

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND IX.

I. *Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme; von G. Kirchhoff und G. Hansemann.*

(Der Akademie der Wissensch. zu Berlin vorgelegt am 20. Nov. 1879.)

Es soll im Folgenden eine neue Methode auseinander gesetzt werden, die wir angewandt haben, um die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme, oder vielmehr das Verhältniss dieser Leitungsfähigkeit zu dem Producte aus specifischer Wärme und Dichtigkeit zu bestimmen. Die Resultate der Messungen dieser Grösse, die bisher ausgeführt sind, zeigen grosse Unterschiede; der Grund hiervon kann unserer Meinung nach darin liegen, dass bei den meisten derselben die Wärmemengen, die der dem Versuche unterworfenen Körper nach aussen hin abgab oder von aussen aufnahm, nicht in genügender Weise in Rechnung gezogen sind; mit Hülfe des Begriffs der äusseren Wärmeleitungsfähigkeit, der zu diesem Zwecke eingeführt worden ist, kann derselbe nur unvollkommen erreicht werden. Die Ueberlegenheit der neueren, namentlich der von F. Neumann angegebenen Methoden über die älteren beruht vorzugsweise darauf, dass bei ihnen die Ableitung der Wärme nach aussen von geringerem Einfluss auf den Werth ist, der sich für die zu bestimmende Grösse ergibt. Immerhin findet aber auch bei ihnen ein solcher Einfluss in erheblichem Maasse statt. Bei der Methode, die wir angewandt haben, glauben wir diesen Einfluss noch weiter herabgedrückt zu haben, und dadurch zu einem zuverlässigern Werthe geführt zu sein, als die bisher gewonnenen sind.

Der ideale Fall, den wir bei unseren Versuchen näherungsweise zu verwirklichen gesucht haben, ist dieser: Das leitende Medium ist nur durch eine Ebene begrenzt und hat bis zu einem gewissen Augenblick überall dieselbe Temperatur; in diesem Augenblick wird in der Grenzfläche eine andere constante Temperatur erzeugt. Kennt man die Aenderung, welche die Temperatur in einem bestimmten Abstände von der Grenzfläche nach einem bestimmten Zeitraume erfahren hat, so kann man aus dem Verhältniss dieser zur Temperaturänderung in der Grenzfläche den Quotienten aus dem Producte der specifischen Wärme und der Dichtigkeit in die Leitungsfähigkeit des Mediums nach einer bekannten einfachen Formel berechnen.

Wir benutzten eine Eisenmasse von der Gestalt eines Würfels von 140 mm Seite; eine Kante war vertical gestellt, und gegen eine Seitenfläche wurde, nachdem der Würfel längere Zeit sich selbst überlassen worden war, aus einer Brause ein kräftiger Wasserstrom geleitet, der um einige Grade wärmer oder kälter war als der Beobachtungsraum. Es war dafür gesorgt, dass die Temperatur in einigen Punkten der geraden Linie, die in der Mitte der bespritzten Seitenfläche senkrecht auf dieser steht, gemessen werden konnte; zu jedem dieser Punkte führt nämlich ein verticaler, enger Canal, dazu bestimmt, die eine Löthstelle einer aus dünnen Drähten von Neusilber und Kupfer gebildeten Thermokette aufzunehmen, deren andere Löthstelle in einer constanten Temperatur sich befand, und die mit einem Spiegelgalvanometer verbunden werden konnte. Es war nöthig, an der Scala des Galvanometers Ablesungen zu machen, während der Magnet desselben in lebhafter Bewegung war; das wurde ermöglicht durch einen Chronographen, mit dessen Hülfe der Beobachter die Zeitpunkte markirte, in denen der Verticalfaden des Fernrohrs durch gewisse Theilstriche ging, deren Zahlen er gleichzeitig einem Gehülfen dictirte.

Mannichfaltige Betrachtungen waren nöthig, um die Verschiedenheiten zwischen der hergestellten Anordnung

und dem vorher bezeichneten idealen Falle zu berücksichtigen.

Es war zunächst der Einfluss zu untersuchen, den die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels auf die Bewegung der Wärme in ihm ausübt. Dieser nur unbedeutende Einfluss lässt sich mit der nöthigen Genauigkeit berechnen, wenn man auch nur rohe Näherungswerthe für die innere und die äussere Leitungsfähigkeit des Eisenwürfels zu Hülfe zieht.

Näherungsweise wird die Temperatur der bespritzten Vorderfläche des Würfels eine constante sein; doch hielten wir es für geboten, uns von der Voraussetzung dieser Constanz unabhängig zu machen. Wir erreichten das, indem wir bei jedem Versuch eine fortlaufende Beobachtungsreihe über die Temperatur in einem Punkte anstellten, der nur 5,46 mm von der Vorderfläche entfernt ist, eine Beobachtungsreihe, die fast bis zu dem Zeitpunkte fortgesetzt wurde, in dem die Temperatur in einem entferntern Punkte beobachtet werden musste. Es dienten hierbei zwei ganz gleiche Thermoketten, von denen zuerst die eine, dann die andere mit dem Galvanometer in Verbindung gesetzt war. Diese Methode gewährt noch einen andern Nutzen. Durch die Galvanometerbeobachtungen kann nur ermittelt werden die Temperatur der in den Canal des Würfels eingesenkten Löthstelle der Thermokette, während in den aus der Theorie der Wärmeleitung entwickelten Gleichungen die Temperatur vorkommt, welche am Orte der Mitte des Bodens des Canals zur selben Zeit stattfinden würde, wenn der Canal und die Thermokette gar nicht vorhanden wären. Diese beiden Temperaturen sind, genau genommen, nicht dieselben. Der Fehler, den man begeht, indem man die eine für die andere setzt, verliert, wie zu zeigen versucht werden soll, seinen Einfluss bei der genannten Versuchsmethode.

Aus den Galvanometerbeobachtungen ist zunächst auf die electromotorische Kraft der benutzten Thermokette und aus dieser auf die Temperatur der eingesenkten Löth-

stelle zu schliessen. Misst man die Ablenkung der Gleichgewichtslage der Galvanometernadel durch Ströme von verschiedener Intensität, so ist bei unserm Instrumente diese Intensität, also bei gleichbleibendem Widerstande auch die electromotorische Kraft, proportional mit der der Ablenkung entsprechenden Zahl von Scalentheilen; eine Abweichung von dieser Proportionalität haben wir bei unserm Galvanometer nicht auffinden können. Will man die electromotorische Kraft aus Beobachtungen bestimmen, bei denen die Galvanometernadel in Bewegung ist, so muss man zur Differentialgleichung der Bewegung der Nadel zurückgehen und es müssen die in dieser vorkommenden Constanten durch vorgängige Versuche bestimmt sein. Zu diesen Constanten gehört die Schwingungsdauer und die Dämpfung. Wir fanden es nöthig, noch eine Constante einzuführen und zu bestimmen. Die Nadel unseres Galvanometers bestand aus einem nahe astatischen System, und ein nicht unerheblicher Theil der Richtkraft rührte von dem Aufhängungsfaden her; die elastische Nachwirkung dieses machte sich bei den Beobachtungen in sehr deutlicher Weise geltend. Mit befriedigendem Erfolge haben wir versucht, den Einfluss der elastischen Nachwirkung zu berücksichtigen und unschädlich zu machen mit Hülfe der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie derselben. Es führt diese eine neue Constante ein, die durch vorläufige Versuche bestimmt werden musste.

Die electromotorische Kraft einer Thermokette bei einer Temperaturdifferenz der Löthstellen von wenigen Graden pflegt als proportional mit dieser Temperaturdifferenz angenommen zu werden. Die Beziehungen, welche Hr. Avenarius bei einigen Thermoketten zwischen der electromotorischen Kraft und den Temperaturen ihrer Löthstellen gefunden hat, zeigten uns aber, dass die Annahme jener Proportionalität bei unseren Messungen einen nicht zu vernachlässigenden Fehler herbeiführen konnte. Wir haben daher die Form des Avenarius'schen Gesetzes für

unsere Thermoketten als gültig angenommen und die darin vorkommenden Constanten durch besondere Versuche bestimmt, bei denen die Temperaturen mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurden. Nach der so hergeleiteten Gleichung haben wir dann bei den Wärmeleitungsversuchen die Temperaturdifferenz der Löthstellen der Thermoketten aus ihrer electromotorischen Kraft berechnet.

Bei diesem kurzen Bericht über den Gang unserer Untersuchung ist ein Punkt noch zu erwähnen. Wir haben bei derselben, wie es bei ähnlichen Untersuchungen zu geschehen pflegt, zunächst angenommen, dass die Leitungsfähigkeit und das Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit von der Temperatur unabhängig sind, während thatsächlich diese beiden Grössen mit der Temperatur sich ändern. Bei Rücksicht hierauf muss man die Frage stellen, für welche Temperatur der Werth der Leitungsfähigkeit (und der Werth des Verhältnisses dieser zu dem Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit) gilt, der ohne diese Rücksicht aus den Beobachtungen berechnet ist. Bei der von uns gewählten Methode lässt sich diese Frage beantworten, wenn man annimmt, dass jene beiden Grössen innerhalb des in Betracht kommenden Temperaturintervalls lineare Functionen der Temperatur sind und sich nur wenig ändern. Mit Hülfe der Gleichung, die sich hierbei ergibt, und bei Benutzung einer Angabe von Bède über die specifische Wärme des Eisens bei verschiedenen Temperaturen haben wir aus unseren Beobachtungen abgeleitet, dass die Leitungsfähigkeit des Eisens, dividirt durch das Product aus seiner specifischen Wärme und seiner Dichtigkeit, bei der Temperatur ϑ

$$= 16,94 - 0,034(\vartheta - 15)$$

ist, wenn die Temperatur nach Celsius'schen Graden gemessen wird, und die Einheiten der Zeit und der Länge Secunde und Millimeter sind. Dabei muss aber bemerkt werden, dass dem Coëfficienten von ϑ nur eine geringe

Sicherheit zukommt, da bei unseren Versuchen die Temperatur nur in engen Grenzen sich bewegte.

Von den Ergebnissen früherer Messungen stimmt mit dem unsrigen am besten das von H. Weber¹⁾ gefundene überein, nach dem jene Grösse bei der Temperatur von $39^{\circ}\text{C.} = 16,97$ ist. Grössere Abweichungen zeigen die Resultate von F. Neumann, Ångström und Forbes, soweit sie mit dem unsrigen verglichen werden können. Ob verschiedene Eisensorten bedeutende Unterschiede der in Rede stehenden Grösse darbieten, müssen spätere Untersuchungen zeigen. Um das von uns benutzte Eisen einigermaßen zu charakterisiren, möge angeführt werden, dass es aus den Eisenwerken der Dortmunder Union herrührender Puddelstahl ist, und dass die chemische Analyse in ihm ergeben hat:

0,129 Procent Kohle
und 0,080 „ Silicium.

Ist u die Temperatur eines Körpers im Punkte (x, y, z) zur Zeit t , c das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, k die Leitungsfähigkeit, so ist:

$$(1) \quad c \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z},$$

oder, wenn man:

$$\frac{k}{c} = a$$

setzt und c und k als constant annimmt:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Es bilde der Körper einen Würfel, dessen Kanten die Länge l haben, und die Gleichungen seiner Seitenflächen seien:

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \quad x = l \quad y = l \quad z = l.$$

1) Weber, Pogg. Ann. **146**. p. 257. 1872.

