resp. auf einem aus ihm entstehenden Polygon ein Punkt m dieser Art findet. Dann ist zu zeigen, daß dieser Prozeß nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Abschluß kommt. Dies geschieht wie folgt:

Man schlage um m mit $\frac{1}{4} \varepsilon$ als Radius einen Kreis und ziehe in ihm

*) Polygone dieser Art betrachtet auch Herr C. Jordan beim Beweis seines Kurvensatzes. Vgl. cours d'analyse, 2. Aufl. Bd. 1, S. 92.

die zu den Seiten von q parallelen Durchmesser. Sie zerlegen den Kreis in vier Quadranten. Liegt mindestens einer von ihnen ganz innerhalb P_1 , so ergibt sich für die Fläche von S die Relation

$$(3) \quad S > \frac{1}{32} \varepsilon^2.$$

Wird also der Bereich S von P_1 getilgt, so bestimmt er mit P_1 ein neues Polygon, dessen Fläche um mehr als $\frac{1}{32} \varepsilon^2$ kleiner ist, als die Fläche von P_1 . Das neue Polygon hat größere Seitenzahl als P_1 .

Liegt keiner der vier Kreisquadranten ganz innerhalb P_1 , so wird der sich um m dehnende Bereich an P_1 anstoßen, ehe noch für eine seiner Seiten die Relation (1) erfüllt ist. Alsdann zerlegt er P_1 in zwei Polygone. Die so definierten Polygone seien P_{11} und P_{12} , und S' sei der so erhaltene innerhalb P_1 liegende und sie trennende Bereich. Jedes dieser beiden Polygone wird im allgemeinen weniger Seiten haben, als P_1 selbst. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn das eine von ihnen — es sei P_{11} — ein Viereck ist; dann grenzt der Bereich S' so an zwei parallele Seiten p und p' von P_1 , daß zwischen ihnen nur noch *eine* weitere Polygonseite von P_1 liegt. Die Breite des zwischen ihnen liegenden Teils von P_1 ist dann gemäß der obigen, die neu entstehenden Polygone betreffenden Festsetzung mindestens gleich $\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{2}$. Ist nämlich $\varrho(p, p') \geq \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{2}$, so ist dies unmittelbar klar, und ist $\varrho(p, p') < \frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{2}$, so folgt es leicht daraus, daß ja der ganze um m mit $\frac{1}{2} \varepsilon$ geschlagene Kreis zu \mathfrak{M} gehört. Wenn nun das Polygon P_{12} auf p oder p' noch einen weiteren Punkt m besitzt, für den die Gleichung (2) gilt, so verfahren wir mit ihm ebenso. Auch hier ist die Breite des trennenden Teiles mindestens gleich $\frac{1}{2} \varepsilon \sqrt{2}$. Diese Möglichkeit kann daher nur in endlicher Zahl auftreten. Hiermit ist aber die obige Behauptung bewiesen. Denn wenn wir die Konstruktion der Bereiche so lange fortsetzen, wie es auf den Polygonen P_i oder auf denjenigen, die aus ihnen hervorgehen, Punkte m gibt, für die die Gleichung (2) gilt, so müssen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten entweder zu einer Reduktion des Inhaltes der gesamten Polygonflächen um mindestens $\frac{1}{32} \varepsilon^2$ oder aber zu Polygonen geringerer Seitenzahl gelangen. Unser Verfahren liefert daher schließlich eine endliche Reihe von Polygonen endlicher Seitenzahl

$$P_1', P_2', \dots P_{(*)}'$$

die die folgenden Eigenschaften besitzen. Auf jeder ihrer Seiten liegt mindestens ein Punkt m , der von \mathfrak{S} den Abstand $\frac{1}{2} \varepsilon$ besitzt, und keine Seite enthält einen Punkt m , dessen Abstand von \mathfrak{S} größer als ε ist.

Im Inneren eines dieser Polygone können aber sehr wohl Punkte m liegen, für die die Relation (2) gilt. Liegt im Inneren von P_1' ein solcher Punkt m , so kann der zu ihm gehörige Bereich S ganz innerhalb von P_1' liegen, er hat dann mindestens die Größe $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ und bestimmt mit P_1' ein ringförmiges Gebiet, dessen Fläche mindestens um $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ kleiner ist, als die Fläche von P_1' . Liegt S nicht ganz innerhalb von P_1' , so lassen wir das um m sich dehnende Quadrat resp. den sich bildenden Bereich zunächst wieder nur so lange wachsen, bis er an eine Seite p_1' von P_1' anstößt, und fassen nur den innerhalb von P_1' sich weiter dehnenden Teil des Bereiches ins Auge. Er sei S_1 ; alsdann ist wieder zu unterscheiden, ob er schließlich an noch andere Seiten von P_1' anstößt oder nicht. Es greifen dann die gleichen Schlüsse Platz, wie oben. Im zweiten Fall gilt für S_1 die Relation (3); im ersten Fall kann P_1' in zwei Polygone zerfallen, deren jedes geringere Seitenzahl hat, wie P_1' selbst, oder aber, wenn das eine dieser beiden Polygone die gleiche Seitenzahl hat, wie P_1' selbst, so kann es wieder nur eine endliche Zahl von Punkten m geben, für die dies eintritt. Nach einer endlichen Zahl von Schritten muß man also zu einem Punkt m gelangen, dessen Bereich S entweder größer ist als $\frac{1}{32}\varepsilon^2$, oder der aus P_1' zwei Polygone hervorgehen läßt, deren jedes geringere Seitenzahl hat, wie P_1' selbst.

Wir prüfen nun jedes der neu entstandenen Polygone oder Ringgebiete wiederum darauf, ob auf ihm oder in seinem Inneren Punkte liegen, für die die Relation (2) gilt. Ist m ein solcher, so bleiben auch für ihn die obigen Überlegungen in Kraft. Entweder gehört zu ihm ein Bereich, der eine Reduktion der gesamten Fläche um mehr als $\frac{1}{32}\varepsilon^2$ bewirkt oder wir gelangen nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einem Bereich, der ein Polygon in zwei Polygone geringerer Seitenzahl, oder aber ein Ringgebiet in ein Polygon zerlegt, das allerdings eine höhere Seitenzahl besitzen wird, wie das äußere Randpolygon. Aber da *jedesmal*, wenn ein Ringgebiet entsteht, die gesamte Polygonfläche sich um mindestens $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ vermindert, so folgt auch hier die Endlichkeit unseres Prozesses. Es entsteht also schließlich ein wohl definiertes Gebiet, das von einem oder mehreren Polygonen endlicher Seitenzahl begrenzt ist und die Eigenschaft besitzt, daß die Menge \mathfrak{S} sowie alle Punkte, deren Abstand von \mathfrak{S} *kleiner* als $\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, *innerhalb* dieses Gebietes liegen, während alle Punkte, deren Abstand von \mathfrak{S} *größer* als ε ist, *außerhalb* dieses Gebietes liegen. Also folgt:

II. Für jede abgeschlossene Menge \mathfrak{S} läßt sich eine sie einschließende polygonale Figur Π endlicher Seitenzahl konstruieren, so daß bei vorgegebenem ε die Menge \mathfrak{S} , sowie alle Punkte von \mathfrak{M} , deren Abstand von \mathfrak{S} kleiner als

$\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, dem Inneren von Π und alle Punkte von \mathfrak{M} , für die dieser Abstand größer als ε ist, dem Äußeren von Π angehören.

Von der so definierten, polygonalen Figur sage ich, daß sie die Menge \mathfrak{S} im Abstand ε approximiert. Das aus ihrem Innern bestehende Gebiet, dessen Zusammenhang sehr mannigfach sein kann, soll Γ heißen. Die einzelnen das Gebiet Γ begrenzenden Polygone nenne ich *Randpolygone*. Unter ihnen gibt es jedenfalls eine endliche Zahl solcher, die nicht innerhalb eines andern Randpolygons liegen. Sie sollen als *äußere Randpolygone* bezeichnet werden.

Aus dem obigen Satze ziehen wir noch eine wichtige Folgerung: Sei T eine zusammenhängende Teilmenge einer beliebigen abgeschlossenen Menge \mathfrak{S} und sei

$$\mathfrak{S} = T + \mathfrak{S}_1; \quad \varrho(T, \mathfrak{S}_1) = \delta;$$

wählt man dann $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$, so folgt, daß jeder Punkt von \mathfrak{S}_1 außerhalb des zu T gehörigen Π liegt. Wir nennen daher T einen *isolierten*, zusammenhängenden Bestandteil von \mathfrak{S} und es folgt:

III. Ist T ein isolierter zusammenhängender Bestandteil der abgeschlossenen Menge \mathfrak{S} , so kann man eine ihn einschließende approximierende Polygonfigur Π endlicher Seitenzahl zeichnen, so daß alle nicht zu T gehörigen Punkte von \mathfrak{S} außerhalb des von Π begrenzten Gebietes liegen.

Übrigens bemerke ich, daß die Breite des Gebietes Γ , d. h. der Abstand irgend zweier Randpolygone dieses Gebietes keineswegs unterhalb von ε oder einer sonstigen angebbaren Grenze zu liegen braucht. Das gleiche gilt für den Abstand irgend eines Punktes der Menge \mathfrak{S} von Π . Auf ein Beispiel dieser Art komme ich am Schluß von § 5 zurück.

Auf einen weiteren wichtigen Satz führt folgende Betrachtung:

Man denke sich unendlich viele isolierte Mengen:

$$T_1, T_2, \dots T_v, \dots,$$

deren jede *zusammenhängend* und *nirgends dicht* ist. Ist nun t irgend ein Punkt von T , so hat jede Punktmenge

$$\{t_v\} = t_1, t_2, \dots t_v, \dots$$

mindestens einen Grenzpunkt t_ω , der, wie unmittelbar ersichtlich ist, keiner Menge T_v angehören kann. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet die Menge T_ω , die wir als *Grenzmenge* der Mengen T_v bezeichnen. Von ihr gilt der folgende Satz:

IV. Sind $T_1, T_2, T_3 \dots$ unendlich viele isolierte Mengen, deren jede *zusammenhängend* und *nirgends dicht* ist, so ist auch ihre Grenzmenge, falls sie nicht etwa aus einem einzigen Punkt besteht, *zusammenhängend* und *nirgends dicht*.

