

Ueber eine Eigenschaft der cubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen.

Von

A. Voss in München.

Ist f eine Form s^{ten} Grades von p homogenen Variabeln, H ihre Hesse'sche Form, H_H die Hesse'sche Form der letzteren, so ist bekanntlich im binären Gebiete, sobald $s > 3$,

$$(1) \quad H_H = Pf + QH^*.$$

Für ternäre Formen findet ein ähnlicher Satz allgemein nur statt, wenn f vom dritten Grade ist; man hat dann

$$H_H = Af + BH,$$

wo A und B die beiden Invarianten von f sind. Neuerdings hat Herr Bauer gezeigt, dass ein ähnliches Theorem für cubische Formen auch im quaternären Gebiete besteht, indem er, von der canonischen Form von f ausgehend, direct die Existenz einer Relation von der Form (1) erwies**). Ich beabsichtige in dieser Note zu zeigen, dass der Satz (1) für cubische Formen mit beliebig viel Variabeln Gültigkeit hat.

Man kann sich dazu zunächst einer geometrischen Ueberlegung bedienen. Eine Form f mit p homogenen Variabeln x stellt, gleich Null gesetzt, eine Mannigfaltigkeit von $p - 2$ Dimensionen, eine M_{p-2} , im projectiven Raume von $p - 1$ Dimensionen vor, welche als Fläche f bezeichnet werden möge. Die Tangentenebene derselben im Punkte x hat die Gleichung

$$(2) \quad \sum_i x_i f_i = 0; \quad ***)$$

*) Salmon-Fiedler, Algebra d. linearen Transformationen, S. 273.

**) G. Bauer. Von der Hesse'schen Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Münch. Acad. XIV. 1883.

***) Da die Summationen sich immer von 1 bis p erstrecken, so genügt es, die Indices anzugeben, über welche summirt wird. Unter den f_{ik} ... sind im folgenden immer die entsprechenden Differentialquotienten von f nach x zu verstehen.

sie wird *stationär*, d. h., es fallen zwei unendlich benachbarten Punkten entsprechende Tangentialebenen zusammen, wenn es möglich ist, den Differentialen dx solche Werthe beizulegen, dass die p Gleichungen

$$(3) \quad \sum_k f_{ik} dx_k = \varphi f_i,$$

für

$$i = 1, 2, \dots, p$$

bestehen, während zwischen den dx noch die Relation

$$(4) \quad \sum_i a_i dx_i = 0$$

mit willkürlichen Coefficienten a stattfindet. Die Bedingungen (3) und (4) führen, wie man leicht sieht, auf

$$H = 0.$$

Nennt man einen Punkt von f , für den eine stationäre Tangentenebene existirt, einen parabolischen Punkt, so hat man:

Die parabolischen Punkte von f bilden eine M_{p-3} , welche durch die Hesse'sche Fläche H von f aus f ausgeschnitten wird.

Vermöge der p Gleichungen

$$(5) \quad \sum_i y_i f_{ik} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

sind zwei Flächen H und S , gebildet aus den correspondirenden Punkten x und y , eindeutig auf einander bezogen; S kann die zu H gehörige Steiner'sche Fläche genannt werden*). Bezeichnet man die ersten Unterdeterminanten der Hesse'schen Form durch H_{ik} , so ergiebt sich aus (5) für $H = 0$

$$(6) \quad \mu y_i y_k = H_{ik}.$$

Aus (5) folgt ferner durch Differentiation

$$\sum_i dy_i f_{ik} + \sum_{i,l} y_i f_{ikl} dx_l = 0,$$

und hieraus

$$(7) \quad \sum_i f_i dy_i = 0,$$

d. h. die Steiner'sche Fläche ist die Enveloppe der Polarebenen der Punkte von H in Bezug auf f . Soll nun die Tangentenebene von S in einem Punkte y stationär sein, so müssen nach (7) die p Bedingungen

$$\sum_k f_{ik} dx_k = \varphi f_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

nebst den Gleichungen

*) Vgl. meine Arbeit „Zur Theorie der conjugirten Kernflächen“, diese Annalen Bd. XXVII.