Es sei ferner bis zum Augenblick $t = 0$ überall $u = 0$, und von diesem Augenblick an $u = 1$ in der Fläche $z = 0$, während die fünf anderen Seitenflächen ihre Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null ausstrahlen. Neben der partiellen Differentialgleichung (2) hat dann u die Bedingungen zu erfüllen, dass:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } t = 0 & u = 0 \\ \text{für } x = 0 & \frac{\partial u}{\partial x} = hu, \\ \text{„ } y = 0 & \frac{\partial u}{\partial y} = hu, \\ \text{„ } z = 0 & u = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{für } x = l & \frac{\partial u}{\partial x} = -hu, \\ \text{„ } y = l & \frac{\partial u}{\partial y} = -hu, \\ \text{„ } z = l & \frac{\partial u}{\partial z} = -hu \end{array} \right.$$

ist, wo h eine Constante, nämlich das Verhältniss der äussern zur innern Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Aufgabe, diesen Forderungen gemäss u zu bestimmen, lässt nur eine Lösung zu; man kann diese finden, indem man u gleich einer Reihe setzt, die nach aufsteigenden Potenzen von h fortschreitet. Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, die beiden ersten Glieder dieser Reihe zu ermitteln. Demnach setze man:

$$(4) \quad u = U_0 + h U_1.$$

Die Forderungen, die dann für U_0 sich ergeben, erfüllt man, indem man U_0 als eine Function der beiden Variablen z und t annimmt, die der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

und den Bedingungen genügt, dass:

$$\begin{array}{ll} \text{für } t = 0, & U_0 = 0 \\ \text{für } z = 0 & U_0 = 1, \quad \text{für } z = l \quad \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0 \end{array}$$

ist. Man setze:

$$U(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Diese Function spielt bei den hier auszuführenden Rechnungen eine grosse Rolle; wir haben bei diesen die von Kramp für sie berechnete Tabelle benutzt.

Es hat $U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$ die Eigenschaft, dass:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{und} \quad \text{für } t=0 \quad U=0,$$

$$\text{für } z=0 \quad U=1, \quad \text{für } z=\infty \quad U=0$$

ist. Daraus folgt:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{2l-z}{2\sqrt{at}}\right) - U\left(\frac{4l-z}{2\sqrt{at}}\right) + \\ \quad - U\left(\frac{2l+z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{4l+z}{2\sqrt{at}}\right) - \dots \end{array} \right.$$

oder, wie wir schreiben wollen:

$$U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R.$$

Es war nöthig, das hierdurch definirte R für gewisse Werthe der darin vorkommenden Argumente zu berechnen. Indem wir Millimeter und Secunde zu Einheiten der Länge und der Zeit nahmen, konnten wir als Näherungswerth von a 16,5 wählen; l hatten wir = 140 zu setzen. Der kleinste Werth von z , der in Betracht kam, war 5,46; für ihn und alle Werthe von t , die ins Auge zu fassen waren, ergab sich R verschwindend klein; ferner fand sich:

für $z = 44,65$	$t = 145$	$R = 0,00067$
„ $= 44,65$	$= 175$	$= 0,00192$
„ $= 71,26$	$= 145$	$= 0,00254$

Zur Bestimmung von U_1 hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right),$$

$$\text{für } t=0 \quad U_1 = 0,$$

$$\text{für } x=0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = U_0, \quad \text{für } x=l \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -U_0,$$

$$\text{„ } y=0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = U_0, \quad \text{„ } y=l \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -U_0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad U_1 = 0, \quad z = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -U_0.$$

Um ihnen zu genügen, setze man:

$$U_1 = U_x + U_y + U_z,$$

wo U_x eine Function von x, z, t , U_y eine Function von y, z, t und U_z eine Function von z, t sein soll; jede dieser Functionen soll die für U_1 aufgestellte partielle Differentialgleichung erfüllen und sowohl für $t = 0$ als für $z = 0$ verschwinden. Uebersies muss dann sein:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} = U_0, \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} = -U_0,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } y = 0 \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = U_0, \quad \text{für } y = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = -U_0,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } z = l \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = -U_0.$$

Um U_x zu finden, muss man zunächst eine Function von x, z, t , die V genannt werden möge, ermitteln, für welche:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right),$$

$$\text{für } t = 0 \quad V = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f(z, t), \quad \text{für } x = \infty \quad V = 0,$$

$$,, \quad z = 0 \quad V = 0, \quad ,, \quad z = \infty \quad V = 0$$

ist, wo $f(z, t)$ eine gegebene Function von z und t bedeutet, die für $z = \infty$ verschwindet. Die folgende Erwägung lehrt dieses V kennen. Es ist:

$$\frac{1}{t} e^{-\frac{x^2+z^2}{4at}}$$

eine Lösung der in Rede stehenden partiellen Differentialgleichung; eine allgemeinere erhält man, wenn man hier $t-t'$ für t , $z-z'$ oder $z+z'$ für z setzt, den Ausdruck, der dadurch entsteht, mit einer willkürlichen Function von z' und t' mal $dz' dt'$ multiplicirt und zwischen constanten

Grenzen nach z' und t' integrirt. Der Differentialgleichung wird daher auch genügt durch:

$$V = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^\infty dt' dz' f(z', t') \frac{1}{t-t'} \left(e^{-\frac{x^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2 + (z+z')^2}{4a(t-t')}} \right),$$

da der Theil von $\frac{\partial V}{\partial t}$, der in Folge davon auftritt, dass die obere Grenze der Integration nach t' nicht constant, sondern t ist, verschwindet. Dieses V erfüllt zugleich die Bedingungen, die für $t=0$, $z=0$, $x=\infty$ und $z=\infty$ aufgestellt sind; es genügt auch der für $x=0$ geltenden Bedingung, wie die folgende Betrachtung zeigt. Es ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4a\pi} \int_0^t \int_0^\infty dt' dz' f(z', t') \frac{x}{(t-t')^2} \left(e^{-\frac{x^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2 + (z+z')^2}{4a(t-t')}} \right).$$

Wenn x verschwindet, so wird der unter den Integralzeichen stehende Ausdruck gleich Null, es sei denn, dass zugleich $t-t'$ und $z-z'$ verschwinden; für ein unendlich kleines x ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z, t)}{4a\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dt dz}{t^2} e^{-\frac{x^2 + z^2}{4at}},$$

oder wenn man die Integration nach z ausführt, indem man benutzt, dass

$$\int_0^\infty dz e^{-a^2 z^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\pi},$$

$$\text{ist:} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z, t)}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \frac{x dt}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4at}}.$$

Führt man hier an Stelle der Integrationsvariablen t eine neue durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = s$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z, t)}{\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty x ds e^{-\frac{x^2}{4a} s^2} = f(z, t), \text{ wie zu beweisen war.}$$

Nun setze man:

$$f(z, t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

führe statt des Zeichens V das Zeichen $V(x)$ ein, sodass:

$$(6) \quad V(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^\infty dt' dz' U\left(\frac{z'}{2\sqrt{at'}}\right) \frac{1}{t-t'} \left(e^{-\frac{x^2 + (x-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2 + (x+z')^2}{4a(t-t')}} \right),$$

und mache:

$$(7) \quad W = W(z) = V(x) + V(l-x) + V(2l-x) + V(3l-x) + \\ + V(l+x) + V(2l+x) + V(3l+x) + .$$

Dieses W genügt dann der Differentialgleichung, der U_x genügen soll, und es ist:

$$\text{für } t=0 \quad W=0$$

$$\text{für } x=0 \quad \frac{\partial W}{\partial x} = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right), \quad \text{für } x=l \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

$$,, \quad z=0 \quad W=0 \quad , \quad ,, \quad z=\infty \quad W=0.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichung (5) folgt hieraus, dass alle Forderungen, die U_x erfüllen soll, erfüllt werden durch:

$$U_x = W(z) + W(2l-z) - W(4l-z) + \\ - W(2l+z) + W(4l+z) - .$$

Aus U_x erhält man U_y , indem man y an die Stelle von x setzt.

Um U_z zu erhalten, muss man zunächst eine Function von z und t , die Z oder auch $Z(z)$ genannt werden möge, aufsuchen, die die Bedingungen erfüllt:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}, \quad \text{für } t=0 \quad Z=0,$$

$$\text{für } z=0 \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = f(t), \quad \text{für } z=\infty \quad Z=0,$$

wo $f(t)$ eine gegebene Function von t bedeutet. Es geschieht das, wenn:

$$Z = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{1}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

gesetzt wird. Der Differentialgleichung wird nämlich genügt, da:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{z^2}{4at}}$$

eine Lösung derselben ist; es verschwindet Z für $t=0$ und für $z=\infty$; endlich ist:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{z}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}};$$

der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet für $z=0$, wenn nicht zugleich $t-t'=0$ ist; daher ist für ein unendlich kleines z :

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{f(t)}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \frac{z dt}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4at}} = f(t).$$

Nun bezeichne man den in der Gleichung (5) gleich U_0 gesetzten Ausdruck durch:

$$U_0(z, t),$$

mache: $f(t) = U_0(l, t),$ sodass:

$$Z(z) = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t U_0(l, t') \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t'')}}$$

wird; es ist dann:

$$U_z = Z(l-z) - Z(3l-z) + Z(5l-z) - \\ - Z(l+z) + Z(3l+z) - Z(5l+z) +$$

Numerische Rechnungen waren nur auszuführen für $x = \frac{l}{2}$ und $y = \frac{l}{2}$; für diese Werthe von x und y ist:

$$U_x = U_y, \quad \text{also:} \quad U_1 = 2U_x + U_z,$$

und es vereinfacht sich die Gleichung (7) in:

$$W(z) = 2 \left(V\left(\frac{l}{2}\right) + V\left(\frac{3l}{2}\right) + V\left(\frac{5l}{2}\right) + \dots \right).$$

Bei den Werthsystemen von z und t , die in Betracht zu ziehen waren, war U_z ganz zu vernachlässigen, und es

reichte in jeder der für U_x und $W(z)$ aufgestellten Reihen die Berücksichtigung des ersten Gliedes aus, sodass:

$$U_1 = 4 V \left(\frac{l}{2} \right)$$

gesetzt werden konnte, wo $V \left(\frac{l}{2} \right)$ aus (6) zu ermitteln war.

Führt man hier an Stelle von z' die neue Integrationsvariable s' durch die Gleichung:

$$z' = 2 \sqrt{at' s'}$$

ein und setzt zugleich:

$$z = 2 \sqrt{at' s},$$

so hat man also:

$$U_1 = - \frac{4 V a}{\pi} \int_0^t dt' \frac{V t'}{t-t'} e^{-\frac{l^2}{16a(t-t')}} \\ \int_0^\infty ds' U(s') \left(e^{-\frac{(s-s')^2}{t-t'}} - e^{-\frac{(s+s')^2}{t-t'}} \right).$$

Dieses Doppelintegral ist für die Werthe von z und t , für die seine Kenntniss nöthig war, durch mechanische Quadratur mit Hülfe graphischer Darstellung berechnet. Für $z = 5,46$ mm und alle Werthe von t , die in Betracht kamen, konnte es gleich Null gesetzt werden, und es ergab sich:

für $z = 44,65$	$t = 145$	$U_1 = - 5,21$
$= 44,65$	$= 175$	$= - 7,77$
$= 71,26$	$= 145$	$= - 5,62.$

Um hiernach der Gleichung (4) gemäss u berechnen zu können, mussten wir noch die Grösse h bestimmen. Es möge hier die Beschreibung der Versuche, durch welche das geschehen ist, angeschlossen werden.