Aus der Definition der Menge T_ω folgt nämlich unmittelbar, daß sie abgeschlossen und nirgends dicht ist. Wenn nun T_ω in getrennte Teilmengen T' und T'' zerfiele, so ließe sich jede von beiden durch eine approximierende Figur Π' und Π'' so einschließen, daß die von ihnen begrenzten Gebiete Γ' und Γ'' *außerhalb* voneinander liegen; falls nämlich $\varrho(T', T'') = \delta$ ist, so genügt es Π' und Π'' so zu wählen, daß sie T' und T'' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \delta$ approximieren. Ist nun t' ein solcher Punkt von T' , der Grenzpunkt von

$$\{t'_\nu\} = t'_1, t'_2, \dots t'_\nu, \dots$$

ist und analog t'' ein Punkt von T'' , der Grenzpunkt von

$$\{t''_\nu\} = t''_1, t''_2, \dots t''_\nu, \dots$$

ist, so gibt es einen Index μ' , so daß alle Punkte $t_{\mu'+\varrho}$ zu Γ' gehören und einen Index μ'' , so daß alle Punkte $t_{\mu''+\varrho}$ zu Γ'' gehören. Sei μ die größere beider Zahlen, so folgt, daß von den *zusammenhängenden* Mengen

$$T_\mu, T_{\mu+1}, \dots T_{\mu+\varrho}, \dots$$

je ein Punkt *innerhalb* Π' und Π'' liegt; es gibt also auch Punkte dieser Mengen *außerhalb* Π' und Π'' . Wählt man nun aus jeder Menge $T_{\mu+\varrho}$ je einen solchen Punkt aus, so liegt auch ihr Grenzpunkt nicht innerhalb Π' oder Π'' , während er andererseits zu T_ω gehört. Dies ist aber ein Widerspruch und daraus ist zu folgern, daß T_ω nicht in getrennte Bestandteile zerfallen kann. Falls also die Menge T_ω nicht etwa aus einem einzelnen Punkt besteht, muß sie zusammenhängend sein.

Einige Beispiele mögen folgen: Zieht man innerhalb eines Winkels parallele, von den Schenkeln begrenzte Strecken, die sich gegen den Scheitel verdichten, so besteht T_ω aus dem Scheitelpunkt. Nimmt man statt des Winkels ein Rechteck und läßt die Strecken sich gegen eine seiner Seiten verdichten, so wird T_ω aus einer Strecke bestehen. Man kann also auch Mengen konstruieren, bei denen T_ω eine endliche Zahl von Punkten und Strecken enthält. Nimmt man auf einer Geraden beliebige gegen einen Punkt sich verdichtende Intervalle δ_i an, errichtet in ihren Endpunkten die Lote und setzt in jeden, über einem Intervall δ_i stehenden von zwei Loten begrenzten Streifen unendlich viele parallele Strecken, die sich gegen einen inneren Punkt von δ_i als einzigen Grenzpunkt verdichten, so hat man eine Menge, bei der T_ω aus unendlich vielen Punkten besteht. Man kann dies auch so abändern, daß die über δ_i stehenden parallelen Strecken die beiden Endpunkte von δ_i als Grenzpunkte haben. Wenn man nun die Intervalle δ_i auf der Geraden so anordnet, daß sie eine perfekte Menge bestimmen, so wird T_ω eine nirgends dichte perfekte lineare Menge sein. Analog läßt sich eine Menge konstruieren, für die T_ω eine abgeschlossene, lineare Menge allgemeinsten Art ist und es ist klar, daß man statt der

Geraden auch ein beliebiges Kurvenstück als Träger von T_ω verwenden kann. Eine Menge T_ω von noch allgemeinerer Struktur werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

§ 4.

Die Verallgemeinerung des Cantorschen Haupttheorems.

Wir betrachten zunächst eine abgeschlossene Menge \mathfrak{Z} , die keinerlei isolierte Bestandteile enthält, weder Punkte noch zusammenhängende Mengen, und demnach *perfekt* ist. Wir nehmen überdies an, sie sei auch selber *nicht* zusammenhängend, und lasse sich deshalb in zwei Teilmengen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 zerlegen. Keine von ihnen kann zusammenhängend sein, denn sonst enthielte ja \mathfrak{Z} einen isolierten, zusammenhängenden Bestandteil. Es läßt sich deshalb auch jede der beiden Mengen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 in zwei Bestandteile zerlegen, deren keiner zusammenhängend ist. Diese Bestandteile seien $\mathfrak{Z}_{11}, \mathfrak{Z}_{12}, \mathfrak{Z}_{21}, \mathfrak{Z}_{22}$. Von ihnen gilt das gleiche, wir gelangen also hier zu einem Zerlegungsprozeß, der niemals aufhören kann. Dies gilt auch bezüglich jeder der Teilmengen $\mathfrak{Z}_i, \mathfrak{Z}_{ik}, \dots$ also folgt:

V. *Wenn eine ebene perfekte Menge nicht zusammenhängend ist und auch keine isolierten, zusammenhängenden Bestandteile enthält, so läßt sie sich auf vielfache Art in beliebig viele perfekte Mengen zerlegen, die immer wieder die gleiche Struktur besitzen, wie sie selbst.*

Ein einfaches Beispiel einer solchen Menge bilden die Lote, die man auf einer Geraden in den Endpunkten einer nirgends dichten, perfekten Menge errichtet.

Übrigens schließt der obige Satz nicht aus, daß die Menge \mathfrak{Z} geschlossene Kurven enthält. Ein einfaches Beispiel erhält man folgendermaßen: Auf dem Radius eines Kreises k verteile man Intervalle so, daß sie eine perfekte, nirgends dichte Menge bestimmen, und lege durch die Endpunkte jedes Intervalles Kreisbögen, die mit dem Kreis k konzentrisch sind und deren Länge bei der Annäherung an die Peripherie von k gegen den ganzen Kreisbogen konvergiert, bei der Annäherung gegen den Mittelpunkt aber gegen Null. Das gleiche kann man auch auf der Verlängerung des Radius außerhalb von k vornehmen. Man kann sogar auch Mengen dieser Art konstruieren, bei denen die in ihnen vorhandenen, geschlossenen Kurven in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Man kann von mehreren oder auch unendlich vielen Kreisen ausgehen, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen, und in ihnen die gleichen Konstruktionen vornehmen. Oder aber man kann die vorige Verteilung für eine unbegrenzte Reihe konzentrischer Kreise wiederholen und dann die Figur gegen einen oder beliebig viele dieser Kreise spiegeln. Wir kommen bei der Unter-

suchung der durch eine abgeschlossene Menge bewirkten Gebietsteilung hierauf noch einmal zurück. (§ 7.)

Sei nunmehr \mathfrak{S} eine abgeschlossene ebene Menge, die isolierte Bestandteile enthält. Enthält sie auch isolierte Punkte, so sei J die von ihnen gebildete Menge. Enthält sie isolierte, zusammenhängende Bestandteile, so seien dies

$$T, T', T'', \dots T^{(\nu)} \dots,$$

die zusammen die Menge $\mathfrak{Z} = \{T^{(\nu)}\}$ ausmachen; dann setzen wir

$$\mathfrak{S} = J + \mathfrak{Z} + \mathfrak{S}_1 = J + \sum \mathfrak{Z}^{(\nu)} + \mathfrak{S}_1.$$

Die Menge \mathfrak{S}_1 wird nur existieren, wenn es unendlich viele isolierte Punkte oder Mengen $T^{(\nu)}$ gibt, dann aber auch notwendig; sie enthält jedenfalls den Grenzpunkt von J resp. die Grenzmenge $T^{(\omega)}$ aller Mengen $T^{(\nu)}$ als Bestandteil. Sie braucht aber nicht ausschließlich aus der Menge $T^{(\omega)}$ zu bestehen, vielmehr wird sie im allgemeinsten Fall den Typus einer beliebigen abgeschlossenen Menge besitzen. Daß sie abgeschlossen ist, folgt unmittelbar aus ihrer Definition; daß sie auch einzelne Punkte enthalten kann, lassen die oben in § 3 angeführten Beispiele erkennen. In diesen Beispielen ist übrigens \mathfrak{S}_1 mit $T^{(\omega)}$ identisch. Fügt man jedoch bei diesen Beispielen der Menge \mathfrak{S} die Gerade, auf der die Intervalle δ_i liegen, ganz oder teilweise hinzu, so hat man Mengen \mathfrak{S} , bei denen \mathfrak{S}_1 nicht mit $T^{(\omega)}$ identisch ist. Endlich ist zu bemerken, daß wenn $T^{(\omega)}$ zusammenhängend ist, oder einen zusammenhängenden isolierten Bestandteil besitzt, es in \mathfrak{S}_1 keinen isolierten Bestandteil zu geben braucht, dem $T^{(\omega)}$ angehört. Ein solches Beispiel erhält man, wenn man für \mathfrak{S}_1 die Lote wählt, die man in den Punkten einer nirgends dichten linearen Menge errichtet, und für $T^{(\nu)}$ Strecken, die sich gegen eines dieser Lote verdichten.