$$\sum_i \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,k,l} H_{ik} f_{ikl} dx_i = \mu \sum_{i,k,l} y_i y_k f_{ikl} dx_i = 0,$$

$$\sum_i a_i dx_i = 0$$

für beliebige Werthe der a erfüllt sein. Diese Gleichungen erfordern, dass für beliebige Werthe der Grössen a , c die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1p} & f_1 & c_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2p} & f_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{p1} & f_{p2} & \cdots & f_{pp} & f_p & c_p \\ H_1 & H_2 & \cdots & H_p & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher H_i für $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ gesetzt ist, verschwindet. Durch eine einfache Reduction erhält man aber, falls s den Grad von f bedeutet, mit Hülfe von (6)

$$(s-1) \Delta = -\mu a_x c_y \sum_i H_i y_i.$$

Die Bedingung $\mu = 0$ sagt aus, dass alle ersten Unterdeterminanten von H verschwinden. Dies findet statt für eine M_{p-4} auf H , welche aus Knotenpunkten von H gebildet ist; sie heisse κ . Jedem dieser Knotenpunkte von H entspricht eine Gerade, d. h. ein lineares Gebilde einer Dimension, mit stationärer Tangentenebene; auf einer solchen Geraden befinden sich $p-1$ singuläre Punkte, die im allgemeinen einer Cuspidalmanigfaltigkeit M_{p-3} von S angehören. Die M_{p-4} kann wieder Theile enthalten, für die auch noch alle zweiten Unterdeterminanten von H verschwinden, den Punkten derselben entsprechen dann lineare Strahlbüschel, längs deren die Tangentenebene von S stationär bleibt, u. s. w. Das Gebiet $p-3^{\text{ter}}$ Dimension σ auf S , welches κ entspricht, bildet eine singuläre parabolische M_{p-3} auf S . Die eigentliche parabolische M_{p-3} von S ist daher charakterisirt durch die Gleichung

$$\sum_i H_i y_i \equiv \sum_{i,k,l} y_i y_k y_l f_{ikl} = 0.$$

Das heisst: Die Tangentenebene eines Punktes x der Hesse'schen Fläche geht nur dann durch den zugeordneten Punkt y der Steiner'schen Fläche, wenn der letztere der eigentlichen parabolischen M_{p-3} von S angehört, und die Punkte x bilden auf H eine M_{p-3} , längs deren sich die Flächen

$$H = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i,k} H_{ik} H_i H_k = 0$$

berühren.

Ist insbesondere f eine cubische Form, so fallen S und H zusammen*), und man hat den Satz:

Die eigentliche parabolische M_{p-3} der cubischen Fläche f ist zugleich eigentliche parabolische M_{p-3} von H .

Für eine cubische Form f , die selbst keine Knotenpunkte enthält — welche Voraussetzung übrigens unwesentlich ist — kann zugleich H keine anderen Knotenpunkte, als die in der genannten M_{p-4} auftretenden, besitzen. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} = \mu \sum_{i,k} f_{ikl} y_i y_k = 0, \\ l = 1, 2, \dots, p$$

folgt entweder $\mu = 0$, oder

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_l} \right) = 0$$

für $x = y$; d. h. es müsste y ein Knotenpunkt von f sein. Bei den cubischen Formen enthält also die M_{p-4} alle singulären Punkte von H . Einem jeden derselben entspricht im allgemeinen eine Gerade mit constanter Tangentialebene auf H . Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sum_n (y_n f_{nik}) & \alpha_i \\ \beta_k & 0 \end{vmatrix}$$

bei beliebigem α, β für $H = 0$ den Factor $\alpha_x \beta_x$ enthält, so folgt weiter:

Auf jeder solchen Geraden von H liegen $p - 1$ Knotenpunkte von H , und umgekehrt gehen durch jeden Knoten von H $p - 1$ dieser Geraden.***) Sie bilden die singuläre M_{p-3} der parabolischen Punkte auf H , welche mit P bezeichnet werden möge.

