Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4.° ordine (*).

(*Di* Gaetano Scorza, *a Pisa.*)

Partendo dai concetti stabiliti dal Reye nelle sue classiche Memorie inserite nei vol. 72, 78, 79 e 82 del *Giornale di Crelle*, i sigg. De-Paolis, Schlesinger e London (**) hanno sviluppata da vari punti di vista, con varia estensione, la teoria delle figure polari delle curve piane del 3.° ordine.

Io mi son proposto di risolvere il problema analogo per le curve piane del 4.° ordine, e in questo lavoro pubblico appunto i risultati più notevoli a cui son pervenuto. Esso è diviso in due parti: nella prima riprendo la teoria generale delle figure polari per la chiarezza dell'esposizione e anche per apportarvi alcune aggiunte che mi paiono degne di nota (in particolare vedi i n.i 6, 8, 10, 11, 16); nella seconda considero in modo speciale le figure polari delle quartiche piane.

I.

Generalità sulle figure polari delle curve piane.

§ 1. — Definizioni e proposizioni preliminari.

1. Due curve, l'una di ordine n, C^n, rappresentata simbolicamente dall'equazione:

$$a_x^n = 0,$$

(*) Tesi presentata per la laurea alla R. Università di Pisa nel luglio 1898.

(**) De-Paolis, *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, 1886); Schlesinger, *Ueber coniugirte Curven u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 30); e *Ueber die Werwerthung der ϑ-Functionen u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 31); London, *Ueber die Polarfiguren der ebenen Curven 3 Ordnung* (Math. Ann., Bd. 36). A proposito di questa Memoria del London mi permetto di richiamare all'attenzione del lettore una mia breve Nota inserita nel vol. 51.° dei Math. Ann.

l'altra di classe n, K^n, rappresentata simbolicamente da (*):

$$u_a^n = 0,$$

si dicono *conjugate* od *armoniche* quando è nullo l'invariante simultaneo bilineare a_a^n, cioè quando si ha:

$$a_a^n = 0. \tag{1}$$

Tale denominazione è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica, quando la curva C^n si riduce a una retta contata n volte, o la curva K^n si riduce a un punto contato n volte: nel primo caso la (1) esprime che la curva K^n tocca quella retta, nel secondo, che la curva C^n passa per quel punto.

Quando poi la curva K^n si spezza in n punti, anche non tutti distinti (o la curva C^n in n rette) e la condizione (1) è sempre soddisfatta, si dice che il *gruppo di n punti* o *n-gono* (n rette) in cui si spezza la K^n (la C^n) è *coniugato rispetto alla* C^n (K^n).

Stante la linearità di a_a^n nei coefficienti di a_x^n ed u_a^n seguono immediatamente i noti teoremi:

I. *Se una curva è coniugata ad altre* $r+1$ *linearmente indipendenti, è coniugata a tutte le curve del sistema lineare* ∞^r *da esse determinato.*

II. *Ad ogni sistema lineare* ∞^r *di curve d'ordine n (o di classe n) è coordinato un sistema lineare* $\infty^{N(n)-r-1}$ *di curve di classe n (o d'ordine n) tale che una curva qualunque del primo sistema e una qualunque del secondo sono fra loro coniugate, avendo posto secondo il solito:*

$$N(n) = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Due tali sistemi si dicono associati.

2. Consideriamo ora una curva fondamentale d'ordine n, C^n, e una curva di classe m, K^m, essendo $m < n$. Le curve di classe $n-m$ che, insieme a K^m, dànno una curva di classe n coniugata a C^n, costituiscono, in generale, un sistema lineare $\infty^{N(n-m)-1}$; la curva d'ordine $n-m$, C^{n-m}, associata a questo sistema dicesi la *polare* di K^m rispetto a C^n.

Supposto che K^m si spezzi in uno o più punti, contati una o più volte ciascuno, si arriva all'ordinaria nozione di polari successive pure e miste di punti rispetto a una curva fondamentale.

(*) D'ora innanzi indicheremo sempre con C^n una curva d'ordine n e con K^n una curva di classe n.

Se le equazioni di C^n e K^m sono rispettivamente:

$$a_x^n = 0, \quad u_a^m = 0,$$

l'equazione di C^{n-m} è:

$$a_a^m \, a_x^{n-m} = 0,$$

e su di essa si verificano subito i teoremi:

I. *La polare di K^m rispetto a C^n è il luogo dei punti che contati $n - m$ volte dànno insieme a K^m una curva di classe n coniugata a C^n.*

II. *Se due curve di classe m ed $n - m$, K^m e K^{n-m}, prese insieme dànno una curva di classe n coniugata a C^n, ciascuna è coniugata alla polare dell'altra rispetto a C^n; quindi la polare C^{n-m} di K^m è il luogo dei punti le cui polari d'ordine m sono coniugate a K^m.*

III. *Le polari di tutte le curve di un sistema lineare ∞^r prese rispetto a una medesima curva fondamentale costituiscono, in generale, un sistema lineare ∞^r proiettivo al primo.*

IV. *Le polari di una stessa curva rispetto a tutte quelle di un sistema lineare ∞^r costituiscono, in generale, un sistema lineare ∞^r ad esso proiettivo.*