Man unterwirft jetzt die Menge \mathfrak{S}_1 der gleichen Behandlung, die wir eben auf \mathfrak{S} angewendet haben. Besitzt sie einen isolierten Punkt oder einen isolierten, zusammenhängenden Bestandteil, so spaltet man alle diese Bestandteile von ihr ab und erhält eine Gleichung

$$(2) \quad \mathfrak{S}_1 = J_1 + \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}_2 = J_1 + \sum \mathfrak{Z}_1^{(\nu)} + \mathfrak{S}_2,$$

wo \mathfrak{S}_2 nur existiert, falls die Punkte von J_1 resp. die Mengen von \mathfrak{Z}_1 in unendlicher Anzahl vorhanden sind, dann aber auch notwendig. Auch \mathfrak{S}_2 ist eine abgeschlossene Menge, auch sie kann wieder isolierte Punkte oder isolierte zusammenhängende Bestandteile besitzen. Dann zerlegt man sie ebenso und kann diesen Prozeß immer weiter fortsetzen; für jedes \mathfrak{S}_μ findet sich eine Gleichung

$$(3) \quad \mathfrak{S}_\mu = J_\mu + \mathfrak{Z}_\mu + \mathfrak{S}_{\mu+1} = J_\mu + \sum T_\mu^{(\nu)} + \mathfrak{S}_{\mu+1}.$$

Mengen dieser Art erhält man, wenn man in den oben erwähnten Bei-

spielen jede isolierte Strecke durch unendlich viele ersetzt, die sich gegen sie verdichten, und dies wiederholt ausführt.

Der vorstehende Abspaltungsprozeß kann bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden. Naturgemäß kommt dies nur dann in Frage, wenn für jedes μ die Menge \mathfrak{Z}_μ unendlich viele Bestandteile enthält. Es gibt aber eine bestimmte transfinite Ordnungszahl, für die er sein Ende erreicht. Diese Tatsache bildet das genaue Analogon des Cantorschen Haupttheorems, das sie als speziellen Fall unter sich enthält, und kann folgendermaßen bewiesen werden.

Aus den Mengen

$$\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \dots \mathfrak{Z}_\mu$$

denke man sich je einen Bestandteil beliebig herausgegriffen und bezeichne ihn durch

$$T, T_1, T_2, \dots T_\mu.$$

Wie wir oben sahen, gehört kein Punkt der Menge \mathfrak{S}_1 einer der Mengen $T^{(\nu)}$ an. Die beiden Mengen T und \mathfrak{S}_1 haben daher einen von Null verschiedenen Abstand und wir setzen $\varrho(T, \mathfrak{S}_1) = \delta$. Da $T_1, T_2, \dots T_\mu$ sämtlich Bestandteile von \mathfrak{S}_1 sind, so ist dann auch für jedes $\lambda \geq 1$

$$(4) \quad \varrho(T, T_\lambda) \geq \delta.$$

Ebenso folgt, daß kein Punkt von T_1 der Menge \mathfrak{S}_2 angehört: wird $\varrho(T_1, \mathfrak{S}_2) = \delta_1$ gesetzt, so ist für $\lambda \geq 2$

$$(5) \quad \varrho(T_1, T_\lambda) \geq \delta_1.$$

So kann man fortfahren; setzt man $\varrho(T_{\mu-1}, \mathfrak{S}_\mu) = \delta_\mu$, so ist auch

$$(6) \quad \varrho(T_{\mu-1}, T_\mu) \geq \delta_\mu;$$

man hat also auch

$$(7) \quad \varrho(T, T_\mu) \geq \delta, \quad \varrho(T_1, T_\mu) \geq \delta_1, \quad \dots \varrho(T_{\mu-1}, T_\mu) \geq \delta_\mu.$$

Nun sei δ' die kleinere der beiden Größen δ und δ_1 , ebenso δ'' die kleinste der drei Größen $\delta, \delta_1, \delta_2$ und schließlich $\delta^{(\mu)}$ die kleinste sämtlicher $\delta, \delta_1, \dots \delta_\mu$. Bestimmt man dann $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_\mu$ so, daß

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \delta, \quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2} \delta', \quad \dots \varepsilon_\mu < \frac{1}{2} \delta^{(\mu)}$$

ist und schließt jede Menge T_λ mit der sie im Abstand ε_λ approximierenden Figur Π_λ ein, so folgt aus der Definitionseigenschaft dieser Figuren, daß je zwei der von den Π_λ eingeschlossenen Gebiete

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_\mu, \dots$$

außerhalb voneinander liegen.

Diese Eigenschaft läßt sich von μ auf $\mu + 1$ unmittelbar übertragen. Ist nämlich wieder $T_{\mu+1}$ irgend eine Menge von $\mathfrak{S}_{\mu+1}$ und ist

$$\varrho(T_\mu, \mathfrak{S}_{\mu+1}) = \delta_{\mu+1},$$

so ist sicher auch

$$\varrho(T_\mu, T_{\mu+1}) \geq \delta_{\mu+1}$$

man hat also auch

$$\varrho(T, T_{\mu+1}) \geq \delta, \quad \varrho(T_1, T_{\mu+1}) \geq \delta_1, \quad \dots \quad \varrho(T_\mu, T_{\mu+1}) \geq \delta_{\mu+1},$$

und wenn man mit $\delta^{(\mu+1)}$ die *kleinste* aller Größen $\delta, \delta_1, \dots, \delta_{\mu+1}$ bezeichnet und $\varepsilon_{\mu+1} < \frac{1}{2} \delta^{(\mu+1)}$ wählt, so wird die Figur $\Pi_{\mu+1}$, die $T_{\mu+1}$ im Abstand $\varepsilon_{\mu+1}$ approximiert, die Eigenschaft haben, daß ihr Inneres außerhalb aller der Gebiete $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_\mu$ liegt.

Diese Eigenschaft läßt sich aber auch von $\{\mu\}$ auf ω übertragen.*) Wenn nämlich auch die Menge \mathfrak{T}_ω unendlich viele isolierte zusammenhängende Bestandteile enthält, so hat man die Gleichung

$$(8) \quad \mathfrak{S}_\omega = \mathfrak{Z}_\omega + \sum T_\omega^{(\nu)} + \mathfrak{S}_{\omega+1} = \mathfrak{Z}_\omega + \mathfrak{T}_\omega + \mathfrak{S}_{\omega+1}.$$

Ist nun T_ω die Grenzmenge aller Mengen

$$T, T_1, T_2, \dots, T_\mu, \dots$$

so wird T_ω nur zu *einem* Summanden von \mathfrak{T}_ω gehören. Sei T'_ω ein solcher Bestandteil von $\mathfrak{T}_\omega = \sum T_\omega^{(\nu)}$, dem kein Punkt von T_ω angehört, und sei

$$\varrho(T_\omega, T'_\omega) = \delta_0.$$

Da T'_ω auch Bestandteil der Menge \mathfrak{S}_1 ist, so gilt die Gleichung (4) auch, wenn wir T_λ durch T'_ω ersetzen; das gleiche gilt für die Gleichung (5) usw. Es hat also T'_ω von jedem T_ν einen von Null verschiedenen Abstand.

Seien die Abstände

$$(9) \quad \varrho(T, T'_\omega) = \delta', \quad \varrho(T_1, T'_\omega) = \delta'_1, \quad \dots \quad \varrho(T_\mu, T'_\omega) = \delta'_\mu, \quad \dots$$

so kann die untere Grenze aller δ'_μ nicht Null sein. Wählt man nämlich in den Mengen T_μ Punkte

$$t, t_1, t_2, \dots, t_\mu, \dots$$

so, daß für sie

$$\varrho(t, T'_\omega) = \delta', \quad \varrho(t_1, T'_\omega) = \delta'_1, \quad \dots \quad \varrho(t_\mu, T'_\omega) = \delta'_\mu, \quad \dots$$

ist, so müßte sonst der Abstand ihres Häufungspunktes t_ω von T'_ω kleiner als jede beliebige Größe sein, der Punkt t_ω müßte also T'_ω angehören. Dies ist aber ausgeschlossen, da t_ω zu T_ω gehört.

Sei nun δ'_0 die untere Grenze aller δ'_μ , so kann man, wenn man jetzt die obigen Größen ε_μ noch der Beschränkung unterwirft sämtlich kleiner als $\frac{1}{2} \delta'_0$ zu sein, um T'_ω eine approximierende Figur Π'_ω im Abstand $\varepsilon'_0 < \frac{1}{2} \delta'_0$, so zeichnen, daß alle Gebiete

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\mu, \dots, \Gamma_\omega$$

außerhalb voneinander liegen. Der Schluß, daß man jede neue Figur Π so zeichnen kann, daß das zugehörige Gebiet Γ außerhalb aller bereits

*) Vgl. hierzu meinen Bericht, S. 45 ff.

vorhandenen Gebiete liegt, gilt also nicht allein beim Fortgang von μ zu $\mu + 1$, sondern auch beim Fortgang von $\{\mu\}$ zu ω . Er ist daher auf jede transfinite Zahl ausdehnbar*). Da nun aber gemäß einem Cantorschen Satz die Zahl der voneinander verschiedenen und außerhalb voneinander liegenden Gebietsteile endlich oder abzählbar ist, so muß unser Verfahren nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten sein Ende erreichen. Damit ist die Behauptung erwiesen, also folgt:

VI. *Jede abgeschlossene Menge läßt sich durch wiederholte Abspaltung isolierter Punkte oder isolierter, zusammenhängender Mengen so reduzieren, daß zuletzt eine perfekte Menge übrig bleibt, die keine isolierten Bestandteile mehr enthält, und zwar gibt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, für die dieser Reduktionsprozeß sein Ende erreicht.*

Man hat also die Gleichung

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=0,1,2,\dots,\omega,\dots} J_{\nu} + \sum_{\nu=0,1,2,\dots,\omega,\dots} \mathfrak{I}_{\nu} + \mathfrak{I}_{\alpha},$$

wofür ich im Anschluß an die Cantorsche Schreibweise noch setze

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} + \mathfrak{I}_{\alpha},$$

wo \mathfrak{R} abzählbar ist und \mathfrak{I}_{α} keine isolierten Bestandteile mehr enthält; die Menge \mathfrak{I}_{α} ist daher entweder zusammenhängend oder sie hat den im Satze V ausgesprochenen Typus. Auch hier ist klar, daß die Menge \mathfrak{I}_{α} nicht bloß aus Grenzpunkten solcher Punkte zu bestehen braucht, die der Menge \mathfrak{R} angehören.