*) Dabei mag man bemerken, dass, so lange f keinen Knotenpunkt hat, correspondirende Punkte x und y nie zusammenfallen können.

**) Man vergleiche die bekannten Eigenschaften von H bei der Fläche dritter Ordnung. Bei einer Form s^{ter} Ordnung mit p Variabeln geht durch jeden ihrer Punkte eine M_{p-s-2} von Geraden, wenn $s \leq p - 2$. Ist aber $s = p - 2 + \mu$, so wird es eine M_{p-s-5} von Geraden auf derselben geben, so lange noch $s \leq 2p - 5$. Eine cubische Form enthält daher eine M_{2p-8} von Geraden. Für $p = 5$ gehen durch jeden Punkt der cubischen Form 6 Gerade, welche eine M_2 auf der Form bilden. Eine solche Gerade ist aber im allgemeinen nicht mehr Tangente von H in denjenigen Punkten, wo sie von H getroffen wird; dies ist vielmehr nur bei $p = 4$ der Fall.

Aus den eben angeführten Betrachtungen kann man bereits folgern (vgl. die Betrachtung gegen den Schluss dieser Note), dass für eine cubische Form mit beliebig vielen Variablen der Satz 1) gilt. Die wirkliche Darstellung von H_H in dieser Form ist eine Aufgabe der Formentheorie. Nun lässt sich allerdings, was ich hier nicht ausführen kann, für quaternäre Formen eine solche Darstellung mit Hilfe der symbolischen Methoden ganz allgemein geben. Aber bei einer beliebigen Anzahl von Variablen erscheint eine directe Untersuchung von H_H auf diesem Wege so weitläufig, dass ich vorzog, ein anderes Verfahren einzuschlagen, durch welches auf *rein algebraischem Wege* der in Rede stehende Satz bewiesen wird. Dasselbe stützt sich auf eine eigenthümliche Identität, welche für alle cubischen Formen gilt, und die man auf folgende Art erhalten kann.

Bezeichnet man der Kürze halber die Unterdeterminanten H_{ik} durch y_{ik} , so bestehen für das System von zweimal $\frac{1}{2} p(p+1)$ Grössen f_{ik} , y_{ik} die Identitäten

$$(8) \quad \begin{aligned} H &= \sum_n y_{ni} f_{ni}, \\ 0 &= \sum_n y_{ni} f_{nk}, \end{aligned}$$

für ein beliebiges

$$i = 1, 2, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, p.$$

Aus ihnen folgt durch Differentiation

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_{ni} + y_{ni} f_{nii} \right), \\ 0 &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_{nk} + y_{ni} f_{nki} \right). \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit x_i , die übrigen mit den x_k und addirt, so entsteht

$$x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} = (s-1) \sum_n \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_n + \delta_{ii} H(s-2), *)$$

wo s der Grad von f ist, und δ_{ii} das Kronecker'sche Symbol bezeichnet; also wenn man mit den willkürlichen Grössen α_i multiplicirt und addirt

$$(10) \quad \alpha_x \frac{\partial H}{\partial x_i} = (s-1) \sum_n \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} f_n + H \alpha_i (s-2),$$

*) Diese Gleichungen sind schon von Jacobi, Crelle's Journal, Bd. XL, angegeben.