Es war der Würfel in seiner ganzen Masse nahezu gleichmässig über die Temperatur seiner Umgebung erwärmt. Die eine Löthstelle einer mit dem Galvanometer verbundenen Thermokette war in der Nähe desselben, vor seiner Strahlung geschützt, aufgestellt, die andere in einen

Canal des Würfels, der in seinem Mittelpunkte endigte, eingeführt. Ist v der Ueberschuss der Temperatur im Punkte (x, y, z) zur Zeit t über die Temperatur der Umgebung, so ist:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{und für } x = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = hv, \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -hv$$

$$,, \quad y = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = hv, \quad ,, \quad y = l \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -hv$$

$$,, \quad z = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = hv, \quad ,, \quad z = l \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -hv.$$

Ist t so gross, dass von der Reihe, durch welche v sich darstellen lässt, wenn noch der Anfangszustand als gegeben betrachtet wird, nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht, so ist hiernach:

$$= \text{const.} \cdot e^{-3\lambda^2 at} \left(\cos \lambda x + \frac{h}{\lambda} \sin \lambda x \right) \left(\cos \lambda y + \frac{h}{\lambda} \sin \lambda y \right) \left(\cos \lambda z + \frac{h}{\lambda} \sin \lambda z \right)$$

wo λ die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$(8) \quad \text{tg } \frac{\lambda l}{2} = \frac{h}{\lambda}$$

bedeutet. Für beliebige feste Werthe von x, y, z ist daher:

$$(9) \quad v = \text{const.} \cdot e^{-3\lambda^2 at};$$

für den Mittelpunkt des Würfels, d. h. für den Punkt $x = y = z = \frac{l}{2}$, gilt diese Gleichung schon bei kleineren Werthen von t , als für andere Punkte, da für ihn die Coëfficienten der drei Glieder, welche in jener Reihe auf das erste folgen, verschwinden.

Da bei der Bestimmung von h eine geringe Genauigkeit ausreicht, so konnte die Galvanometerablenkung in einem Augenblick unmittelbar als Maass für den entsprechenden Werth von v dienen. War beobachtet, wie die Ablenkung mit der Zeit abnahm, so konnte mit Hülfe des schon benutzten Näherungswerthes von a aus (9) λ , und dann aus (8) h gefunden werden.

Bei einem Versuche dieser Art sank die Galvanometerablenkung in der Zeit von 165 Minuten von 361,3 Scalentheilen auf 187,0; und zwar so, dass in gleichen Zeitintervallen der Logarithmus der Ablenkung sehr nahe um gleich viel abnahm; setzt man wieder $\alpha = 16,5$, so folgt hieraus $\lambda = 0,00116$, und weiter, da $l = 140$, $h = 0,000\,094\,3$.

Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{lll} \text{für } z = 44,65, & t = 145, & R + h U_1 = 0,00018 \\ & = 44,65, & = 175, & = 0,00118 \\ & = 71,26, & = 145, & = 0,00201 \end{array}$$

Die im vorigen Abschnitt untersuchte, durch die Gleichungen (2) und (3) definirte Funktion u von den Argumenten x, y, z, t möge nun durch $u(t)$ bezeichnet werden. Setzt man:

$$(10) \quad v = \int_0^t f(t') dt' \frac{\partial u(t-t')}{\partial t},$$

wo $f(t)$ eine beliebige Function von t bedeutet, so ist dann

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

$$\text{für } t = 0 \quad v = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = h v, \quad \text{für } x = l \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -h v,$$

$$,, \quad y = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = h v, \quad ,, \quad y = l \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -h v,$$

$$,, \quad z = 0 \quad v = f(t), \quad ,, \quad z = l \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -h v.$$

Um einzusehen, dass der partiellen Differentialgleichung genügt wird, hat man zu beachten, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwindet, da für diesen Werth von t :

$$u = 0, \text{ also auch } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist; und um zu beweisen, dass $v = f(t)$ für $z = 0$ ist, ist zu benutzen, dass das Integral:

$$\int \frac{\partial u(t)}{\partial t} dt,$$

genommen von $t = 0$ bis zu irgend einem positiven Werthe von t , für einen unendlich kleinen Werth von z gleich 1 ist.

Nun soll in Beziehung auf $f(t)$ die Annahme gemacht werden, dass:

$$f(t) = C + \varphi(t)$$

ist, wo C eine Constante bedeutet und $\varphi(t)$ als unendlich klein betrachtet werden darf. Nach der im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnung hat man:

$$u(t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1;$$

auch das Glied $R + h U_1$ soll als unendlich klein angesehen werden. Substituirt man diese Werthe von $f(t)$ und $u(t)$ in die Gleichung (10), so erhält man bei Vernachlässigung einer kleinen Grösse höherer Ordnung:

$$(11) \quad v = C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) + \int_0^t \varphi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

Es möge der Werth von z für den vordersten Canal, also 5,46 mm, durch z_0 , und der Werth von v für $x = \frac{l}{2}$, $y = \frac{l}{2}$, $z = z_0$ durch v_0 bezeichnet werden. Für diese Werthe von x , y , z ist, wie erwähnt, $R + h U_1$ als verschwindend zu betrachten; man hat daher:

$$v_0 = C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \int_0^t \varphi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}.$$

Diese Gleichung schreibe man:

$$(12) \quad v_0 = C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \psi(t),$$

indem man:

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

setzt. Bei der hierdurch gegebenen Definition von $\psi(t)$ ist aber:

$$\int_0^t \varphi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t} = \int_0^t \psi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t};$$

denn, bezeichnet man die eine oder die andere Seite dieser Gleichung durch V , so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \text{für } t = 0 \quad V = 0,$$

$$\text{für } z = z_0 \quad V = \psi(t), \quad \text{für } z = \infty \quad V = 0,$$

und diese Gleichungen bestimmen V eindeutig, da aus ihnen folgt, dass, wenn W der Unterschied zweier Functionen ist, die ihnen genügen:

$$\frac{1}{2} \int_{z_0}^{\infty} W^2 dz + a \int_0^t \int_{z_0}^{\infty} \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 dt dz = 0$$

sein muss, welche Bedingung nur durch $W = 0$ erfüllt wird. Die Gleichung (11) wird dadurch:

$$(13) \quad v = C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) + \int_0^t \psi(t') dt' \frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

Wäre es möglich, Temperaturen im Innern des unverletzten Würfels zu beobachten, so würden die Gleichungen (12) und (13) dazu dienen können, um mit Hülfe eines Näherungswerthes von a den genauern Werth dieser Grösse zu berechnen. Es müsste die Temperatur v_0 als Function der Zeit beobachtet sein; die Gleichung (12) gäbe dann $\psi(t)$, nachdem C willkürlich, aber so gewählt wäre, dass $\psi(t)$ klein bleibt; aus der Gleichung (13) wäre dann, nachdem das Integral durch mechanische Quadratur bestimmt wäre, $U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$ zu berechnen und hieraus der genauere Werth von a zu ermitteln. Nun sind in den Würfel aber Canäle gebohrt, in diese sind die Enden von Thermoketten eingeführt, und auf die Temperaturen der Löthstellen dieser können allein die Beobachtungen sich beziehen. Es soll zu zeigen versucht werden, dass die Gleichungen (12) und (13)

in der angegebenen Weise benutzt werden dürfen, auch, wenn man durch v die Temperaturen dieser Löthstellen bezeichnet, gerechnet von der ursprünglichen Temperatur des Würfels. Dabei soll aber nur der Fall ins Auge gefasst werden, dass die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels keinen merkbaren Einfluss auf die Verbreitung der Wärme in ihm haben, das sehr kleine Glied $R + h U_1$ in der Gleichung (13) also vernachlässigt werden darf.

Der Durchmesser eines jeden der Canäle soll als unendlich klein angenommen werden; der Einfluss desselben auf die Temperaturvertheilung in dem Würfel wird sich dann nur auf unendlich kleine Entfernungen von seiner Wand hin erstrecken. Man denke sich eine Fläche s , die die Umgebung des Canals in einer Weite von dem übrigen Theile des Würfels abgrenzt, die klein, aber gross genug ist, um einen Einfluss des Canals auf die Temperaturen jenseits derselben auszuschliessen. Diese Fläche s , deren grösster Theil als eine cylindrische Fläche von kreisförmigem Querschnitt gedacht werden möge, ergänze man zu einer geschlossenen, indem man die Cylinderfläche in die Luft hin verlängert und einen Querschnitt (der durch die Drähte der Thermokette hindurchgeht) hinzufügt. Man stelle sich die Aufgabe, die Wärmebewegung in dem Systeme zu ermitteln, das durch die so gebildete Fläche vollständig begrenzt ist. Die Umgebung des Würfels hat die Temperatur Null; dieselbe Temperatur haben die Querschnitte der Drähte der Thermokette, die zu der begrenzenden Fläche gehören, und man wird annehmen dürfen, dass die ausserhalb des Würfels befindlichen Stücke dieser Drähte ihre Wärme gegen eine Umgebung von derselben Temperatur ausstrahlen. Die Elemente der Fläche s haben diejenigen Temperaturen, die sie zur selben Zeit haben würden, wenn der Canal nicht vorhanden wäre, Temperaturen, die, wie bisher, durch v bezeichnet werden sollen. Bedeutet V die Temperatur irgend eines Punktes des betrachteten Systemes zur Zeit t , so ist V durch v eindeutig

bestimmt, wenn man noch berücksichtigt, dass zur Zeit $t = 0$ das ganze System die Temperatur Null besass; und zwar stellt sich V dar als ein über die Fläche s und das Zeitintervall t zu nehmendes Integral, das sich bezeichnen lässt als eine homogene, lineare Function der Werthe, welche v in der Fläche s und in dem Zeitintervall t annimmt. Jeder dieser Werthe nun lässt sich nach der Taylor'schen Reihe so entwickeln, dass das erste Glied der Werth von v ist, der dem Zeitpunkte t und dem Werthe von z entspricht, der für die Spitze gilt, in die der Canal ausläuft, und die folgenden Glieder die Differentialquotienten dieses Werthes nach t und z enthalten. Es folgt daraus für V eine Reihe, die bezeichnet werden kann als eine homogene, lineare Function von v und seiner Differentialquotienten nach t und z . Das gilt auch, wenn V auf einen Punkt der Löthfläche bezogen wird; also auch, wenn, wie es nun geschehen soll, durch V die aus den Galvanometerbeobachtungen abzuleitende Temperatur der Löthstelle bezeichnet wird, die ein gewisses Mittel aus den Temperaturen der einzelnen Punkte der Löthfläche ist. Die Coëfficienten der einzelnen Glieder dieses V sind ausschliesslich von der Gestalt des Canals und der Gestalt, Lage und Natur des eingesenkten Theiles der Thermokette abhängig; sie sollen als gleich für die verschiedenen benutzten Thermoketten angenommen werden. Fasst man den bezeichneten Ausdruck von V als eine Function der beiden Veränderlichen t und z auf, so hat man:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \text{für } t = 0 \quad V = 0 \quad \text{und für } z = \infty \quad V = 0,$$

da:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ist und v , d. h. bei der in der Gleichung (10) benutzten Bezeichnungsweise:

$$\int_0^t f(t') dt' \frac{\partial U \left(\frac{z}{2 \sqrt{a(t-t')}} \right)}{\partial t},$$

mit allen seinen Differentialquotienten nach t und z für $t = 0$ und für $z = \infty$ verschwinden. Aus diesen Eigenschaften von V folgt aber durch Schlüsse, die mit denen ganz übereinstimmen, durch welche die Gleichungen (12) und (13) abgeleitet sind, dass, wenn man den Werth von V für $z = z_0$ durch V_0 bezeichnet und:

$$V_0 = CU \left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}} \right) + \psi(t)$$

setzt, indem man dem Zeichen $\psi(t)$ eine von seiner früheren verschiedene Bedeutung gibt:

$$V = CU \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right) + \int_0^t \psi(t') dt' \frac{\partial U \left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}} \right)}{\partial t}$$

wird. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von den Gleichungen (12) und (13), abgesehen von dem Fehlen des Gliedes $R + h U_1$, das wir hier als zu vernachlässigen angenommen hatten, nur dadurch, dass V und V_0 an die Stelle von v und v_0 getreten sind.