Übrigens liefert die obige Darlegung auch einen neuen einfachen Beweis des Cantorschen Theorems selbst.

§ 5.

Die geschlossene Kurve.

Die weitere Analyse der Struktur und der Eigenschaften der perfekten Mengen beruht auf einigen Begriffen und Sätzen, die ich im folgenden zusammenstelle.

Ist s ein Punkt einer nirgends dichten abgeschlossenen Menge \mathfrak{S} , so liegen in jeder Nähe von s Punkte der Komplementärmenge \mathfrak{M} . Der Punkt s heißt daher ein *Grenzpunkt* des Gebietes \mathfrak{M} . Umgekehrt besteht aber auch der Satz:

Die gesamte Grenze eines Gebietes \mathfrak{M} ist eine abgeschlossene nirgends dichte Menge \mathfrak{S} .

In der Tat folgt aus der Definition der Grenzpunkte sofort, daß die Menge \mathfrak{S} nirgends dicht und abgeschlossen ist. Man bezeichnet \mathfrak{S} in

*) Vergl. Cantor: Diese Annalen Bd. 21 S. 576, sowie meinen Bericht über Mengenlehre, S. 45 ff.

dieser Hinsicht als *Gebietsgrenze* und nennt die Punkte von \mathfrak{M} selbst *innere* Punkte des Gebietes \mathfrak{M} . Übrigens erfordert der Satz und die Definition nicht, daß \mathfrak{M} ein zusammenhängendes Gebiet ist.

Nehmen wir nun insbesondere an, daß \mathfrak{M} ein zusammenhängendes Gebiet ist, so besteht der Satz:

Ist \mathfrak{M} ein zusammenhängendes Gebiet, ist \mathfrak{S} seine volle Grenze und besteht die Gleichung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M} + \mathfrak{S} + \mathfrak{M}_1,$$

so bleibt das Gebiet \mathfrak{M} zusammenhängend, wenn man ihm diejenigen Punkte von \mathfrak{S} hinzufügt, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{M} , aber nicht von \mathfrak{M}_1 sind.

Seien \mathfrak{S}' diejenigen Punkte von \mathfrak{S} , die Grenzpunkte nur von \mathfrak{M} und nicht von \mathfrak{M}_1 sind, so ist zu zeigen, daß

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + \mathfrak{S}'$$

eine zusammenhängende Menge ist. Dazu betrachte man einen Punkt s' von \mathfrak{S}' , so gibt es um s' einen Kreis, der ganz dem Gebiet \mathfrak{M}' angehört; es sind also je zwei Punkte dieses Kreises miteinander verbindbar. Andererseits liegen im Inneren dieses Kreises Punkte von \mathfrak{M} , und da diese mit einem beliebigen Punkte m von \mathfrak{M} verbindbar sind, so folgt dies auch für den Punkt s' . Dies gilt für jeden Punkt s' von \mathfrak{S}' , also ist \mathfrak{M}' eine zusammenhängende Menge.

Wir beweisen nunmehr den nachstehenden, für die weiteren Schlüsse grundlegenden Satz:

VII. *Zerfällt das Innere eines Polygons in zwei getrennte Gebiete \mathfrak{J} und \mathfrak{A} , deren jedes zusammenhängend ist, so gibt es Punkte, die sowohl zur Grenze von \mathfrak{A} , wie zur Grenze von \mathfrak{J} gehören, und diese bilden eine nirgends dichte perfekte zusammenhängende Menge T .*

Zunächst zeigen wir die Existenz der Menge T . Sei \mathfrak{P} das Polygon, sei ferner \mathfrak{S}_a die volle Grenze von \mathfrak{A} und \mathfrak{S}_j die volle Grenze von \mathfrak{J} . Wenn nun \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_j keine gemeinsamen Punkte hätten, so sei

$$\rho(\mathfrak{S}_a, \mathfrak{P}) = \delta_a, \quad \rho(\mathfrak{S}_j, \mathfrak{P}) = \delta_j, \quad \rho(\mathfrak{S}_a, \mathfrak{S}_j) = \delta,$$

und sei δ_0 die kleinste der drei Größen δ , δ_j , δ_a . Konstruiert man dann im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \delta_0$ die zu \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_j gehörigen Polygonfiguren Π_a und Π_j , so liegen sie innerhalb \mathfrak{P} und es müßte unter allen ihnen angehörigen Randpolygonen mindestens je eines geben, so daß zwei Punkte dieser Polygone durch einen Weg l verbindbar sind, der nur zu \mathfrak{J} resp. \mathfrak{A} gehört. Seien P_j und P_a diese Polygone. Von einem Punkt m_j von P_j gäbe es alsdann einen Weg zu \mathfrak{S}_j und von einem Punkt m_a von P_a einen Weg zu \mathfrak{S}_a , und diese Wege bilden mit l zusammen einen Weg, der Punkte von \mathfrak{J} und \mathfrak{A} enthalten würde, was unmöglich ist. Damit ist die Existenz der Menge T nachgewiesen.

Aus ihrer Definition folgt nunmehr leicht, daß sie nirgends dicht

und abgeschlossen ist. Sie kann aber auch keinen isolierten Punkt enthalten, denn in dessen Umgebung würden Punkte von \mathfrak{A} und \mathfrak{S} liegen, die verbindbar wären. Endlich muß T auch zusammenhängend sein. Zerfiele nämlich T in zwei Teilungen T_1 und T_2 , so konstruieren wir wieder die innerhalb \mathfrak{P} gelegenen approximierenden Figuren Π_1 und Π_2 . Unter ihren Randpolygonen gäbe es mindestens eins, es sei P , so daß innen und außen von ihm Punkte von T lägen, während es selbst nicht zu T gehört. Da nun jeder Punkt von T Grenzpunkt von \mathfrak{A} , wie von \mathfrak{S} ist, so lägen innerhalb und außerhalb des Polygons Punkte von \mathfrak{A} , wie von \mathfrak{S} . Nun sind je zwei Punkte von \mathfrak{A} durch einen zu \mathfrak{A} gehörigen Weg verbindbar; dies gilt daher auch für einen innerhalb und einen außerhalb von P gelegenen Punkt von \mathfrak{A} und da diese Wege P kreuzen, so muß P zu \mathfrak{A} gehören. Ebenso könnte man folgern, daß P zu \mathfrak{S} gehört, was nicht möglich ist.

Eine jede, den Bedingungen des vorstehenden Satzes genügende Menge soll geschlossene Kurve heißen. Durch

$$C, \mathfrak{S}(C), \mathfrak{A}(C)$$

soll die Kurve, ihr Inneres und Äußeres bezeichnet werden. Ferner soll jede zusammenhängende Teilmenge von C ein *zusammenhängender Kurvenbogen* oder kurz ein *Kurvenbogen* heißen.

Zur Kurve C konstruieren wir jetzt gewisse approximierende Polygone, und zwar in folgender Weise: Sei m_0 derjenige Punkt von $\mathfrak{S}(C)$, dessen Abstand ϱ_0 von C ein Maximum ist, und sei $\varepsilon < \frac{1}{2} \varrho_0$, so konstruieren wir die die Kurve C im Abstand ε approximierende Polygonfigur Π . Diese kann noch sehr vielgestaltet sein. Es gibt aber ein wohl definiertes einfaches Polygon P , das Bestandteil von Π ist und den Punkt m_0 einschließt. Innerhalb dieses Polygons liegen alle diejenigen Punkte m von $\mathfrak{S}(C)$, die mit m_0 durch Wege l verbindbar sind, so daß für jeden Punkt von l

$$\varrho(l, C) > \varepsilon$$

ist. Man kann daher ε so wählen, daß jeder beliebige Punkt m' innerhalb des zugehörigen Polygons P fällt. Ist nämlich l' der von m_0 nach m' führende Weg und ist

$$\varrho(l', C) = \varrho',$$

so hat man $\varepsilon < \frac{1}{2} \varrho'$ zu wählen. Denkt man sich also eine gegen Null konvergierende Reihe von Größen

$$\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_r > \cdots,$$

so werden die zugehörigen einfachen Polygone

$$P, P_1, P_2, \cdots, P_r, \cdots$$

immer größere Teile von $\mathfrak{S}(C)$ *einschließen* und für $\lim \nu = \infty$ hat man

$$\lim_{\nu = \infty} \mathfrak{S}(P_\nu) = \mathfrak{S}(C).$$

Diese Polygone nenne ich approximierende *innere* Polygone. Ebenso kann man eine Reihe von einfachen Polygonen

$$Q, Q_1, Q_2, \dots, Q_\nu, \dots$$

bestimmen, die immer größere Teile von $\mathfrak{A}(C)$ *ausschließen* und zwar so, daß

$$\lim_{\nu = \infty} \mathfrak{A}(Q_\nu) = \mathfrak{A}(C)$$

ist; sie sollen approximierende *äußere* Polygone heißen.