falls

$$(11) \quad \eta_n = \sum_i \alpha_i y_{ni}$$

gesetzt wird. Wird nunmehr eine cubische Form $s = 3$ vorausgesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_m} &= \sum_n \frac{\partial^2 y_{ni}}{\partial x_i \partial x_m} f_{ni} + \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_{nim} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nii} \right), \\ 0 &= \sum_n \frac{\partial^2 y_{ni}}{\partial x_i \partial x_m} f_{nk} + \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_{nkm} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nki} \right). \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit y_{si} , die übrigen $p - 1$ mit

$$y_{s1}, y_{s2}, \dots, y_{s,i-1}, y_{s,i+1}, \dots, y_{sp},$$

und addirt, so findet man

$$y_{is} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_m} = H \frac{\partial^2 y_{is}}{\partial x_i \partial x_m} + \sum_{k,n} \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_i} f_{nkm} y_{sk} + \frac{\partial y_{ni}}{\partial x_m} f_{nki} y_{sk} \right),$$

oder, wenn man mit den willkürlichen Grössen $\alpha_i \alpha_s$ multiplicirt und summirt

$$(12) \quad R_x \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_m} = H \frac{\partial^2 R_x}{\partial x_i \partial x_m} + \sum_{n,k} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} \eta_k f_{nkm} + \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \eta_k f_{nki} \right),$$

falls man mit R_x die Form

$$(13) \quad \sum_{i,k} y_{ik} \alpha_i \alpha_k = \sum_n \alpha_n \eta_n,$$

d. h. die mit dem negativen Zeichen genommene mit den α geränderte Determinante der f_{ik}

$$R_x = - \begin{vmatrix} f_{ik} & \alpha_i \\ \alpha_k & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Man schreibe nun die Gleichungen (9) in der Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \sum_n \frac{\partial y_{ns}}{\partial x_i} f_{ns} + \sum_h f_{hsi} y_{hs}, \\ 0 &= \sum_n \frac{\partial y_{ns}}{\partial x_i} f_{nk} + \sum_h f_{hki} y_{hs}, \end{aligned}$$

und multiplicire die erste mit $\frac{\partial y_{is}}{\partial x_m}$, die letzten $p - 1$ mit

$$\frac{\partial y_{i1}}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial y_{is-1}}{\partial x_m}, \frac{\partial y_{is+1}}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial y_{ip}}{\partial x_m},$$

und addire wieder, so entsteht

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} \frac{\partial y_{is}}{\partial x_m} = \sum_{n,k} \frac{\partial y_{n,i}}{\partial x_l} \frac{\partial y_{ik}}{\partial x_m} f_{nk} + \sum_{h,k} f_{hki} \frac{\partial y_{ik}}{\partial x_m} y_{hs},$$

oder, wenn man wieder mit $\alpha_i \alpha_s$ multiplicirt und addirt

$$(14) \quad \frac{\partial H}{\partial x_l} \frac{\partial R}{\partial x_m} = \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_{nk} + \sum_{n,k} f_{knl} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \eta_k.$$

Demnach wird aus (12)

$$R_x \frac{\partial^2 H}{\partial x_l \partial x_m} = H \frac{\partial^2 R}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial H}{\partial x_l} \frac{\partial R}{\partial x_m} + \frac{\partial H}{\partial x_m} \frac{\partial R}{\partial x_l} - 2 \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_{nk},$$

und wenn man noch mit α_x multiplicirt und die Gleichungen (10) zur Anwendung bringt, erhält man

$$(15) \quad \alpha_x R_x \frac{\partial^2 H}{\partial x_l \partial x_m} = \alpha_x H \frac{\partial R_x}{\partial x_l \partial x_m} + H \left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m} \alpha_l + \frac{\partial R_x}{\partial x_l} \alpha_m \right) + 2 W_{lm},$$

wo

$$W_{lm} = \sum_n \left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_l} + \frac{\partial R_x}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \right) f_n - \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_{nk} \alpha_x.$$

Bildet man nun die Hesse'sche Form auf beiden Seiten der identischen Relation (15), so entsteht linker Hand

$$\alpha_x^p R_x^p H_H.$$

Rechter Hand tritt nur ein Glied auf, welches den Factor H nicht enthält; es ist die mit 2^p multiplicirte Determinante W der W_{lm}

$$W = \left| \sum_n \left(\frac{\partial R_x}{\partial x_m} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_l} + \frac{\partial R_x}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} \right) f_n - \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_{nk} \alpha_x \right|.$$