Es werde nun durch v die von der ursprünglichen Temperatur des Würfels an gerechnete Temperatur der in einen der Canäle eingesenkten Löthstelle einer Thermokette bezeichnet; die Temperatur der zweiten Löthstelle sei die ursprüngliche des Würfels und E die electromotorische Kraft der Thermokette. Die Galvanometerbeobachtungen lehren zunächst dieses E kennen, aus ihm ist auf v zu schliessen. Näherungsweise sind v und E einander proportional; wir fanden es aber nöthig, die Abweichungen von dieser Proportionalität zu berücksichtigen und haben:

$$(14) \quad v = p(E - \mu E^2)$$

gesetzt, wo p und μ von v unabhängige Grössen bedeuten. Bezeichnet man den Werth von E für $v = v_0$ durch E_0 , oder, um seine Abhängigkeit von t anzudeuten, durch $E_0(t)$, so ist ebenso:

$$v_0 = p(E_0(t) - \mu E_0^2(t)).$$

Diese Ausdrücke sind für v_0 und v in die Gleichungen (12) und (13) zu substituiren. Aus der ersteren dann $\psi(t)$ für

alle in Betracht kommenden Werthe von t zu berechnen, wäre lästig; man kann die Mühe verringern, indem man benutzt, dass μ und $\psi(t)$ nur klein sind. Infolge dieses Umstandes kann man in dem Gliede $p \mu E_0^2(t)$ der Gleichung (12):

$$E_0(t) = \frac{C}{p} U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

setzen und erhält dann aus ihr:

$$\psi(t) = p E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) - \mu \frac{C^2}{p} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right).$$

Diesen Werth setze man in die Gleichung (13) und schreibe C an Stelle von $\frac{C}{p}$, indem man diesem Buchstaben eine neue Bedeutung gibt; man findet dann:

$$E - \mu E^2 = C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) + \int_0^t \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) - \mu C^2 U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) \right) dt' \frac{\partial U \frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}}{\partial t}.$$

Auch das neue C kann innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden; es muss nur so gewählt werden, dass:

$$E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

klein ist.

Die gefundene Gleichung wird zur numerischen Rechnung bequemer, wenn man an Stelle von t' eine neue Integrationsvariable, die U genannt werden möge, durch die Gleichung:

$$U = U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)$$

einführt; sie wird dann:

$$\left\{ \begin{aligned} & E - \mu E^2 = C \left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1 \right) \\ & + \int_0^U \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) \right) dU - \mu C^2 \int_0^U U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) dU. \end{aligned} \right.$$

Bei den bisher gemachten Auseinandersetzungen ist angenommen, dass die Leitungsfähigkeit k und das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit c , also auch das Verhältniss dieser beiden Grössen a constant sind. Thatsächlich sind dieselben von der Temperatur abhängig, und der auf die angegebene Weise berechnete Werth von a wird nur für eine gewisse Temperatur richtig sein. Diese Temperatur soll nun ermittelt werden. Dabei kann statt des Falles, der bei den Versuchen verwirklicht war, der einfachere und mit diesem sehr nahe übereinstimmende ins Auge gefasst werden, dass für die Temperatur u die Bedingungen gelten, dass:

$$\text{für } t = 0 \quad u = 0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad u = 1, \quad \text{für } z = \infty \quad u = 0$$

ist. Es ist dann u eine Function der beiden Variablen t und z , und die Differentialgleichung (1) vereinfacht sich in:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}.$$

c und k sind hier aber Functionen von u ; von diesen soll angenommen werden, dass:

$$k = k_0 + k_1 u, \quad c = c_0 + c_1 u$$

ist, wo k_0 , k_1 , c_0 , c_1 Constanten sind, und zwar k_1 und c_1 Constanten, die als unendlich klein angesehen werden können. Dann ist:

$$(16) \quad u = a_0 + a_1 u,$$

$$\text{wo:} \quad a_0 = \frac{k_0}{c_0} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_0} = \frac{k_1}{k_0} - \frac{c_1}{c_0}.$$

Unter diesen Voraussetzungen hat es keine Schwierigkeiten, die Function u mit Rücksicht auf die unendlich kleinen Glieder niedrigster Ordnung zu bestimmen. Die Differentialgleichung für dieselbe ist dann:

$$(c_0 + c_1 u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left((k_0 + k_1 u) \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

oder:

$$c_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_1}{2} \frac{\partial (u^2)}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_1}{2} \frac{\partial^2 (u^2)}{\partial z^2}.$$

Ihr sowohl, als den für u angegebenen Grenzbedingungen kann man durch eine Function des einen Arguments $\frac{z}{\sqrt{t}}$ genügen. Man setze:

$$x = \frac{z}{2\sqrt{a_0 t}};$$

dann ist, wenn Ω eine Function von x bedeutet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{x}{t} \frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = \frac{1}{4a_0 t} \frac{d^2 \Omega}{dx^2}.$$

Macht man hier, unter der Voraussetzung, dass u eine Function von x ist, einmal $\Omega = u$, dann $\Omega = u^2$, so wird die Differentialgleichung für u :

$$2x \frac{du}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0} x \frac{d(u^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0} \frac{d^2(u^2)}{dx^2},$$

und die beiden willkürlichen Constanten, welche das allgemeine Integral derselben enthält, sind gerade ausreichend, die beiden Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad u = 1, \quad \text{für } x = \infty \quad u = 0$$

zu erfüllen.

Vernachlässigt man die mit c_1 und k_1 behafteten Glieder, so wird $u = U(x)$, oder, wie der Kürze wegen geschrieben werden soll, $= U$; mit der erforderlichen Genauigkeit ist daher die Differentialgleichung für u :

$$2x \frac{du}{dx} + \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0} x \frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0} \frac{d^2(U^2)}{dx^2}.$$

Das allgemeine Integral derselben ist:

$$u = A + BU,$$

wo A und B als Functionen von x aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dx} + U \frac{dB}{dx} &= 0 \\ \frac{dU}{dx} \frac{dB}{dx} &= -\frac{c_1}{c_0} x \frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0} \frac{d^2(U^2)}{dx^2} \end{aligned}$$

zu bestimmen sind. Aus diesen folgt bei Rücksicht auf Gleichung (16):

$$\frac{dA}{dx} = -2 \frac{a_1}{a_0} x U^2 + \frac{k_1}{k_0} U \frac{dU}{dx}, \quad \frac{dB}{dx} = 2 \frac{a_1}{a_0} x U - \frac{k_1}{k_0} \frac{dU}{dx}.$$

Benutzt man, dass:

$$\int_0^x x dx U = \frac{x^2 U}{2} + \frac{1-U}{4} - \frac{x e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^x x dx U^2 = \frac{x^2 U^2}{2} + \frac{1-U^2}{4} - \frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-2x^2})$$

ist und bestimmt die additiven, willkürlichen Constanten, die A und B enthalten, so dass $u = 1$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = \infty$ wird, so ergibt sich:

$$u = U + \frac{a_1}{a_0} \left(\frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{U - e^{-2x^2}}{\pi} \right) + \frac{k_1}{2k_0} U(1 - U).$$

Berechnet man aus einem beobachteten Werthe von u die Grösse a , ohne Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von der Temperatur zu nehmen, so thut man das nach der Gleichung:

$$u = U \left(\frac{z}{2\sqrt{at}} \right).$$

Dieselbe lässt sich schreiben:

$$u = U + (a - a_0) \frac{\partial U}{\partial a_0},$$

oder, wenn man u_m die „mittlere“ Temperatur nennt, für welche der für a gefundene Werth bei Rücksicht auf die Abhängigkeit dieser Grösse von der Temperatur gilt:

$$u = U + a_1 u_m \frac{\partial U}{\partial a_0}, \quad \text{d. h.} \quad u = U + \frac{a_1}{a_0} u_m \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks von u mit dem vorher abgeleiteten ergibt:

$$u_m = U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U e^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{k_1 a_0}{k_0 a_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1 - U),$$

oder, wenn man $\frac{c_1}{c_0}$ an Stelle von $\frac{k_1}{k_0}$ durch die Gleichung:

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{c_1}{c_0}$$

einführt:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} u_m &= U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U e^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1 - U) \\ &\quad + \frac{c_1}{c_0} \frac{a_0}{a_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1 - U). \end{aligned} \right.$$

Da in dieser Gleichung nur das Verhältniss von c_1 und a_1 vorkommt, so lässt sich unbeschadet ihrer Gültigkeit die Definition dieser Grössen so verallgemeinern, dass man darunter die Aenderungen versteht, die c und a in irgend einem Temperaturintervall, z. B. bei der Erwärmung um 1°C . erleiden.

Es soll nun auseinandergesetzt werden, wie wir die am Galvanometer gemachten Beobachtungen berechnet haben.

Es sei eine Schliessung aus dem Galvanometer und einer Thermokette gebildet; W sei der Widerstand derselben, E die electromotorische Kraft zur Zeit t , s die zur selben Zeit gemachte Scalenablesung. Nimmt man den Ablenkungswinkel des Spiegels als unendlich klein an und sieht ab von den Aenderungen des magnetischen Meridians und von der elastischen Nachwirkung des Aufhängefadens, so hat man:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 = \frac{\gamma E}{W},$$

wo α , β , γ Constanten sind und s_0 die Scalenablesung bezeichnet, die der Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall entspricht, dass kein Strom durch das Galvanometer fliesst. Schon wegen der fortwährenden Aenderungen des magnetischen Meridians erfordert diese Gleichung eine Modification. Die Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall, dass kein Strom vorhanden ist, ist nicht constant; aber sie ändert sich der Regel nach sehr langsam und für ein hinreichend kleines Zeitintervall proportional mit der Zeit. Ist s_0 die ihr entsprechende Scalenablesung zur Zeit $t = 0$, so ist sie zur Zeit t , wenn t nicht zu gross ist, $s_0 + \epsilon t$, wo ϵ eine kleine Constante ist, die aber bei jedem

Beobachtungssatze von neuem bestimmt werden muss. Man hat dann:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t = \frac{\gamma E}{W},$$

Diese Gleichung verwandelt sich bei Rücksicht auf die elastische Nachwirkung nach der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie¹⁾, wenn man annimmt, dass längere Zeit vor dem Augenblick $t=0$ der Spiegel grössere Ablenkungen nicht erlitten hat, und wenn man nur mässige positive Werthe von t ins Auge fasst, in die folgende:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma E}{W} = \alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t \\ - \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} (s(t-w) - s(t)) \right\}, \end{array} \right.$$

wo η eine neue, kleine Constante bedeutet und $s(t)$ für s geschrieben, s also als Functionszeichen gebraucht ist. Das Glied εt stellt dann nicht allein den Einfluss der Aenderungen des magnetischen Meridians dar, sondern zugleich den Einfluss eines Theiles der elastischen Nachwirkung, nämlich desjenigen, der eine Folge von Ablenkungen des Spiegels ist, die lange Zeit vor dem Augenblicke $t=0$ stattgefunden haben.