Die Reihe dieser Polygone hat überdies die Eigenschaft, daß

$$C = \lim_{\nu = \infty} P_\nu = \lim_{\nu = \infty} Q_\nu$$

ist. In der Tat folgt unmittelbar, daß wenn man auf den Polygonen P_ν Punkte

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_\nu, \dots$$

beliebig annimmt, *jeder* zu ihnen gehörige Grenzpunkt zu C gehört. Andererseits ist jeder Punkt c von C Grenzpunkt einer gewissen Reihe von Punkten

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_\nu, \dots,$$

die zu \mathfrak{S} gehören und nur ihn als Grenzpunkt besitzen. Diese Punkte bestimmen gewisse Polygone

$$P', P'', P''', \dots, P^{(\nu)}, \dots$$

so daß P' das erste Polygon ist, zu dessen Innerem i_1 gehört, P'' das erste, zu dessen Innerem i_2 gehört usw. Ist dann p' derjenige Punkt des Polygons P' , der am nächsten zu i_1 liegt, p'' der analoge Punkt von P'' usw., so werden auch die Punkte

$$p', p'', \dots, p^{(\nu)}, \dots$$

den Punkt c zum Grenzpunkt haben. Wir sagen noch, daß die Kurve C die beiden Gebiete \mathfrak{S} und \mathfrak{A} voneinander trennt. Also folgt:

VIII. *Zu jeder geschlossenen Kurve gibt es eine Reihe innerer und äußerer approximierender, einfacher Polygone von der Art, daß die Polygone gegen die Kurve, und das Innere resp. Äußere dieser Polygone gegen das Innere resp. Äußere der Kurve konvergieren.*

Über die Breite des zwischen P_ν und Q_ν liegenden Gebietes kann auch hier nichts ausgesagt werden. Sie kann für *jedes* ν ganz oder teilweise oberhalb einer festen endlichen Größe bleiben. Schon die Kurve $y = \sin \frac{1}{x}$ liefert ein Beispiel, bei dem die Ringbreite für *jedes* ν stellenweise größer als 2 bleibt. Ein vorzügliches Beispiel liefert aber die kürzlich von Herrn Osgood*) beschriebene Kurve, die einen meßbaren

*) Transactions of the Amer. Math. Soc. Bd. 4, S. 107 (1903).

Flächeninhalt nicht umschließt. Der Umstand, daß dieser nicht meßbar ist, beruht gerade darauf, daß die Breite des sie einschließenden polygonalen Ringgebietes nirgends unter eine gewisse von Null verschiedene Größe sinkt, wie klein man auch ε , wählen mag.

§ 6.

Die Zerlegungs- und Zusammensetzungssätze für geschlossene Kurven.

Es handelt sich jetzt darum, für die geschlossenen Kurven und die durch sie begrenzten Gebiete die Sätze abzuleiten, die denen über Zerlegung und Zusammensetzung der Polygone entsprechen. Naturgemäß beschränken wir uns auf die einfachsten Fälle, da durch deren wiederholte Anwendung die andern sich ergeben. Zu diesem Zweck genügt es, zwei geschlossene Kurven C und C' zu betrachten und alle möglichen Lagen zu erörtern, die sie zueinander haben können.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir zunächst auch den Fall, daß C und C' keinen Punkt gemein haben, alsdann sei δ ihr Abstand. Konstruiert man nun die Polygone P, Q, P', Q' , die C und C' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \delta$ von außen und innen approximieren, so haben keine zwei von ihnen einen Punkt gemein. Sind daher Γ und Γ' die von ihnen begrenzten Gebiete, so liegen sie entweder außerhalb voneinander, oder das eine liegt innerhalb des andern. Im ersten Fall liegen auch die Gebiete $\mathfrak{S}(C)$ und $\mathfrak{S}(C')$ außerhalb voneinander, im zweiten ist das eine ein Teilgebiet des andern, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Im ersten Fall hat man noch

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(C) + \mathfrak{S}(C') + \mathfrak{A}'',$$

wo \mathfrak{A}'' zweifach zusammenhängend ist. Als Querschnitt, der \mathfrak{A}'' einfach zusammenhängend macht, kann man den Verbindungsweg zweier Punkte m und m' nehmen, die beliebig auf Q resp. Q' liegen, sowie die von ihnen zu C resp. C' führenden Wege. Im zweiten Fall hat man analog, falls C' innerhalb von C liegt,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S}(C') + \mathfrak{A}(C) = \mathfrak{S}'',$$

wo \mathfrak{S}'' wieder zweifach zusammenhängend ist.

Wenn C und C' gemeinsame Punkte besitzen, so wollen wir zunächst annehmen, daß *kein* Punkt von C' außerhalb von C liegt. Dann kann auch *kein innerer* Punkt von C' *äußerer* Punkt von C sein. Ist nämlich a ein Punkt von $\mathfrak{A}(C)$, und Q ein die Kurve C approximierendes äußeres Polygon, das a ausschließt, so liegt C' innerhalb von Q und falls $\varrho(Q, C') = \eta$ ist, wird auch das Polygon Q' , das C' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \eta$

von außen approximiert, innerhalb von Q liegen. Es kann daher kein Punkt von $\mathfrak{S}(C')$ außerhalb Q liegen, und da Q ein beliebiges Polygon war, so ist damit die Behauptung bewiesen, es ist also jeder innere Punkt von C' auch innerer Punkt von C und damit jeder äußere Punkt von C zugleich äußerer Punkt von C' . Dann sind die beiden Gebiete

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}(C') \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(C)$$

immer noch zusammenhängende Gebiete. *Sind nämlich i und i_1 zwei innere Punkte von C' und ist l' ein sie verbindender Weg, der also aus inneren Punkten von C' besteht, so ist ja jeder dieser Punkte innerer Punkt für C und C' zugleich, woraus die Behauptung für \mathfrak{S}' folgt. Ebenso folgt sie für $\mathfrak{A}(C)$.

Ist nun jeder äußere Punkt von C' auch äußerer Punkt von C , so sind C und C' identisch. Wenn also C und C' verschieden sind, so muß es äußere Punkte von C' geben, die innere Punkte von C sind. Sie mögen die Menge \mathfrak{S}'' bilden. Seien i'' und i_1'' zwei von ihnen, seien die Abstände

$$\varrho(i'', C) = \delta, \quad \varrho(i'', C') = \delta', \quad \varrho(i_1'', C) = \delta_1, \quad \varrho(i_1'', C') = \delta_1'$$

und sei δ_0 die kleinste dieser vier Größen; konstruiert man dann das Polygon P , das C von innen im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \delta_0$ approximiert, und das Polygon Q' , das C' in gleichem Abstand von außen approximiert, so wird i'' und i_1'' sowohl innerhalb P , wie außerhalb Q' liegen. Man sieht nun zunächst, daß sich die Polygone P und Q' durchdringen. Denn sonst läge notwendig Q' innerhalb P , also auch C' innerhalb C , was nicht der Fall ist.

Die sich durchdringenden Polygone teilen die Ebene in eine endliche Zahl von Gebieten. Deren gibt es vier Arten, die wir in leichtverständlicher Bezeichnung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}), \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{S}), \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{A}), \quad (\mathfrak{S}\mathfrak{S})$$

nennen wollen. Dabei enthält $(\mathfrak{A}\mathfrak{A})$ alle diejenigen Gebietsteile, deren Punkte sowohl zu $\mathfrak{A}(P)$ wie zu $\mathfrak{A}(Q')$ gehören usw. Insbesondere gehören die Punkte i'' und i_1'' beide zu $(\mathfrak{S}\mathfrak{A})$, während jeder Punkt, den C und C' gemein haben, dem Gebiet $(\mathfrak{A}\mathfrak{S})$ angehört.

Es ist leicht zu zeigen, daß die Zahl der Teilgebiete in die $(\mathfrak{S}\mathfrak{A})$ zerfällt, gleich der Zahl derer ist, in die $(\mathfrak{A}\mathfrak{S})$ zerfällt.*) Wir bezeichnen noch die Gesamtheit der ersteren durch J und die Gesamtheit der letzteren durch G . In J sind i'' und i_1'' enthalten, in G jeder zu C und C' gehörige Punkt. Wir bezeichnen ferner durch \mathfrak{B}_g den gesamten

*) Ebenso ist die Zahl der Gebiete $(\mathfrak{S}\mathfrak{S})$ gleich der von $(\mathfrak{A}\mathfrak{A})$.

Umfang von G und durch \mathfrak{P}_i den gesamten Umfang von J . Jeder dieser Umfänge gehört teilweise zu P und teilweise zu Q' . Ist π ein Schnittpunkt von P und Q' , so können wir setzen

$$(1) \quad \begin{aligned} P &= \Sigma\pi + \Sigma p_g + \Sigma p_i, & Q' &= \Sigma\pi + \Sigma q'_g + \Sigma q'_i, \\ \mathfrak{P}_g &= \Sigma\pi + \Sigma p_g + \Sigma q'_g, & \mathfrak{P}_i &= \Sigma\pi + \Sigma p_i + \Sigma q'_i. \end{aligned}$$

Nunmehr nehme man $\varepsilon_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon$ beliebig an, so liegt P_ν außerhalb P und Q'_ν innerhalb Q_ν . Es liegt demnach auch jeder Punkt, der zum Gebiete G_ν gehört, also auch G_ν selbst, innerhalb von G . Ganz analog folgt, daß J innerhalb von J_ν liegt. Wenn wir also ε_ν gegen Null konvergieren lassen, so können *neue* Gebietsteile von G , *außerhalb* der schon vorhandenen, bei wachsendem ν niemals auftreten; dagegen ist es wohl möglich, daß mit wachsendem ν solche Gebietsteile *verschwinden*.