Aber diese Determinante erkennt man leicht als das Product zweier Factoren. Setzt man nämlich

$$(16) \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \eta_1}{\partial x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \eta_p}{\partial x_p} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = | \alpha_i f_k + \alpha_k f_i - f_{ik} \alpha_x |,$$

so wird

$$W = D^2 \Delta.$$

Für Δ erhält man weiter

$$\Delta = (-1)^p \begin{vmatrix} \alpha_x f_{ik} & \alpha_i f_i \\ f_k & 1 & 0 \\ \alpha_k & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und, wenn man die letzte Horizontal- und Verticalreihe mit $2\alpha_x$ multiplicirt, und dann die ersten p Reihen, mit den $x_1 \dots x_p$ multiplicirt, von dieser subtrahirt

$$\Delta = (-1)^p \frac{1}{(2\alpha_x)^2} \{ \alpha_x^{p+2} H - 6f \alpha_x^p R_x \}.$$

Hiermit ist zunächst die identische Relation

$$(17) \quad \alpha_x^p R_x^p H_H = AH - (-1)^p \alpha_x^{p-2} \cdot 3 \cdot 2^{p-1} D^2 R_x f$$

erwiesen, welche für alle cubischen Formen gilt. Man kann dieselbe durch eine etwas andere Bildung der Determinante der auf der rechten Seite stehenden Grössen nicht unerheblich vereinfachen. Setzt man zur Abkürzung

$$p_{lm} = \sum_{n,k} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_m}{\partial x_n} f_{nk}, \quad r_{lm} = \frac{\partial^2 R_x}{\partial x_l \partial x_m}, \quad \frac{\partial \eta_n}{\partial x_m} f_n = s_m, \\ \alpha_m H + 2s_m = q_m,$$

so wird

$$\alpha_x^p R_x^p H_H = \begin{vmatrix} (Hr_{lm} - 2p_{lm})\alpha_x, & \frac{\partial R}{\partial x_m}, & -q_m \\ \frac{\partial R}{\partial x_l}, & 1 & 0 \\ -q_l & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

oder wegen

$$\sum_m p_{lm} x_m = (p-1) H \frac{\partial R_x}{\partial x_l}, \\ \sum_m r_{lm} x_m = (p-2) \frac{\partial R}{\partial x_l},$$

$$(18) \quad \alpha_x^p R_x^p H_H = - \frac{(p-1) R_x}{p \alpha_x H} \begin{vmatrix} (Hr_{lm} - 2p_{lm})\alpha_x, & \alpha_m H + 2s_m \\ \alpha_l H + 2s_l & 0 \end{vmatrix},$$

so dass der Factor R_x rechts ausgesondert ist. Der dabei eingeführte Nenner H lässt sich wieder entfernen. Entwickelt man nämlich die Determinante nach Potenzen von H , so erhält man für das von H freie Glied

$$(19) \quad 2^{p+1} (-1)^{p-1} \alpha_x^{p-1} \begin{vmatrix} p_{lm} s_l \\ s_m & 0 \end{vmatrix} = (-1)^p 3 \cdot 2^p \alpha_x^{p-1} D^2 f H.$$

Multiplicirt man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & h_i \\ f_k & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} h_x H,$$

mit D^2 , und setzt

$$\sum_n \frac{\partial \eta_n h_n}{\partial x_l} = k_l,$$

so erhält man

$$(20) \quad \begin{vmatrix} p_{lm} k_l \\ s_m & 0 \end{vmatrix} = -\frac{D^2}{2} h_x H,$$

und kann zugleich rechter Hand Dh_x als ganze Function von x und den völlig willkürlichen Grössen k ausdrücken. Multiplicirt man endlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{ik} & f_i & h_i \\ f_k & 0 & 0 \\ h_i & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} (h_x^2 H + 3f R_h),$$