Ist die Bewegung des Spiegels so langsam, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder vernachlässigt werden können, so ist einfacher:

$$(19) \quad \frac{\gamma E}{W} = s - s_0 - \varepsilon t - \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} (s(t-w) - s(t)) \right\}.$$

$$\begin{array}{lll} \text{Ist in dem Intervall von } t=0 \text{ bis } t=t_1 & s=s_1 \\ & =t_1. & =t_2. & =s_2. \end{array}$$

wo s_1, s_2, \dots näherungsweise constant sind, und liegt t in dem Intervall von $t=t_n$ bis $t=t_{n+1}$, so hat man:

1) Boltzmann, Wien. Ber. October 1874.

$$(20) \quad (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} (s(t-w) - s(t)) \\ = (s_1 - s_0) \log t + (s_2 - s_1) \log(t - t_1) + (s_3 - s_2) \log(t - t_2) + \dots + (s_{n+1} - s_n) \log(t - t_n).$$

Bei der endlichen Grösse, die die Ablenkungswinkel bei unseren Versuchen hatten, wird man von diesen Gleichungen auch Gebrauch machen und die Grössen α , β , ε und η unbedenklich als constant betrachten dürfen, da die Versuche so angeordnet waren, dass die von ihnen abhängigen Glieder nur verhältnissmässig kleine Werthe hatten; dagegen war zu vermuthen, dass γ sich als abhängig von der Grösse des Ablenkungswinkels zeigen würde. Versuche, die zur Bestimmung dieser Abhängigkeit angestellt sind, haben aber ergeben, dass auch γ als constant betrachtet werden darf.

Um die Art, wie die elastische Nachwirkung in Rechnung gebracht ist, zu prüfen und den Werth von η zu bestimmen, wurde auf folgende Weise verfahren. Der Strom einer aus Kupfer und Eisendrähten gebildeten Thermokette, deren Löthstellen einerseits durch siedendes Wasser, andererseits durch fliessendes Wasser der Wasserleitung auf constanten Temperaturen erhalten wurden, wurde während einer gewissen Zeit durch das Galvanometer geleitet, und zu gewissen Zeitpunkten, vor dem Beginn des Stromes, während der Dauer und nach dem Aufhören desselben die Galvanometerscala abgelesen. Es wurden acht solcher Beobachtungssätze gemacht, die voneinander sich unterschieden durch die Dauer und die Intensität des Stromes, welche durch Einschaltung von Widerständen geändert werden konnte. Zwischen je zwei dieser aufeinander folgenden Versuche liess man einen Zeitraum vergehen, der hinreichte, um zu bewirken, dass die elastische Nachwirkung, die eine Folge des früheren war, während des späteren als eine lineare Function der Zeit angesehen werden durfte. Bei den Beobachtungen, die nach Oeffnung des Stromkreises ausgeführt waren, war die Bewegung so langsam, dass die

von den Constanten α und β abhängigen Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten; sie durften daher nach der Gleichung (19) berechnet werden; es war ferner $E=0$, und es konnte die für die Gleichung (20) gemachte Voraussetzung als erfüllt angenommen, $n=1$, t_1 = der Dauer des Stromes, s_1 = der während desselben gemachten Scalenablese und $s_2=s_0$ gesetzt werden. Hier- nach geben die Gleichungen (19) und (20):

$$(21) \quad s - s_0 = \varepsilon t + \eta (s_1 - s_0) \log \frac{t}{t - t_1}.$$

Beispielsweise möge einer der Beobachtungssätze angeführt werden:

t	s	$s - s_0$	$s - s_0 - \varepsilon t$	η
— 300	486,35	—	—	—
— 60	486,35	—	—	—
0		Strom geschlossen		
60	852,00			
90		Strom unterbrochen		
150	487,40	1,05	1,07	0,00735 <i>m</i>
180	487,15	0,80	0,82	0,00753 <i>m</i>
210	487,00	0,65	0,68	0,00764 <i>m</i>
240	486,90	0,55	0,59	0,00789 <i>m</i>
270	486,80	0,45	0,49	0,00760 <i>m</i>
300	486,75	0,40	0,44	0,00776 <i>m</i>
360	486,65	0,30	0,35	0,00766 <i>m</i>
480	486,55	0,20	0,27	0,00819 <i>m</i>
600	486,45	0,10	0,18	—

Die erste Columne enthält die Zeit t , in Secunden ausgedrückt, die zweite die entsprechenden Ablesungen s , bei denen die Zehntel und halben Zehntel eines Scalentheiles geschätzt sind. Aus derselben ist zu entnehmen, dass:

$$t_1 = 90, \quad s_0 = 486,35, \quad s_1 - s_0 = 366.$$

Die dritte Columne enthält die Werthe von $s - s_0$. Aus je zweien ihrer Zahlen können mit Hülfe der Gleichung (21) die beiden Unbekannten ε und η berechnet werden. Aus der ersten und letzten haben wir den Werth von ε bestimmt und die aus ihm sich ergebenden Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$ in der folgenden Columne aufgeführt. Die letzte Columne enthält die dann aus der Gleichung (21) folgen-

den Werthe von η ; m bedeutet dabei den Modulus der Briggs'schen Logarithmen, d. h. die Zahl 0,4343; in dieser Form sind die Werthe von η angegeben, weil bei den numerischen Rechnungen immer das Verhältniss $\eta:m$ auftritt. Endlich ist ein Mittelwerth von η nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Voraussetzung abgeleitet, dass bei den einzelnen Werthen von $s - s_0 - \varepsilon t$ gleich grosse Fehler gleich wahrscheinlich sind, d. h. nach der Formel:

$$(22) \quad \eta = \frac{\sum \frac{(s - s_0 - \varepsilon t)^2}{\eta}}{\sum \frac{(s - s_0 - \varepsilon t)^2}{\eta^2}},$$

wo unter den Summenzeichen η den aus dem entsprechenden $s - s_0 - \varepsilon t$ berechneten Werth bedeutet. So ergab sich:

$$\eta = 0,00755 m.$$

Die auf diese Weise aus den acht Beobachtungssätzen abgeleiteten Werthe von $\eta:m$ sind in der folgenden kleinen Tafel zusammengestellt, deren Verticalreihen mit der in Secunden ausgedrückten Dauer des Stromes überschrieben sind, während den Horizontalreihen die durch diese hervorbrachte Ablenkung, also $s_1 - s_0$, vorgesetzt ist:

	90	180
105	0,00550	0,00712
207	597	651
366	755	702
464	749	727

Indem wir nach der Gleichung (22) einen Mittelwerth von η aus allen acht Beobachtungssätzen berechneten, fanden wir:

$$\eta = 0,007 m.$$

Die Uebereinstimmung der für η gefundenen Zahlen ist nicht gross; aber sie ist nicht geringer als sie erwartet werden durfte in Rücksicht auf die Kleinheit des Betrages, den die elastische Nachwirkung namentlich nach den kleineren Ablenkungen besass. Sie ist unseres Erachtens ausreichend,

um zu zeigen, dass mit Hülfe der Boltzmann'schen Theorie bei Galvanometerbeobachtungen die Fehler zum grössten Theile sich vermeiden lassen, die aus der Nichtbeachtung der elastischen Nachwirkung hervorgehen können.

Erwähnt werden mögen noch Versuche anderer Art, die wir zur Prüfung der Theorie und des für η gefundenen Zahlenwerthes angestellt haben. Zur Zeit $t = 0$ wurde ein Magnet dem Galvanometer plötzlich genähert, in der Stellung, die er dadurch erhalten hatte, bis zur Zeit $t = t_1$ gelassen und dann wieder an seinen ursprünglichen Ort gebracht. Ist M das in einer gewissen Einheit ausgedrückte, von dem Magneten auf den beweglichen Theil des Galvanometers ausgeübte Drehungsmoment und s_1 ein Näherungswerth für s während der Wirkung des Magnets, so ist, wenn t zwischen 0 und t_1 liegt:

$$M = s - s_0 - \varepsilon t - \eta(s_1 - s_0) \log t$$

und, wenn t grösser als t_1 ist:

$$0 = s - s_0 - \varepsilon t - \eta(s_1 - s_0) \log \frac{t}{t - t_1}.$$

Berechnet man mit Hülfe der letzten Gleichung ε , so gibt die erste für jeden Werth von t einen von M . Aus der Uebereinstimmung der Werthe, die so für M gefunden werden, ist die Richtigkeit der gemachten Annahmen zu beurtheilen. Bei einem Versuche dieser Art ergaben sich folgende Zahlen:

t	s	M	t	s	M
-120	499,00	—	120	874,40	369,85
- 60	499,00	—	150	874,60	369,80
0	Magnet genähert		180	Magnet entfernt	
60	873,60	369,85	210	501,00	—
90	874,10	369,89	270	500,20	—

Bei mehrfacher Wiederholung des Versuches zeigten sich keine grösseren Differenzen.

In ähnlicher Weise, wie hier das Drehungsmoment eines Magnets gemessen war, wurde bei den Versuchen, durch welche die Constanz der durch die Gleichung (18

eingeführten Grösse γ geprüft werden sollte, das Drehungsmoment von Strömen verschiedener Intensität im Galvanometerdrahte gemessen. Zur Erzeugung dieser Ströme diente die schon erwähnte Thermokette aus Kupfer und Eisen und ein System von bekannten Widerständen. Der Widerstand der Thermokette, des Galvanometergewindes und der nothwendigen Verbindungsdrähte war = 1,13 S.-E. gefunden worden; diesem wurde bei den einzelnen Versuchen hinzugefügt ein Widerstand von 30, 50, 100 und 200 S.-E. Auch hier wurden Ablesungen nur gemacht, wenn die Bewegung des Spiegels so langsam war, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten, und auch hier durfte die Gleichung (20) in Anwendung gebracht werden. Es war daher zu setzen:

$$(23) \quad \gamma \frac{E}{W} = s - s_0 - \varepsilon t - r_i \{ (s_1 - s_0) \log t + (s_2 - s_1) \log (t - t_1) + \dots \}.$$

Die Werthe der rechten Seite dieser Gleichung, die bei aufeinander folgenden Versuchen sich ergaben, waren diese:

W	31,13	51,13	101,13	201,13	31,13 S.-E.
	341,34	207,64	105,05	52,87	341,60
	341,36	207,66	105,04	52,86	341,60
	341,31	207,65	105,01	52,87	341,64
	341,28	207,58	105,00	52,90	341,50
Mittel	341,32	207,63	105,02	52,88	341,57

Die Vergleichung der ersten und letzten der Mittelzahlen zeigte, dass die electromotorische Kraft der Thermokette E während der Dauer der Versuche ein wenig gewachsen war. Es wurde angenommen, dass ihre Veränderung proportional der Zeit vor sich gegangen wäre. Unter dieser Annahme fanden sich die Verhältnisse der Werthe der linken Seite der in Rede stehenden Gleichung für die einzelnen Versuche:

$$= 341,32 : 207,85 : 105,10 : 52,86 : 341,57.$$

Eine Veränderlichkeit von γ ist daher nicht zu bemerken.