Es sind nun folgende Fälle möglich: Gibt es ein ν , so daß alle Gebietsteile von G_ν verschwunden sind, so gibt es auch ein Q'_ν , das ganz innerhalb von P_ν liegt. Wir kommen also auf den Fall zurück, daß C und C' keinen Punkt gemein haben. Wenn daher C und C' gemeinsame Punkte haben, so gibt es eine unbegrenzte Folge von Gebieten,

$$G, G_1, G_2, \dots, G_\nu, \dots,$$

so daß jedes folgende innerhalb des vorhergehenden liegt, und alle Punkte die in sämtlichen G_ν enthalten sind, sind gemeinsame Punkte von C und C' . Bezeichnen wir sie durch C_g und beachten, daß die in allen G_ν enthaltenen Punkte zugleich die Grenzmenge der Umfänge aller G_ν darstellen, so folgt

$$(2) \quad C_g = \lim \mathfrak{P}_g.$$

Ebenso definieren wir je eine Teilmenge C_i und C'_i von C resp. C' durch die Gleichungen

$$(3) \quad C_i = \lim \Sigma\pi + \Sigma p_i, \quad C'_i = \lim \Sigma\pi + \Sigma q'_i.$$

Jedes G_ν besteht aus einer endlichen Zahl getrennter Gebiete; sie seien

$$G_{\nu 1}, G_{\nu 2}, \dots, G_{\nu \lambda}.$$

Sei nun $G_{\nu i}$ ein Teilgebiet, das mit wachsendem ν verschwindet, für das also eine Zahl N existiert, so daß, wenn $\rho > N$ ist, kein Punkt von $G_{\nu i}$ mehr zu G_ρ gehört. Dann können wir jedes derartige $G_{\nu i}$ aus G_ν tilgen. Sei

$$G'_\nu = \{G'_{\nu 1}, G'_{\nu 2}, \dots, G'_{\nu \mu}\}$$

die so reduzierte Gebietsmenge, so wird nunmehr jedes $G'_{\nu+\rho}$ aus *mindestens* μ *getrennten* Teilgebieten bestehen. Analog besteht J_ν aus λ Teilgebieten

$$J_{\nu 1}, J_{\nu 2}, \dots, J_{\nu \lambda},$$

und wenn das Gebiet $G_{\nu i}$ für $\nu=\rho$ verschwunden ist, so bewirkt dies, daß für $\nu=\rho$ zwei der vorstehenden Teilgebiete sich zu einem Gesamt-

gebiet vereinigt haben. Wenn wir von je zwei solchen Gebieten nur eines beibehalten, so entsteht eine reduzierte Gebietsmenge

$$J'_\nu = \{J'_{\nu 1}, J'_{\nu 2}, \dots, J'_{\nu \mu}\},$$

so daß nun auch jedes $J'_{\nu+q}$ aus *mindestens* μ *getrennten* Teilgebieten besteht, und zwar so, daß je zwei von ihnen für jedes q voneinander getrennt bleiben. Es ist klar, daß es genügt, statt G_ν und J_ν die Gebietsmengen G'_ν und J'_ν in Betracht zu ziehen.

Nun kann zunächst jedes G'_ν ein einziges, zusammenhängendes Gebiet sein. Alsdann ist gemäß Satz IV auch C_ν eine zusammenhängende Menge. Die Kurven C und C' haben daher einen zusammenhängenden Kurvenbogen gemein, der übrigens auch ein Punkt sein kann. Umgekehrt ist klar, daß, nur wenn jedes G'_ν ein zusammenhängendes Gebiet ist, C und C' einen zusammenhängenden Kurvenbogen gemein haben können. Gemäß dem angeführten Polygonsatz ist ferner auch jedes J'_ν , also auch \mathfrak{S}'' selbst ein einziges, zusammenhängendes Gebiet. Umgekehrt folgt auf die gleiche Weise, daß wenn jedes J'_ν ein zusammenhängendes Gebiet ist, dies auch für jedes G'_ν zutrifft. Übrigens sind auch C_i und C'_i zusammenhängende Mengen, wie wir am Ende dieses Paragraphen beweisen werden; sie bilden entweder je eine geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen, also folgt:

IX. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' außerhalb der geschlossenen Kurve C und haben C und C' einen Kurvenbogen gemein, so zerlegt die Kurve C' das Innere von C in zwei durch sie getrennte Gebiete, deren jedes einfach zusammenhängend ist und umgekehrt. Das eine dieser Gebiete ist zugleich das Innere von C' .*

Die Punktmenge C_g besteht ihrer Definition nach aus solchen Punkten, die Grenzpunkte entweder nur von \mathfrak{S}' und \mathfrak{A} oder aber gemeinsame Grenzpunkte von \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' und \mathfrak{A} sind; diese sind zugleich die Grenzpunkte der Punkte π_ν . Setzt man

$$(4) \quad C_g = C_{ig} + C_{ia}$$

wo C_{ig} die Punkte darstellt, die Grenzpunkte von \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' und \mathfrak{A} sind, so ist C_{ig} eine abgeschlossene Menge. Die Menge C_{ia} ist nicht abgeschlossen; wie die Beispiele zeigen, kann sie sich auf Null reduzieren. Die Menge C_{ig} ist ihrer Definition nach auch Bestandteil von C_i und C'_i , wie die Gleichungen (3) unmittelbar erkennen lassen.

Besteht nicht jedes Gebiet G'_ν aus einem zusammenhängenden Bestandteil, so gibt es ein erstes, das in mindestens zwei getrennte Bestandteile zerfällt. Es kann dann wieder jedes folgende auch nur in zwei Bestandteile zerfallen; dann schließt man, daß C_g in zwei verschiedene Kurvenbögen zerfällt, und daß demgemäß auch \mathfrak{S}'' sich in zwei verschiedene

Gebiete spaltet. Dies gilt dann auch für C_i und C'_i , wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen werden.

In dieser Weise kann man fortfahren. Die Zahl der Gebietsteile, aus denen G'_i besteht, kann mit wachsendem ν beliebig groß werden; es werden dann auch die den Kurven C und C' gemeinsamen Punkte in mehrere resp. unbegrenzt viele Teilmengen zerfallen. Ebenso spaltet sich \mathfrak{Z}' in die entsprechenden Teilgebiete, und umgekehrt, was einer ausführlichen Darstellung nicht bedarf. Man kann demgemäß folgenden Satz aussprechen:

X. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' innerhalb C und haben C und C' n Kurvenbögen gemein, so zerlegt C' das Innere von C in $n+1$ durch sie getrennte Gebiete, deren jedes einfach zusammenhängend ist, und umgekehrt.*

Ich gebe noch einige Beispiele zu den einfachsten Fällen und bemerke zunächst, daß sich die Menge C_g , die C und C' gemeinsam ist, nicht nur auf einen Punkt, sondern auch auf eine endliche resp. unendliche Zahl isolierter Punkte reduzieren kann. Wählt man z. B. C als einen Kreis, C' als einen inneren Berührungskreis, so ist C_g ein Punkt, während C_i mit C und C'_i mit C' identisch ist; ferner ist C_{i_g} mit C_g identisch, also $C_{i_a} = 0$. Errichtet man über zwei angrenzenden Intervallen s_1 und s_2 einer Quadratseite nach innen zwei außerhalb voneinander liegende Dreiecke mit den Spitzen S_1 und S_2 und setzt in jedes Dreieck einen sich gegen die Grundlinie verdichtenden Linienzug, so stellen diese beiden Linienzüge nebst der Strecke $S_1 S_2$ eine Kurve C' dar. Die Kurve C ist das Quadrat und C_g besteht aus den Intervallen s_1 und s_2 , während wiederum C'_i mit C' und C_i mit C identisch ist. Die Intervalle s_1 und s_2 bilden zugleich die Menge C_{i_g} , die gemeinsame Grenze von \mathfrak{Z}' , \mathfrak{Z}'' und \mathfrak{M} ist, während Punkte, die nur zur Grenze von \mathfrak{M} und \mathfrak{Z}' gehören, nicht existieren, so daß $C_{i_a} = 0$ ist. Dies bleibt im wesentlichen bestehen, falls man das Intervall s_1 durch den Endpunkt von s_2 ersetzt. Wenn man jedoch s_1 und s_2 nicht aneinander grenzend wählt, so besteht C_{i_a} aus den inneren Punkten des zwischen s_1 und s_2 liegenden Intervalls. Beispiele, in denen C_g in mehrere Punkte oder eigentliche Kurvenbögen zerfällt, lassen sich analog zu dem vorstehenden Beispiel ebenfalls leicht aufstellen.

Analog beweist man auch die Sätze über die Zusammensetzung zweier Gebiete, die außerhalb voneinander liegen und durch geschlossene Kurven begrenzt sind, die einen oder mehrere Kurvenbögen gemein haben. Sie entsprechen dem Fall, daß C und C' gemeinsame Punkte besitzen aber kein Punkt von C' innerhalb von C liegt. Man zeigt dann zunächst, daß kein innerer Punkt von C' innerer Punkt von C sein kann. Daraus folgt, daß $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(C)$ und $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}(C')$ zusammenhängende Gebiete sind, während der übrige Teil von \mathfrak{M} in Teilgebiete zerfällt, die man mit den Polygonen

Q und Q' , die C und C' von außen approximieren, in gleicher Weise erörtern kann, wie im vorigen Fall. Man gelangt dadurch zu folgendem Satz:

XI. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' innerhalb von C , und haben C und C' einen Kurvenbogen gemein, so zerlegt C' das Äußere von C in zwei zusammenhängende Teilgebiete, von denen das eine zugleich das Innere von C' ist und umgekehrt. Haben C und C' n Kurvenbögen gemein, so zerfällt das Äußere von C in $n + 1$ solcher Teilgebiete, und umgekehrt.*

Hieraus fließt endlich noch der folgende Satz, der als Umkehrung der vorstehenden angesehen werden kann, und überdies die Ausdehnung des Satzes VII auf geschlossene Kurven darstellt.

XII. *Wenn das Innere \mathfrak{S} einer geschlossenen Kurve C in zwei Gebiete \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist, so bilden die gemeinsamen Grenzpunkte von \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 entweder eine geschlossene Kurve oder einen zusammenhängenden Kurvenbogen.*

Zunächst folgert man, wie beim Beweis von Satz VII, daß gemeinsame Grenzpunkte von \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 wirklich existieren. Sei \mathfrak{Z} die von ihnen gebildete Menge. Falls nun erstens \mathfrak{Z} keinen Punkt mit C gemein hat, so besteht \mathfrak{Z} ihrer Definition gemäß aus inneren Punkten von C . Ist dann $\rho(\mathfrak{Z}, C) = \delta$, so liegt \mathfrak{Z} auch innerhalb des Polygons P , das die Kurve C von innen im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2} \delta$ approximiert. Alsdann folgt aus Satz VII unmittelbar, daß \mathfrak{Z} eine innerhalb von C gelegene geschlossene Kurve ist.