mit D^2 , so ergibt die für die völlig willkürlichen Grössen k gültige Formel

$$\begin{vmatrix} p_{lm} & s_l & k_l \\ s_m & 0 & 0 \\ k_l & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{D^2}{4} (h_x^2 H + 3f R_h),$$

dass auch alle ersten Unterdeterminanten der in (19) links auftretenden Determinante noch von der Form

$$\beta H + \gamma f$$

sind. Aus diesen und aus Determinanten von der Form (20) ist aber der Coefficient von H in der Entwicklung der Determinante rechter Hand in (18) zusammengesetzt. Man kann daher die Identität (17) auch in der folgenden Form geben

$$(17a) \quad a_x^2 R_x^{p-1} H_H = A' f + B' H. *)$$

Man kann endlich die Functionaldeterminante (16) noch umformen. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_l} &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{ni}}{\partial x_l} f_{ni} + y_{ni} f_{nli} \right), \\ 0 &= \sum_n \left(\frac{\partial y_{nk}}{\partial x_l} f_{ni} + y_{nk} f_{nli} \right), \end{aligned}$$

erhält man

*) Dass diese Identität bei beliebigem p nicht weiter reducirt werden kann, geht aus dem unten erwähnten Falle $p=2$ hervor.

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} \alpha_i = \sum_n \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} f_{ni} + \eta_n f_{nii} \right).$$

Berechnet man hieraus D , so ergibt sich leicht

$$DH = (-1)^p \begin{vmatrix} \sum_n (\eta_n f_{nik}) & \alpha_i \\ \frac{\partial H}{\partial x_k} & 1 \end{vmatrix}.$$

Beachtet man, dass

$$\sum_{n,i} \eta_n f_{nii} x_i = \alpha_i H$$

wird, so ergibt sich hieraus

$$(21) \quad HD = (-1)^p (p-1) \begin{vmatrix} \sum_n (\eta_n f_{nik}) \end{vmatrix},$$

wo also rechter Hand die Hesse'sche Form von f , gebildet in Bezug auf die Grössen η , steht. Da die Benutzung der letzteren Gleichung den Nenner H wieder einführen würde, ist es zweckmässiger, statt derselben die Gleichung

$$-\alpha_x DH = (-1)^p \begin{vmatrix} \sum_n (\eta_n f_{nik}) & \alpha_i & \alpha_i H \\ \frac{\partial H}{\partial x_k} & 1 & pH \\ \alpha_k & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

zu bilden, aus welcher unmittelbar

$$(22) \quad \alpha_x D = (-1)^p (p-1) R_\eta$$

entsteht.

Aus der Identität (17) oder (17a) ergeben sich einige allgemeine Bemerkungen. Verschwinden H und H_H , d. h. betrachtet man die parabolischen Punkte von H , so muss entweder f oder $D^2 R_x$ verschwinden. Im ersten Falle hat man die eigentliche parabolische Curve von H . R_x dagegen kann nur verschwinden, wenn H mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet, d. h. für die M_{p-n} der Knotenpunkte von H . Zugleich wird für $H=0$, wegen

$$\eta_k = \sum \alpha_i y_{ik} = \mu y_k \alpha_y,$$

$$(23) \quad \alpha_x D = (-1)^p (p-1) \mu^{p-1} (\alpha y)^{p-1} R_y,$$

so dass dann auch D verschwindet. Und soll umgekehrt für $H=0$ D verschwinden, ohne dass R_x Null wird, so muss der Punkt y ein Knotenpunkt von H sein. Vertauscht man andererseits in der Identität (17) x mit y , was wegen der Reciprocität der Form H geschehen darf,

und versteht alsdann unter y irgend einen Punkt der singulären parabolischen M_{p-3} , welche oben mit P bezeichnet wurde, so verschwindet R_y nicht, dagegen verschwindet jetzt wegen $R_x = 0$ nach (23) die Functionaldeterminante D . Man hat also nach (17) den Satz:

Die Mannigfaltigkeit P gehört der Fläche $H_H = 0$ doppeltzählend an, was übrigens auch daraus geschlossen werden kann, dass sie aus linearen Punktreihen mit constanter Tangentenebene gebildet wird.