Es war bei diesen Versuchen wünschenswerth erschienen, sie in so kurzer Zeit als möglich auszuführen, um Aenderungen der electromotorischen Kraft der Thermokette und der Temperatur der einzuschaltenden Widerstände so weit als möglich zu vermeiden. Es konnte deshalb der Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Versuchen nicht so gross gewählt werden, dass die bei dem frühern erzeugte elastische Nachwirkung bei dem spätern als eine lineare Function der Zeit hätte betrachtet werden dürfen; es musste daher eine grössere Zahl von Gliedern bei dem Factor von η in der Gleichung (23) in Rechnung gezogen werden, als es bei den Versuchen über die durch einen Magnet hervorgebrachten Ablenkungen nöthig gewesen war. Die Grösse ε musste für jeden der Versuche von neuem bestimmt werden. Es hätte am nächsten gelegen, zu diesem Zwecke zwischen den Ablenkungen zweier Ströme von verschiedener Intensität die Stellung des Spiegels bei geöffnetem Galvanometerkreise zu beobachten. Statt dessen schlugen wir ein anderes Verfahren ein, um zugleich eine andere Fehlerquelle, die sonst zu fürchten gewesen wäre, unschädlich zu machen. An dem Galvanometer befand sich ein Umschalter, von dem ein Messingstück von erheblicher Länge, das bei geschlossener Leitung vom Strome durchflossen wurde, einen Theil ausmachte. Hatten die Stellen desselben, die mit den kupfernen Zuleitungsdrähten im Contact waren, eine Temperaturdifferenz, so entstand eine störende electromotorische Kraft. Um den Einfluss dieser zu eliminiren, schalteten wir, statt den Galvanometerkreis zu öffnen, durch eine Wippe in ihr an Stelle der Thermokette einen Kupferdraht von demselben Widerstande ein und beobachteten dann die Stellung des Spiegels. Bei dieser Anordnung war die Veränderlichkeit der störenden electromotorischen Kraft nicht mehr zu fürchten als die Veränderlichkeit des magnetischen Meridians und wurde mit dieser zusammen eliminirt.

Es soll nun die Methode angegeben werden, deren wir uns bedient haben, um die in der Gleichung (18) vor-

kommenden Constanten α und β zu bestimmen. Es bedurfte diese Bestimmung nur einer mässigen Genauigkeit, da die Werthe von α und β nur dazu dienen sollten, kleine Correctionen zu berechnen. Es wurde eine Schliessung gebildet aus dem Galvanometerdraht und einem zweiten Multiplicatorgewinde, innerhalb dessen ein kräftiger, etwa 200 g schwerer Magnetstab seine Schwingungen ausführen konnte, die ebenfalls mit Spiegel, Scala und Fernrohr zu beobachten waren. Einmal erregt, bestanden solche Schwingungen längere Zeit mit langsam abnehmender Amplitude fort, und der Spiegel des Galvanometers führte Schwingungen von derselben Dauer aus. Diese Dauer konnte geändert werden durch Aenderung der bifilaren Aufhängung, mit der der Magnetstab versehen war. Bei einigen verschiedenen Werthen der Schwingungsdauer wurden die Amplituden des Magnets und des Galvanometers abwechselnd in gleichen, kleinen Zwischenräumen beobachtet und das Verhältniss der auf gleiche Zeitpunkte reducirten Amplituden berechnet. Die folgenden Ueberlegungen zeigen, wie aus den Werthen, die dieses Verhältniss bei bekannten Schwingungsdauern besitzt, α und β ermittelt werden konnten.

Die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung des Magnetstabes aus seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t kann:

$$= c \sin nt$$

gesetzt werden, wo c die in Scalentheilen ausgedrückte Amplitude und:

$$n = \frac{\pi}{T}$$

ist, wenn T die Dauer einer einfachen Schwingung bedeutet. Die Gleichung der Bewegung des Galvanometer spiegels ist dann, wenn u die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t bezeichnet, N eine von c und n unabhängige Constante ist, und man abseht von den inducirten Strömen höherer Ordnung:

$$\alpha^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + u = c N n \cos nt.$$

Andererseits ist:

$$u = A \cos nt + B \sin nt,$$

wo A und B zwei unbekannte Constanten bedeuten. Die Differentialgleichung gibt für diese die Bedingungen:

$$cNn = A(1 - \alpha^2 n^2) + B2\beta n$$

$$0 = -A2\beta n + B(1 - \alpha^2 n^2).$$

Setzt man:

$$A^2 + B^2 = C^2 c^2,$$

bezeichnet also durch C das Verhältniss der Amplituden beider Schwingungen, so folgt hieraus:

$$C^2 = \frac{N^2 n^2}{(1 - \alpha^2 n^2)^2 + 4\beta^2 n^2}.$$

Hat man drei Beobachtungen von C für verschiedene Werthe von n , so kann man aus den hiernach geltenden Gleichungen N eliminiren und α und β bestimmen. Wir hatten eine grössere Zahl von Beobachtungen und haben α und β so berechnet, dass:

$$\Sigma (dC)^2$$

ein Minimum wurde, wenn dC den sich ergebenden Fehler einer Beobachtung bezeichnet. Die für C^2 abgeleitete Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\alpha^4}{N^2} n^2 + \frac{4\beta^2 - 2\alpha^2}{N^2} + \frac{1}{N^2} \frac{1}{n^2},$$

oder, wenn man:

$$\frac{\alpha^4}{N^2} = x, \quad \frac{4\beta^2 - 2\alpha^2}{N^2} = y, \quad \frac{1}{N^2} = z$$

setzt:

$$\frac{1}{C^2} = xn^2 + y + z \frac{1}{n^2}.$$

Der Fehler von $\frac{1}{C^2}$ bei einer Beobachtung ist also:

$$\frac{1}{C^2} - xn^2 - y - \frac{z}{n^2};$$

betrachtet man ihn als unendlich klein, so ist er andererseits aber auch:

$$= -2 \frac{dC}{C^3}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Werth von dC nehmen und findet dann, dass die aufgestellte Bedingung übereinstimmt mit der, dass:

$$\sum \left(x C^3 n^2 + y C^3 + z \frac{C^3}{n^2} - C \right)^2$$

ein Minimum ist. Hieraus folgen die Gleichungen:

$$x \sum C^5 n^4 + y \sum C^6 n^2 + z \sum C^6 = \sum C^4 n^2$$

$$x \sum C^6 n^2 + y \sum C^6 + z \sum \frac{C^6}{n^2} = \sum C^4$$

$$x \sum C^6 + y \sum \frac{C^6}{n^2} + z \sum \frac{C^6}{n^4} = \sum \frac{C^4}{n^2}$$

Sind diese Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, so hat man:

$$\alpha^4 = \frac{x}{z}, \quad 4\beta^2 - 2\alpha^2 = \frac{y}{z}.$$

Die Messungen ergaben die folgenden zusammengehörigen Werthe von T und C :

T	5,549	3,951	2,911	2,319	1,529 Sec.
C	0,676	0,889	1,042	1,042	0,849
	0,676	0,899	1,034	1,044	0,841
	0,672	0,891	1,035	1,040	0,828
	0,676	0,886	1,037	1,045	0,822
	0,678	0,887	1,033	1,037	0,820
	0,676	0,887	1,034	1,033	0,830
	—	0,886	1,031	1,039	0,827
	—	0,885	1,029	1,039	0,818
	—	—	1,031	—	0,815
	—	—	—	—	0,809
	—	—	—	—	0,823
	—	—	—	—	0,839
Mittel	0,676	0,889	1,034	1,040	0,826

Hieraus folgt:

$$\alpha = 0,8228 \text{ Sec.} \quad \beta = 0,5816 \text{ Sec.}$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werthen von α und β bei Benutzung des Werthes, den die Rechnung für N gegeben hat, die Werthe von C für die einzelnen Schwingungsdauern, so findet man:

$$0,676 \quad 0,893 \quad 1,035 \quad 1,038 \quad 0,829,$$

3*

in guter Uebereinstimmung mit den Mittelzahlen der Beobachtungen.

Bei diesen Versuchen war der Widerstand des Galvanometerkreises 2,7 S.-E. Von diesem Widerstande muss, streng genommen, der Werth der Grösse β abhängig sein, weil ein Theil derselben von den Strömen herrührt, die in dem Galvanometerkreise durch die Magnete des Galvanometers inducirt werden. Es wurde der Widerstand auf 6,9 S.-E. gebracht und dann für einige Schwingungsdauern C beobachtet. Es zeigte sich, dass die gefundenen Werthe von C sich in genügender Weise darstellen liessen durch die alten Werthe von α und β und den Werth von N , der zu dem frühern im Verhältniss von 2,7:6,9 stand. Daraus folgt, dass β als unabhängig vom Widerstande des Galvanometerkreises anzusehen, die in diesem stattfindende Induction also unmerklich ist neben der Induction in den Kupferhülsen des Galvanometers und der Luftreibung.

Zur Berechnung unserer Versuche über die Wärmeleitung war noch nöthig die Kenntniss der Beziehung zwischen der electromotorischen Kraft der benutzten Thermoketten und den Temperaturen ihrer Löthstellen. Mit Hrn. Avenarius¹⁾ haben wir angenommen, dass, wenn E die electromotorische Kraft ist, und ϑ und ϑ_0 die Temperaturen sind, die Relation:

$$(24) \quad E = a(\vartheta - \vartheta_0)(1 + b(\vartheta + \vartheta_0))$$

besteht, wo a und b Constanten bezeichnen; es handelte sich darum, diese für eine unserer aus Neusilber und Kupfer zusammengesetzten Thermoketten zu bestimmen. Bei jedem der hierzu ausgeführten Beobachtungssätze wurden drei Temperaturen benutzt, die des schmelzenden Eises, die der Dämpfe des siedenden Wassers und eine mittlere Temperatur, die mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurde. Die Kugel desselben war mit der einen Löthstelle der Thermokette in ein mit Petroleum gefülltes Gefäss getaucht, das in einer

1) Avenarius, Pogg. Ann. **119.** p. 406. 1863. u. **122.** p. 193. 1864.

grössern Wassermasse sich befand. Es wurde diese durch eine Lampe erwärmt, während das Petroleum durch eine Rührvorrichtung in Bewegung erhalten wurde. Die zweite Löthstelle war in ein langes und enges, unten geschlossenes Metallröhrchen geführt und wurde mit diesem abwechselnd in schmelzendes Eis und in die Dämpfe siedenden Wassers gebracht. Aus der Thermokette und dem Galvanometer¹ war eine Schliessung gebildet, und der Widerstand derselben = 29,1 S.-E. gemacht, um Ablenkungen von der gewünschten Grösse zu erhalten. Durch eine Umschaltung wurde bewirkt, dass die Galvanometerablenkungen immer dieselbe Richtung hatten. Es wurden diese nach den Gleichungen (19) und (20) berechnet. Eine Beobachtungsreihe gab die folgenden Zahlen, wenn die Temperaturen ϑ und ϑ_0 nach den Graden der Celsius'schen Scala gerechnet werden:

$\frac{\gamma E}{W}$	$\vartheta - \vartheta_0$	$\vartheta + \vartheta_0$	$\frac{\gamma^a}{W}$	b
230,74	46,85	46,85		
295,15	53,26	146,76	4,636	0,00133
229,96	46,74	46,74	4,628	0,00135
295,92	53,34	146,68	4,625	0,00136
229,08	46,63	46,63	4,616	0,00138
297,11	53,56	146,46	4,616	0,00138
Mittel			4,624	0,00136