Wenn jedoch \mathfrak{Z} Punkte mit C gemein hat, so sei C_1 die Menge aller dieser Punkte. Wir setzen dann

$$\mathfrak{Z} = C_1 + \mathfrak{Z}', \quad C = C_1 + C''.$$

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{G} = C + \mathfrak{A} + \mathfrak{S}$$

folgt daher

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{Z} + C''$$

und zwar bestehen die Punkte von C'' aus denen, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{A} und \mathfrak{S}_1 , resp. nur von \mathfrak{A} und \mathfrak{S}_2 sind. Wir setzen demgemäß noch

$$C'' = C_1'' + C_2''$$

und erhalten die Gleichung:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{Z} + C_1'' + C_2''.$$

Nun sind

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_1 + C_1'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_2 + C_2''$$

zusammenhängende Gebiete, was ebenso gezeigt wird, wie der im Beginn von § 5 bewiesene Hilfssatz. In der Gleichung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{Z} + C_2''$$

sind daher \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{S}_2 zusammenhängende Gebiete, während jeder Punkt von $\mathfrak{Z} + C_2''$ gemeinsamer Grenzpunkt von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{S}_2 ist. Daher ist gemäß Satz VII

$$C' = \mathfrak{Z} + C_2''$$

eine geschlossene Kurve. Kein Punkt dieser Kurve liegt außerhalb von C ; es greifen also für die Beziehungen von C und C' die Erörterungen dieses Paragraphen Platz. Da nun C' das Innere von C in zwei Gebiete zerlegt, so folgt, daß C' entweder ein Kurvenbogen oder eine geschlossene Kurve ist.

Ähnlich lassen sich die Sätze über die Teilung des Kurveninnern in mehr als zwei Gebiete ableiten. Analog zu Satz XII beweist man noch den folgenden Satz:

Wenn das Äußere einer geschlossenen Kurve C in zwei Gebiete \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist, so bilden die gemeinsamen Grenzpunkte von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 entweder eine geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen.

Mittelst dieser Sätze kann man nun auch die Art der oben definierten Mengen

$$C_i = \lim \Sigma \pi + \Sigma p_i \quad \text{und} \quad C'_i = \lim \Sigma \pi + \Sigma q'_i$$

bestimmen. Falls nämlich Satz X statt hat, falls also die Kurve C' das Innere von C in zwei Gebietsteile zerlegt, so gibt es nach dem vorstehenden Satz eine geschlossene Kurve oder einen zusammenhängenden Kurvenbogen, der die Teilung bewirkt. Daraus folgt, daß C'_i mit C' identisch ist, oder ein zusammenhängender Kurvenbogen von C' . Ähnlich folgert man, daß auch C_i mit C identisch ist oder ein Kurvenbogen. Ebenso folgert man, daß wenn C_g in zwei verschiedene Kurvenbögen zerfällt, auch C_i und C'_i sich in je zwei verschiedene Kurvenbögen spaltet, die die gleiche Lage zueinander haben, wie dies bei Polygonen der Fall ist.

Endlich gelangt man mittelst der vorstehenden Resultate auch zu Beziehungen für Kurven C und C' , die sich beliebig durchdringen, was einer näheren Ausführung nicht bedarf.

§ 7.

Gebietsgrenze, Zusammenhangszahl und Gebietsteilung.

Die vorstehenden Entwicklungen bilden die Grundlage aller weiteren Erörterungen. Die Probleme, die noch zu erledigen sind, sind wesentlich zweierlei Art. Erstens kann man von einer beliebig gegebenen Menge \mathfrak{M} ausgehen und fragen, welches die Gestalt ihrer Gebietsgrenze und die Art ihres Zusammenhanges ist, falls sie ein zusammenhängendes Gebiet darstellt; zweitens kann man von einer beliebig gegebenen Menge \mathfrak{S} ausgehen und nach der durch sie bewirkten Gebietsteilung fragen. Beide Aufgaben

hängen eng miteinander zusammen. Es mag genügen für einige einfache Fälle die Lösung in Kürze abzuleiten.

Die volle Gebietsgrenze \mathfrak{S} einer zusammenhängenden Menge \mathfrak{M} ist eine abgeschlossene Menge und hat daher stets den in § 4 abgeleiteten Typus, d. h. es ist

$$\mathfrak{S} = \Sigma J_v + \Sigma \mathfrak{T}_v + \mathfrak{T}_\alpha.$$

Sei zunächst \mathfrak{M} ein sich *unbegrenzt weit* erstreckendes Gebiet. Dann ist zu unterscheiden, ob unter den Mengen \mathfrak{T}_v solche vorkommen, in die geschlossene Kurven eingehen oder nicht. Gehört zu \mathfrak{S} eine geschlossene Kurve, so kann ihr Inneres nicht zu \mathfrak{M} gehören. Nun kann eine geschlossene Kurve in \mathfrak{S} entweder so auftreten, daß sie selbst mit einem T_v identisch ist, oder Bestandteil einer zusammenhängenden Menge T_v ist. Diese kann dann entweder nur diese eine geschlossene Kurve enthalten oder aber beliebig viele geschlossene Kurven, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen und einen Punkt oder einen Kurvenbogen gemein haben, wie es den Erörterungen von § 7 entspricht. Das gleiche trifft auch für die Menge \mathfrak{T}_α zu, falls sie zusammenhängend ist und eine oder mehrere geschlossene Kurven enthält. Übrigens kann die Menge \mathfrak{T}_α , falls in sie eine oder mehrere oder auch unendlich viele geschlossene Kurven eingehen, auch eine Menge des ersten Typus sein; hierfür, sowie für die Art und Weise, in welcher die übrigen Bestandteile von \mathfrak{S} zu diesen Kurven liegen, verweise ich auf die Ausführungen von § 4.

Bezeichnen wir noch eine der eben genannten geschlossenen Kurven durch C_v und ihr Inneres durch $\mathfrak{J}(C_v)$, so erhält man noch die Gleichung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{M} + \Sigma \mathfrak{J}(C_v) + \mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_m,$$

wo \mathfrak{S}_c alle Punkte enthält, die zur Grenze der sämtlichen Gebiete $J(C_v)$ gehören und \mathfrak{S}_m der übrige Bestandteil von \mathfrak{S} ist.

Die gleichen Verhältnisse liegen vor, wenn es sich um ein zusammenhängendes Gebiet \mathfrak{M} handelt, das aus *dem Inneren einer geschlossenen Kurve* C besteht. Hier tritt zur vollen Grenze von \mathfrak{M} noch die Kurve C als äußere Gebietsgrenze hinzu. Ihre Beziehung zur Gesamtmenge \mathfrak{S} unterliegt wieder den allgemeinen Erörterungen von § 4. Sie kann entweder mit einer der in einem \mathfrak{T}_v enthaltenen Mengen resp. mit \mathfrak{T}_α identisch sein oder aber ein Bestandteil einer solchen Menge sein, insbesondere falls sie ein Bestandteil von \mathfrak{T}_α ist, so kann \mathfrak{T}_α auch wieder eine Menge des ersten Typus sein.

Es ist klar, daß man auf ein zusammenhängendes Gebiet \mathfrak{M} den Begriff der *Zusammenhangszahl* übertragen kann. Ich beschränke mich im wesentlichen auf die Bemerkung, daß die Zusammenhangszahl unendlich groß werden und sich sogar durch transfinite Ordnungszahlen ausdrücken kann. Handelt es sich z. B. um eine Menge \mathfrak{T}_v , wie sie dem

Satz V entspricht, so umgebe man die Teilmengen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 mit den approximierenden Figuren Π_1 und Π_2 und konstruiere von einem Punkt m_1 von Π_1 den zu \mathfrak{Z}_1 führenden Weg, ebenso von einem Punkt m_2 von Π_2 den bezüglichen Weg zu \mathfrak{Z}_2 (§ 1). Diese beiden Wege bestimmen dann mit dem von m_1 zu m_2 führenden Weg einen Querschnitt. In gleicher Weise hat man für jede weitere Teilung zu verfahren; alle so bestimmten Querschnitte werden dann \mathfrak{M} in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandeln. — Handelt es sich um eine abgeschlossene Menge vom allgemeinsten Typus, so hat man für die successive Anbringung von Querschnitten gerade die im Satz VI ausgeführte Abspaltung isolierter Mengen vorzunehmen, und die bezüglichen Querschnitte so lange zu legen, bis der Abspaltungsprozeß sein Ende erreicht. Ist dann die schließlich übrig bleibende Menge \mathfrak{Z}_α zusammenhängend, so ist man am Ziel, ist sie nicht zusammenhängend, so hat man außerdem noch die für eine solche Menge nötigen Querschnitte anzubringen.

Ein einfaches Beispiel des ersten Falles bildet die oben S. 140 genannte Menge der Lote, die man auf einer Geraden in den Punkten einer perfekten, nirgends dichten Menge errichtet. Übrigens bemerke ich, daß nicht jede Menge dieser Art eine *zusammenhängende* Komplementärmenge besitzt. Die oben S. 141 genannten Beispiele zeigen, daß \mathfrak{M} in beliebig viele getrennte Bestandteile zerfallen kann.

Die Frage, welches die zu einer beliebigen Menge \mathfrak{S} gehörige Gebietsteilung ist, bedarf an sich nur noch in dem Falle einer Erledigung, daß ihre Komplementärmenge nicht zusammenhängend ist. Teilweise ist sie übrigens durch das vorstehende schon beantwortet. Wir wollen sie noch in dem einfachsten Falle etwas eingehender behandeln. Der einfachste Fall ist der, daß \mathfrak{M} in zwei Teilgebiete zerfällt. Alsdann läßt sich das eine Teilgebiet dadurch definieren, daß ihm die Punkte des Quadrats q angehören, in dem \mathfrak{S} enthalten ist. Dies bezeichnen wir als das *äußere* Gebiet \mathfrak{A} ; die andere Teilmenge heißt das *innere* Gebiet \mathfrak{J} . Es ist also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{J} + \mathfrak{S}.$$

Wir setzen noch

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a' + \mathfrak{S}_i' + \mathfrak{S}_{ai},$$

wo \mathfrak{S}_a' diejenigen Punkte bedeutet, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{A} sind, und \mathfrak{S}_i' diejenigen, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{J} sind. Dann sind gemäß § 5 die beiden Mengen

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_a', \quad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \mathfrak{S}_i'$$

zusammenhängend, ferner ergibt sich

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{J}' + \mathfrak{S}_{ai},$$

also folgt unmittelbar gemäß Satz VII, daß \mathfrak{S}_{ai} eine geschlossene Kurve C darstellt. Also ergibt sich:

XIII. Zerfällt die Komplementärmenge einer abgeschlossenen, nirgends dichten Menge in zwei getrennte Gebiete \mathfrak{A} und \mathfrak{S} , deren jedes zusammenhängend ist, so gibt es eine wohl definierte, geschlossene Kurve C , der alle gemeinsamen Grenzpunkte von \mathfrak{A} und \mathfrak{S} angehören, und die die beiden Gebiete \mathfrak{A} und \mathfrak{S} voneinander trennt.