In der Identität (17a) kann man nicht allgemein den links auftretenden Factor von H_H entfernen, obgleich derselbe die völlig willkürlichen Grössen α enthält, ohne dass die rechte Seite aufhört, von der Form $Af + BH$ zu sein. Für eine binäre cubische Form wird nämlich R_x linear, und man findet aus (17a)

$$\alpha_x^2 R_x H_H = H \begin{vmatrix} g_{im} \alpha_i \\ \alpha_m & 0 \end{vmatrix} + 2DH \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_m} & \alpha_m \\ x_i & 0 \end{vmatrix} - 6D^2 f.$$

Hier erhält man aber, für $f = (a_x)^3$,

$$D = 18(a\alpha)(b\alpha)(ab)^2,$$

$$R_x = 6(a\alpha)^2 a_x,$$

während die Factoren von H und $2DH$ in der eben angegebenen Identität werden

$$6 \cdot 36 \cdot (ab)(cb)(a\alpha)^2(c\alpha)^2 b_x \text{ und } 6(a\alpha)^2 a_x.$$

Nach einigen einfachen Umformungen entsteht demnach, wenn $\alpha_1 = -z_2$, $\alpha_2 = +z_1$ gesetzt wird

$$a_x \alpha_x^2 (zx)^2 H_H = \left[\frac{1}{2} H_{(x)} f_{(x)} \sum_i z_i \frac{\partial H}{\partial x_i} - H_{(x)}^2 f_{(x)} \right] - 54(zx) H_{(x)} Q_{(x)},$$

wo

$$Q_{(x)} = (ab)^2 (cb) a_x c_x^2;$$

welche Gleichung nur zeigt, wie aus dem rechter Hand eingeklammerten, für $z = x$ verschwindenden, Terme der Factor (zx) entfernt werden kann; H_H ist übrigens die Discriminante der binären cubischen Form.

Für eine Form f mit mehr als zwei homogenen Variablen muss dagegen der Factor $\alpha_x^2 R_x^{p-1}$ entfernt werden können. Verschwinden nämlich f und H , so muss auch H_H verschwinden. Denn R_x kann nur verschwinden, wenn alle ersten Unterdeterminanten von H Null sind; dann verschwindet aber auch H_H . Demnach verschwindet H_H überall, wo f und H verschwinden. Nun hat aber Herr Nöther*) untersucht, unter welchen Bedingungen hieraus eine Darstellung von der Form (1) folgt. Setzt man voraus, dass f überhaupt keine singu-

*) Diese Annalen Bd. VI, S. 351—359.

lären Elemente enthält, was, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, geschehen darf, so ist, da eine specielle Beziehung von f und H auch in den singulären Punkten von H im allgemeinen nicht stattfindet, hierzu erforderlich, dass H_H mindestens q -fach verschwindet, wenn H längs einer f und H gemeinsamen Mannigfaltigkeit q -fach Null ist. Nun gilt aber der allgemeine, leicht zu beweisende Satz:

Wenn eine Form von p homogenen Variabeln einen q -fachen Knotenpunkt hat, so hat ihre Hesse'sche Form im allgemeinen einen $pq - 2(p - 1)$ -fachen Knotenpunkt, dessen „Knotenkegel“ aus zwei Theilen besteht, von denen der erstere mit dem Knotenkegel von f zusammenfällt, während der zweite aus dem „Hesse'schen Kegel“ des letzteren gebildet wird).*

Für $p = 5$ tritt übrigens nur eine einfache Mannigfaltigkeit von Knotenpunkten von H auf, so dass auf f selbst nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte von H liegt.

München, 8. März 1886.

*) Für $p = 4$ findet man diesen Satz in der Arbeit des Herrn Rohn, diese Annalen Bd. XXIII, bereits ausgesprochen.