Die beiden letzten Columnen enthalten die Werthe, die die Gleichung (24) ergibt aus den Zahlen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, . . Horizontalreihe der früheren Columnen. Zwei ähnliche Beobachtungsreihen, bei denen die mittlere Temperatur, die hier etwa 47° C. gewesen war, die Werthe von ungefähr 38° C. und 35° C. gehabt hat, ergaben:

$$\frac{\gamma^a}{W} = 4,625 \quad b = 0,00139$$

und:

$$= 4,587 \quad = 0,00141.$$

Wir haben angenommen:

$$\frac{\gamma^a}{W} = 4,612 \quad b = 0,00139.^1)$$

Bei den Versuchen mit dem Eisenwürfel war der Widerstand der Schliessung, W , ein kleinerer als bei diesen Hilfsversuchen, nämlich bei Benutzung der mit I bezeichneten Thermokette = 3,10 S.-E. Hier war daher:

$$\frac{\gamma^a}{W} = 43,3.$$

Für diese Anordnung soll $\frac{\gamma}{W} = 1$ gesetzt werden, was darauf hinaus kommt, dass eine gewisse Einheit für die electromotorische Kraft angenommen wird. Die linke Seite der Gleichung (18) oder (19) wird dann E , und zugleich wird:

$$a = 43,3.$$

Schreibt man die Gleichung (24):

$$\frac{E}{a(1+2b\vartheta_0)} = \vartheta - \vartheta_0 + \frac{b}{1+2b\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0)^2,$$

so findet man aus ihr bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{a(1+2b\vartheta_0)} \left(E - \frac{b}{a(1+2b\vartheta_0)} E^2 \right).$$

Daraus folgt für die durch die Gleichung (14) eingeführte Grösse μ , wenn ϑ_0 die ursprüngliche Temperatur des Würfels und zugleich die Temperatur der nicht im Würfel befindlichen Löthstelle der Thermokette, in Graden der Celsius'schen Scala ausgedrückt, bezeichnet:

$$(25) \quad \mu = \frac{b}{a(1+2b\vartheta_0)^2}.$$

Für a und b sind hier die eben angegebenen Zahlenwerthe zu setzen, ϑ_0 ist bei jedem Versuche zu ermitteln.

1) Bemerket möge werden, dass aus den Messungen und der Theorie des Hrn. Avenarius (Pogg. Ann. **122**. p. 213. 1864) der Coëfficient b für Kupfer und Neusilber sich viel kleiner ergibt, als er hier gefunden wurde, nämlich = 0,00084. Wahrscheinlich liegt der Grund dieses Unterschiedes hauptsächlich darin, dass das Neusilber des Hrn. Avenarius ein anderes war als das unsrige.

Es sollen nun die bei den Versuchen mit dem Würfel benutzten Vorrichtungen näher beschrieben werden.

Wie schon erwähnt, hatte der Würfel eine Kante von 140 mm Länge und war so aufgestellt, dass eine Kante vertical war. Er ruhte auf vier dünnen Holzklötzchen, die auf einem Holztische befestigt waren. In gleicher Ebene mit der zu bespritzenden, verticalen Vorderfläche des Würfels stand ein Schirm von Zinkblech, in welchem eine jene Fläche umgebende, quadratische Oeffnung sich befand, die nur sehr wenig grösser war als sie. Der zwischen beiden vorhandene Zwischenraum war mit Wachs-kitt geschlossen. Der Schirm hatte oben und an den beiden Seiten Ränder und endigte unten in einen flachen Trichter, sodass das aus der Brause gegen die Vorderfläche des Würfels spritzende Wasser abfliessen konnte, ohne direct die Temperatur der übrigen Würfelflächen zu beeinflussen.

Damit auch die bei dem Spritzen des Wassers oder durch andere Ursachen im Beobachtungsraum entstehenden Luftströmungen so wenig als möglich störend einwirkten, war der Tisch, auf dem der Würfel sich befand, ganz von hohen Pappschirmen umgeben.

Der Vorderfläche des Würfels gegenüber, in einem Abstände von 127 mm von derselben, war die Brause angebracht. Ihre Endfläche bildete ein Quadrat von 157 mm Seite und enthielt 264 runde Oeffnungen von etwa 0,5 mm Durchmesser.

Um zu prüfen, ob diese Zahl der Oeffnungen ausreichte, um der Vorderfläche des Würfels eine in allen ihren Punkten gleiche Temperatur zu ertheilen, wie die entwickelte Theorie sie voraussetzte, waren drei Versuche schon gemacht, als die Brause erst die Hälfte der genannten Zahl von Oeffnungen hatte. Der Werth von α , der sich im Mittel aus diesen drei Versuchen ergab, differirte von demjenigen, der aus drei späteren Versuchen folgte, bei denen die Zahl der Löcher verdoppelt war, im übrigen aber die gleichen Verhältnisse stattfanden, nur um 0,12 Proc.

Das Wasser wurde der Brause aus einem Reservoir zugeführt, welches aus der städtischen Wasserleitung oder mit erwärmtem Wasser gefüllt werden konnte.

Zwischen der Brause und dem erwähnten, feststehenden Zinkschirm war noch ein beweglicher Schirm aus gleichem Material vorhanden. Dieser konnte durch Verschieben in seiner Ebene in zwei Stellungen gebracht werden; bei der einen spritzte das aus der Brause kommende Wasser durch eine in dem Schirm befindliche quadratische Oeffnung gegen die Vorderfläche des Eisenwürfels, bei der andern traf es einen Theil des Schirmes und floss, geleitet durch Zinkstreifen, an ihm hinab in das Abflussrohr der Wasserleitung. Dieser Theil des Schirmes war gebildet aus drei, in kleinen Abständen voneinander befestigten Zinkplatten, welche mit den zwischenliegenden Luftschichten den Eisenwürfel vor jeder Einwirkung des aus der Brause strömenden Wassers schützen sollten. Nachdem der Schirm bei dieser Stellung 10 bis 15 Sekunden die Wasserstrahlen aufgenommen hatte, wurde er rasch in die zuerst erwähnte gebracht. Dadurch wurde bewirkt, dass das Bespritzen des Würfels plötzlich begann und dann mit gleichbleibender Kraft und Wassertemperatur geschah. Der Augenblick, in dem es begann, wurde von dem Chronographen markirt mit Hülfe einer Vorrichtung, durch welche bei dem Verschieben des Schirmes ein electricischer Strom momentan geschlossen wurde. Dieses Verschieben setzte zugleich ein Uhrwerk in Thätigkeit, dessen Zweck später angegeben werden soll.

In den Eisenwürfel waren, wie bereits erwähnt, drei verticale Canäle gebohrt, die in der Nähe der geraden Linie endigten, die durch den Mittelpunkt der Vorderfläche geht und auf dieser senkrecht steht. Ihr Durchmesser war 1,4 mm, und ihre Enden bildeten rechtwinkelige Kegel. Die Abstände der Spitzen dieser Kegel von der Vorderfläche (also die entsprechenden Werthe von z) wurden mit Hülfe eines eigens hierzu construirten Apparates so genau als möglich gemessen. Der Haupttheil dieses Apparates

war ein mit einem Nonius versehener Maassstab, dessen eine Endfläche den Nullpunkt der Theilung bildete und an die ebene Fläche eines starken Messinglineals so angeschraubt werden konnte, dass der Maassstab senkrecht zu dieser Fläche stand. Die Verbindungsschraube ging durch einen in dem Lineale befindlichen Schlitz, sodass der Maassstab längs desselben verschiebbar war. An dem Ende des Lineals war ein Querstab angelöthet, parallel dem Maassstab und ungefähr von derselben Länge wie dieser.

Mit diesem Instrumente wurde in der folgenden Weise verfahren. Das Messinglineal war, ohne den Maassstab, an die vertical stehende Vorderfläche des Würfels fest angedrückt, sodass der Querstab sich über den Mündungen der Canäle befand. Dann wurde eine 100 mm lange und 0,9 mm dicke, unten zugespitzte Stahlnadel in den zu messenden Canal gesenkt, oben gegen den mit etwas Siegelack überzogenen Querstab so angelegt, dass sie mit der Spitze aufstiess, sonst aber in keiner Berührung mit der Wand des Canals war, und in dieser Stellung mit Hülfe einer Löthrohrflamme an den Querstab befestigt. Nach dem Erkalten des Siegellacks wurde das Messinglineal an der Fläche des Eisenwürfels aufwärts geschoben, sodass die Nadel aus dem Canale kam, ohne ihre Stellung gegen das Lineal zu ändern. Nun wurde der Maassstab angeschraubt, durch Verschiebung desselben längs des Lineals die Spitze der Nadel dicht an die Theilung des Nonius gebracht, und der Nonius so eingestellt, dass sein Nullpunkt mit der Nadelspitze coincidirte. Es konnte dann der Abstand der Spitze von der Fläche des Lineals, d. h. der Abstand des tiefsten Punktes des Canals von der Vorderfläche des Würfels an der Theilung des Maassstabes abgelesen werden.

Wir fanden so aus einer grossen Zahl von Messungen, die für denselben Canal höchstens um 0,15 mm voneinander differirten, für den

ersten,	zweiten,	ritten Canal
$z = 5,46 \text{ mm,}$	$= 44,65 \text{ mm,}$	$= 71,26 \text{ mm.}$

Die beiden Thermoketten, die wir benutzten, bestanden, wie bereits erwähnt, aus Kupfer- und Neusilberdraht. Die einzelnen Drähte waren für sich, und die zusammengelötheten dann noch einmal zusammen mit Seide umsponnen. Die auf diese Weise fest verbundenen Drähte liessen sich noch leicht in die Canäle des Eisenwürfels einführen. Ihre von der Umhüllung befreiten Enden waren kegelförmig so zugeschliffen, dass sie in die Enden der Canäle genau hineinpassten. Nachdem sie in diese fest hineingedrückt waren, wurden die Drähte an der obern Fläche des Würfels mit Wachskitt befestigt und dadurch zugleich die Canäle geschlossen.

An dem ersten Canal befand sich bei allen Versuchen die eine Löthstelle der Thermokette I, während die eine Löthstelle der Thermokette II bei einigen Versuchen in den zweiten, bei anderen in den dritten Canal eingeführt war. Die beiden Thermoketten waren im übrigen ganz gleich, nur waren ihre Widerstände ein wenig verschieden. Der Widerstand des aus dem Galvanometer und einer der Thermoketten gebildeten Kreises war 1,0051 mal so gross, wenn die Thermokette II, als wenn die Thermokette I in dem Kreise sich befand.

Die beiden, nicht in den Würfel eingeführten Löthstellen der Thermoketten befanden sich, mit der Kugel eines Thermometers in Watte eingepackt und zusammengebunden, in einem Kasten mit doppelten Wänden, zwischen denen Wasser war. Die Temperatur im Innern dieses Kastens variirte ungemein langsam und konnte an der Scalá des Thermometers abgelesen werden, die durch die Wandungen des Kastens hindurchtrat. In demselben Kasten war auch noch ein Quecksilbercommutator aufgestellt, der durch Schnüre von aussen umgelegt werden konnte und gestattete, nach Willkür die eine oder andere Thermokette mit dem Galvanometer zu verbinden. Das Umlegen des Commutators geschah während des Versuchs durch das oben erwähnte Uhrwerk, welches durch das Verschieben des Schirmes in Bewegung gesetzt wurde.