Setzt man noch

$$\mathfrak{S}_a = C + \mathfrak{S}_a', \quad \mathfrak{S}_i = C + \mathfrak{S}_i',$$

so stellen \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_i die volle Grenze von \mathfrak{A} und \mathfrak{S} dar und sind daher abgeschlossene Mengen.

Für die zusammenhängenden Gebiete \mathfrak{A} und \mathfrak{S} sowie für ihre vollen Grenzen \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_i greifen die Bemerkungen Platz, die wir im Beginn dieses Paragraphen für eine zusammenhängende Menge gemacht haben. Für \mathfrak{S} ist C die äußere Randkurve, für \mathfrak{A} ist es das Quadrat q , in dem \mathfrak{S} enthalten ist, während C eine der inneren Randkurven darstellt. Sei noch T diejenige Menge, der die Kurve C angehört, und man setze

$$T = C + T_a' + T_i',$$

so ist T_a' ein Bestandteil von \mathfrak{S}_a und T_i' ein solcher von \mathfrak{S}_i . Keine der beiden Mengen T_a' und T_i' ist abgeschlossen, die ihnen fehlenden Grenzpunkte gehören zu C . Werden sie durch C_a resp. C_i bezeichnet, so ist jede dieser beiden Mengen, wie auch

$$T_a = C_a + T_a', \quad T_i = C_i + T_i'$$

eine abgeschlossene Menge. Übrigens kann C_a resp. C_i auch mit C identisch sein.

Konstruiert man z. B. zu den Seiten eines Quadrats außen und innen eine sich gegen die Quadratseiten verdichtende Menge paralleler Strecken, von denen keine zwei miteinander oder mit dem Quadrat einen Punkt gemein haben, so bildet das Quadrat die Kurve C und ist mit den Mengen \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_i identisch, die sämtlichen Parallelen bilden die Mengen \mathfrak{S}_a' und \mathfrak{S}_i' , während T_a' , C_a , T_i' und C_i nicht existieren. Errichtet man dagegen auf einer Quadratseite in den Punkten je einer perfekten, nirgends dichten Menge Lote nach außen und innen, so hat man eine einzige, zusammenhängende Menge. C ist das Quadrat, während \mathfrak{S}_a' und \mathfrak{S}_i' mit T_a' und T_i' identisch sind und mit C_a resp. C_i zusammen die sämtlichen äußeren resp. inneren Lote ausmachen. Die Mengen C_a und C_i bilden die eben genannten perfekten linearen Mengen. Die Mengen T_a und T_i stellen je eine Menge dar, die dem Satz V entspricht. Endlich stellt bei dem im Beginn von § 4 genannten Beispiel C den Grundkreis dar, während \mathfrak{S}_a und \mathfrak{S}_i je eine Menge ist, die Satz V entspricht. Dieses Beispiel läßt sich beliebig verallgemeinern, indem man in eine gegebene Menge immer wieder neue Mengen einsetzt, die sich gegen einzelne Bestandteile der ersten

verdichten. Hier greifen dieselben einfachen Methoden Platz, mittelst derer man Punktmengen zu bilden pflegt, deren Ableitung eine immer höhere Ordnung besitzt.

Die Fälle, in denen \mathfrak{M} in mehr als zwei Gebiete zerfällt, lassen sich in ähnlicher Weise behandeln. Besteht \mathfrak{M} zunächst aus drei Gebieten, so hat man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J} + \mathfrak{R},$$

wo \mathfrak{A} wieder dasjenige Gebiet ist, dem die Punkte von q zugehören. Man setze nun

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{M}', \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a + \mathfrak{S}',$$

wo \mathfrak{S}_a die volle Grenze von \mathfrak{A} ist, also jeder Punkt von \mathfrak{S}' Grenzpunkt nur von \mathfrak{M}' ist. Man kann dann weiter schreiben

$$\mathfrak{M}' + \mathfrak{S}' = \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{S}_a = C_a + \mathfrak{S}_a',$$

wo \mathfrak{S}_a' die Punkte enthält, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{A} sind. Setzt man dann noch

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{S}_a' = \mathfrak{A}',$$

so ist \mathfrak{A}' gemäß § 5 zusammenhängend. Man erhält noch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}' + C_a + \mathfrak{M}_1$$

und hat nun zu unterscheiden, ob \mathfrak{M}_1 zusammenhängend ist oder nicht.

Im ersten Fall beweist man, analog zu den obigen Entwicklungen, daß C_a eine geschlossene Kurve ist, deren Inneres \mathfrak{M}_1 ist, und daß dies durch eine ebenfalls geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen in zwei Teilgebiete

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} + \mathfrak{S}_i', \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}_k'$$

zerfällt, wo \mathfrak{S}_i' und \mathfrak{S}_k' diejenigen Teilmengen von \mathfrak{S} sind, die Grenzpunkte nur von \mathfrak{S} oder nur von \mathfrak{R} sind.

Im zweiten Fall, wenn also \mathfrak{M}_1 nicht zusammenhängend ist, folgert man, daß C_a in zwei geschlossene Kurven C_i und C_k zerfällt, die außerhalb voneinander liegen, und deren Inneres die Gebiete \mathfrak{S}' und \mathfrak{R}' sind, usw.

Wie zu erwarten war, führt also unsere Analyse auf die nämlichen Fälle, die wir in § 6 bei der Kombination von zwei geschlossenen Kurven als einfachste Möglichkeiten erkannten.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, daß \mathfrak{M} , wie ich bereits in meinem ersten Beitrag anführte, in unendlich viele Teilmengen zerfallen kann, man hat eine Gleichung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \Sigma \mathfrak{S}_i,$$

wo \mathfrak{A} wieder das äußere Gebiet bedeutet, dem die Punkte von q zugehören.

Diese Betrachtungen lassen sich auf die Fälle, daß \mathfrak{M} in beliebig viele Gebiete zerfällt, ohne Mühe ausdehnen.

§ 8.

Die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen ebenen Mengen.

Wir haben bisher von der Menge \mathfrak{S} angenommen, sie sei nirgends dicht. Ist \mathfrak{S} eine Menge anderer Art, so enthält sie Punkte, in deren Umgebung sie überall dicht ist. Es hat keine Schwierigkeit die Struktur der Menge \mathfrak{S} in diesem Fall zu beschreiben. Dies soll der Vollständigkeit halber hier in Kürze geschehen. Wir setzen dann

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}_1,$$

wo \mathfrak{U} die Menge derjenigen Punkte darstellt, in deren Umgebung \mathfrak{S} überall dicht ist. Sei u_1 irgend einer von ihnen. Es gibt dann sicher Punkte u , die mit u_1 durch einen Weg verbindbar sind, dessen sämtliche Punkte zu U gehören, sie mögen die Menge U_1 bilden. Diese Menge ist zusammenhängend und es sei \mathfrak{S}_u die zugehörige Gebietsgrenze*). Für diese Gebietsgrenze gelten die allgemeinen Erörterungen der vorstehenden Paragraphen, nur mit der Maßgabe, daß Punkte, die Grenzpunkte von U_1 allein sind, in \mathfrak{S}_u offenbar nicht auftreten können. Es kommen also für die Gebietsteilung nur geschlossene Kurven in Frage und es gibt daher eine oder mehrere resp. auch unendlich viele geschlossene Kurven, die das Gebiet U_1 begrenzen und natürlich zur Menge \mathfrak{S} gehören. Die so definierte Kurvenmenge sei \mathfrak{C}_1 ; sie besitzt jedenfalls eine äußere Randkurve C_a' . Gibt es noch andere Punkte, in deren Umgebung \mathfrak{S} überall dicht ist, so sei u_2 einer von ihnen. Alle mit u_2 verbindbaren Punkte definieren dann ebenso ein zusammenhängendes Gebiet U_2 und es gibt eine Kurvenmenge \mathfrak{C}_2 , die die volle Grenze von U darstellt, die aus einer oder mehreren oder auch aus unendlich vielen Kurven bestehen kann und eine äußere Randkurve C_a'' besitzt.

So kann man fortfahren und erhält eine abzählbare Zahl solcher Gebietsteile, in denen \mathfrak{S} überall dicht ist, und deren Grenzkurven im übrigen jede beliebige Lage zueinander haben können.

Nach Abscheidung aller Gebiete

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

bleibt von \mathfrak{S} noch die nirgends dichte Menge \mathfrak{S}_1 , der die Grenzpunkte der Gebiete U_n naturgemäß angehören. Sie ist offenbar abgeschlossen und kann eine Menge des allgemeinsten Typus sein, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Man erhält also schließlich

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \Sigma U_n = \mathfrak{S}' + \Sigma \mathfrak{C}_n + \Sigma U_n,$$

wo jedes U_n ein zusammenhängendes Gebiet darstellt, aber \mathfrak{S}' keine abgeschlossene Menge mehr sein kann. Es hat keine Schwierigkeit, auf die Natur der Menge \mathfrak{S}' näher einzugehen.

*) Die Bezeichnung ist so zu verstehen, daß U_1 und \mathfrak{S}_u keinen Punkt gemein haben.