Das benutzte Galvanometer war ein Siemens'sches mit einem astatischen Paare von Glockenmagneten, Kupferdämpfung, Richtmagneten und Spiegelvorrichtung. Die in Millimeter eingetheilte Scala befand sich in einer Entfernung von etwa 2400 mm von dem Spiegel.

Neben dem Beobachtungsfernrohre stand der Chronograph. Derselbe war so eingerichtet, dass bei dem jedesmaligen Hin- und Hergang eines Secundenpendels ein electrischer Strom momentan geschlossen und dadurch ein Stich in den durch das Uhrwerk des Chronographen bewegten Papierstreifen gemacht wurde. Das Gleiche geschah, wenn der Beobachter durch Ziehen an einer Schnur den Schirm vor dem Eisenwürfel so verschob, dass das aus der Brause hervorströmende Wasser diesen zu bespritzen begann. Ueberdies befanden sich an dem Chronographen zwei mit Nadeln verbundene Knöpfe, durch deren Herabdrücken der Papierstreifen rechts und links von der Linie der Secundenmarken durchstoichen wurde. Einer dieser Knöpfe diente dazu, die Zeiten zu markiren, die den einem Gehülfen dictirten Ablesungen der Galvanometerscale entsprachen; durch den zweiten wurden die Zeitpunkte registrirt, in denen die durch das erwähnte Uhrwerk bewirkten Wechsel der Thermoketten stattfanden.

Um die Beschreibung eines Versuchs zu vervollständigen, möge das folgende Protokoll eines solchen dienen:

Versuch 18. 19. October 1879 Abends 9 Uhr.

Temperatur im Kasten $\vartheta_0 = 18,1^\circ \text{C}$.

Ablesung bei geöffnetem Galvanometerkreise 474,30.

1.	2.	3.	1.	2.	3.
Relative Zeit in Sec.	Ab- lesungen	Ab- lenkungen	Relative Zeit in Sec.	Ab- lesungen	Ab- lenkungen
-295	II eingeschaltet		-115	II eingeschaltet	
-265	478,35	—	- 85	478,25	—
-245	I eingeschaltet		- 65	I eingeschaltet	
-215	478,45	—	- 35	478,40	—

1. Relative Zeit in Sec.	2. Ab- lesungen	3. Ab- lenkungen	1. Relative Zeit in Sec.	2. Ab- lesungen	3. Ab- lenkungen
0,00	Schirm gezogen	0,0	64,78	710,0	231,6
3,34	500,0	21,6	77,98	715,0	236,6
4,40	520,0	41,6	87,56	718,0	239,6
5,56	540,0	61,6	95,14	720,0	241,6
6,72	560,0	81,6	103,56	722,0	243,6
7,96	580,0	101,6	113,78	724,0	245,6
9,68	600,0	121,6	125,82	726,0	247,6
11,84	620,0	141,6	139,48	728,0	249,6
14,96	640,0	161,6	154,20	II eingeschaltet	
16,98	650,0	171,6	171,16	624,0	146,6
19,70	660,0	181,6	173,96	625,0	147,6
23,52	670,0	191,6	176,84	626,0	148,6
28,72	680,0	201,6	179,80	627,0	149,7
36,26	690,0	211,6	182,84	628,0	150,7
41,10	695,0	216,6	186,16	I eingeschaltet	
47,56	700,0	221,6	211,52	735,0	256,7
55,08	705,0	226,6	223,60	736,0	257,7

Die Columne 1 gibt die Beobachtungszeiten t , gerechnet von dem Augenblicke, in dem der Würfel von dem Wasser getroffen wurde; die negativen Werthe derselben sind an der Uhr abgelesen, die positiven aus den vom Chronographen gemachten Marken abgeleitet. Die Columne 2 enthält die entsprechenden Scalenableserungen s , die Columne 3 die Werthe von $s - s_0 - \epsilon t$, die aus diesen berechnet sind mit Hülfe der Werthe von s_0 und ϵ , die durch Anwendung der Gleichung:

$$s - s_0 - \epsilon t = 0$$

auf die Zeiten -215 und -35 für die Kette I und die Zeiten -265 und -85 für die Kette II sich ergeben. Die auf die Thermokette II bezüglichen Werthe von $s - s_0 - \epsilon t$ sind mit dem Factor $1,0051$ multiplicirt, um sie mit den auf die Thermokette I bezüglichen gleichartig zu machen. Mit Hülfe der Zahlen der Columne 3 ist aus der Gleichung (18) unter der Annahme $\frac{\gamma}{W} = 1$ die electromotorische Kraft der Thermokette II berechnet bei einigen Versuchen für $t = 145$, bei anderen für $t = 175$ und die electromotorische Kraft der Thermokette I bei jenen Versuchen: für $t = 5, 20, 40, 65, 90, 115, 145$,

bei diesen ausserdem noch für $t = 175$. Dabei wurden für die genannten Zeiten $s - s_0 - \varepsilon t$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ durch Interpolation ermittelt und das den Einfluss der elastischen Nachwirkung darstellende Glied der Gleichung (18) mit Hülfe der Gleichung (20) bestimmt. Die beiden in der Gleichung (15) vorkommenden Integrale konnten nun durch mechanische Quadratur berechnet und aus dieser Gleichung dann der genauere Werth von a gefunden werden.

Nach den durchgeführten Betrachtungen setzt diese Berechnungsweise der Beobachtungen zunächst voraus, dass die Anfangstemperatur des Würfels überall dieselbe und zwar die Temperatur ϑ_0 des Kastens ist. Diese Annahme aber war thatsächlich bei keinem der Versuche genau erfüllt; es zeigte sich das an den kleinen Unterschieden der Scalablesungen bei geöffnetem Galvanometerkreise und nach Einschaltung der einen oder andern Thermokette vor der Zeit Null. Die Veränderung der Temperatur in irgend einem Punkte des Würfels, die eine Folge dieses Umstandes ist, wird näherungsweise eine lineare Function der Zeit und zwar dieselbe Function für positive, wie für negative Werthe der Zeit sein. Ist das richtig, so wird durch die Art, wie die Grössen s_0 und ε für jede Thermokette eingeführt und berechnet sind, der Fehler eliminirt, den sonst der genannte Umstand herbeiführen würde.

In der angegebenen Weise haben wir 24 Versuche mit demselben Eisenwürfel ausgeführt und berechnet. Die folgende Zusammenstellung gibt in der „a beobachtet“ überschriebenen Columnne die Resultate derselben an:

Vers.- Nr.	Werthe von z und t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a		Differenz
					beobacht.	berechn.	
1	$z = 44,65 \text{ mm}$ $t = 145''$	17,0	10,1	13,5	16,87	16,99	-0,12
2		15,6	11,6	13,5	17,08	16,99	+0,09
3		17,7	11,9	14,7	16,96	16,95	+0,01
4		19,3	12,9	16,0	16,95	16,91	+0,04
5		16,6	11,8	14,1	16,84	16,97	-0,13
6		16,3	10,5	13,3	16,93	17,00	-0,07

Vers.- Nr.	Werthe von z und t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	α		Differenz
					beobacht.	berechn.	
7	$\left. \begin{array}{l} z = 44,65 \text{ mm} \\ t = 145'' \end{array} \right\}$	15,6	21,5	18,6	16,77	16,82	-0,05
8		14,7	20,0	17,4	16,90	16,86	+0,04
9		15,9	20,9	18,5	16,88	16,82	+0,06
10		16,2	21,0	18,7	16,79	16,82	-0,03
11		17,9	22,4	20,2	16,70	16,77	-0,07
12		17,3	21,9	19,7	16,76	16,78	-0,02
13	$\left. \begin{array}{l} z = 44,65 \text{ mm} \\ t = 175'' \end{array} \right\}$	18,3	13,1	15,5	16,94	16,92	+0,02
14		17,2	12,9	14,9	16,96	16,94	+0,02
15		17,2	12,7	14,8	17,07	16,95	+0,12
16		17,2	12,5	14,7	16,80	16,95	-0,15
17		17,4	12,2	14,6	16,89	16,95	-0,06
18		18,0	12,1	14,9	17,04	16,94	+0,10
19	$\left. \begin{array}{l} z = 71,26 \text{ mm} \\ t = 145'' \end{array} \right\}$	16,8	11,3	14,6	16,95	16,95	0,00
20		17,3	11,5	15,0	16,95	16,94	+0,01
21		16,4	11,1	14,3	17,00	16,96	+0,04
22		16,0	10,4	13,8	16,97	16,98	-0,01
23		16,6	11,1	14,4	17,02	16,96	+0,06
24		16,2	10,2	13,8	16,96	16,98	-0,02

Nimmt man Rücksicht auf die Abhängigkeit der Grösse α von der Temperatur, so muss man bei dem aus jedem der Versuche gefundenen Werthe von α fragen, für welche Temperatur er gilt. Diese Temperatur in Graden der hunderttheiligen Scala ausgedrückt, ist durch ϑ bezeichnet. Sie ist gefunden mit Hülfe der Gleichung (17). Ist ϑ_0 die Anfangstemperatur des Würfels, ϑ_1 die Temperatur, die die Vorderfläche desselben durch das Bespritzen erhält, so ist:

$$(26) \quad \vartheta = \vartheta_0 + u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

Genau genug wäre es gewesen, dieses ϑ_0 der unmittelbar beobachteten Temperatur des Kastens gleich zu setzen; bei den angegebenen Werthen ist indessen die kleine Correction angebracht, die sich aus der Scalenableseung bei geöffnetem Galvanometerkreise und dem Mittel der Scalenableseungen berechnen lässt, die bei Einschaltung der einen oder der andern Thermokette vor der Zeit o gewonnen sind. $\vartheta_1 - \vartheta_0$ und daraus ϑ_1 liess sich berechnen aus der in der Gleichung (15) vorkommenden Grösse C . Wir setzten nun:

$$(27) \quad \begin{aligned} a &= a_{15} + a_1 (\vartheta - 15) \\ c &= c_{15} + c_1 (\vartheta - 15), \end{aligned}$$

indem wir also durch a_{15} und c_{15} die Werthe von a und c bei der Temperatur von 15° C. bezeichneten und den Zeichen a_1 und c_1 die Bedeutung liessen, die sie in der Gleichung (17) haben.

In dieser Gleichung darf man $c_0 = c_{15}$ und für a_0 irgend einen Näherungswerth von a setzen. Aus der Angabe von Bède¹⁾ über die Aenderungen der specifischen Wärme des Eisens mit der Temperatur ergibt sich:

$$\frac{c_1}{c_{15}} = 0,00129.$$

Durch Benutzung dieses Zahlenwerthes werden alle Grössen, die in dem Ausdrucke für u_m in Gleichung (17) vorkommen, bis auf a_1 bekannt, und die Gleichung:

$$a = a_{15} + a_1 (\vartheta_0 - 15) + a_1 u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

die aus (26) und (27) folgt, ist eine Gleichung, und zwar eine lineare Gleichung, zwischen den beiden Unbekannten a_{15} und a_1 . Ein jeder Versuch gibt eine solche Gleichung. Aus allen diesen Gleichungen haben wir a_{15} und a_1 so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der beobachteten Werthe von a ein Minimum ist. So ergab sich:

$$a_{15} = 16,94 \quad a_1 = -0,034.$$

Mit Hülfe dieser Zahlen sind die Werthe von ϑ aus (26) und dann die von a aus (27) berechnet.

1) Bède, Fortschritte der Physik, p. 379. 1855.