3. La curva K^m si dice *apolare* rispetto a C^n quando la sua polare rispetto a C^n è indeterminata.

Per questo, indicate sempre con:

$$a_x^n = 0, \quad u_a^m = 0,$$

le equazioni di C^n e K^m ordinatamente, occorre che sia identicamente nulla l'espressione:

$$a_a^m \, a_x^{n-m},$$

ossia, i coefficienti dell'equazione di K^m debbono soddisfare a $N(n - m) + 1$ equazioni lineari omogenee, e quindi, se la C^n è una curva generale del suo ordine, deve essere:

$$N(m) + 1 > N(n - m) + 1,$$

cioè:

$$m > \left[\frac{n}{2}\right],$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ indicando il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$. Ne ricaviamo il teorema:

Per una curva generale d'ordine n o non vi è alcuna curva di classe m apolare o ve ne sono infinite: precisamente (*), *supposto che sia*

(*) Si osservi la maggior semplicità di questo enunciato in confronto a quello contenuto nella cit. Memoria del De-Paolis.

$m > \left[\frac{n}{2}\right]$ *le curve di classe m apolari costituiscono un sistema lineare* $\infty^{N(m)-N(n-m)-1}$.

Siano date r curve qualunque di classe m, linearmente indipendenti, e vogliasi che esse siano apolari per una certa curva C^n d'ordine n, supposto naturalmente che sia $m > \left[\frac{n}{2}\right]$; si avranno fra i coefficienti della C^n $r\,N(n-m)+r$ equazioni lineari omogenee, e quindi r non può superare $\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right]$.

Allora, poichè (supposto naturalmente $n \geqq 3$):

$$\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right] < N(m) - N(n-m),$$

tranne il caso di $n=3$ ed $m=2$, si ha il teorema:

Eccettuato il tessuto delle curve di 2.ª classe apolari a una cubica, ogni altro sistema lineare di curve K^m apolari a una C^n è da considerarsi come un sistema particolare, potendosi assegnare arbitrariamente solo:

$$\left[\frac{N(n)}{N(n-m)+1}\right],$$

sue curve indipendenti.

Si osservi in particolare che del sistema lineare delle $K^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ apolari di una C^n possono assegnarsene arbitrariamente 3 o 4 soltanto, secondo che n è dispari o pari, mentre se $n = 2k+1$ esse costituiscono un sistema lineare ∞^{k+1}, e se $n=2k$ esse costituiscono un sistema lineare $\infty^{2(k+1)}$.

4. Supponiamo n pari e poniamo $n=2k$. Allora una C^n generale non ammette alcuna K^k apolare: esiste una curva apolare di classe k e in generale una soltanto quando si annulla un determinante d'ordine $N(k)+1$ costruito coi coefficienti dell'equazione della C^n e che in ogni caso è un suo invariante.

Che se poi, oltre ad annullarsi il determinante ora detto d'ordine $N(k)+1$, si annullano anche dei suoi minori, per modo che la sua caratteristica r sia minore di $N(k)$, allora è chiaro che esisterà un sistema lineare $\infty^{N(k)-r}$ di K^k apolari.

Esclusi questi casi particolari, *ogni* K^k ha rispetto ad una C^{2k} generale una determinata polare C^k: onde tra i due sistemi lineari $\infty^{N(k)}$ delle K^k e delle C^k del piano viene stabilita una corrispondenza biunivoca, che può studiarsi facilmente considerandola come una polarità rispetto alla quadrica dello spazio ad $N(k)$ dimensioni (*).

Noi, per ora, non vogliamo fermarci particolarmente su ciò: solo vogliamo far notare un contravariante notevole che nasce da queste considerazioni.

Rispetto a una C^{2k} generale ogni retta a contata k volte è la polare di una determinata K^k; col CAPORALI (**) noi diremo questa curva l'*antipolare* della retta a: ed è chiaro che se di due rette, a e b, a tocca l'antipolare di b, anche b tocca l'antipolare di a. Quindi, se in un fascio due raggi si dicono corrispondenti quando l'uno tocca l'antipolare dell'altro, si ha nel fascio una corrispondenza simmetrica (k, k) con $2k$ coincidenze. Ossia:

Data una C^{2k} generale le rette del piano che toccano le loro antipolari inviluppano una curva di classe $2k$.

Questo contravariante, seguendo il CLEBSCH e il CAPORALI (***) che lo hanno considerato pel caso $k=2$, noi lo diremo sempre il *contravariante* Ω di C^{2k}.

Il contravariante Ω è toccato da una sua tangente qualunque nel punto ove questa tocca la sua antipolare;

onde in particolare per $k=2$:

Il contravariante Ω di una quartica tocca nelle cuspidi delle 24 cubiche polari cuspidate della quartica le relative tangenti cuspidali.

Notisi che se la C^{2k} considerata ammette una K^k apolare, ossia si annulla il suddetto determinante di ordine $N(k)+1$ che nel caso della quartica è conosciuto sotto il nome di *invariante sestico*, il contravariante Ω si spezza nella K^k apolare contata due volte.

5. Raccogliamo qui alcuni teoremi che seguono immediatamente dalla definizione stessa di curva apolare, e che ci saranno molto utili nel seguito.

I. *Un punto contato m volte è apolare rispetto ad una C^n se è multiplo secondo $n-m+1$ per la curva medesima.*

(*) Cfr. SEGRE, *Alcune idee di* E. CAPORALI *intorno alle quartiche piane* (Ann. di Mat., Serie II, t. XX); CIANI, *Sopra la corrispondenza polare*, etc. (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1895).

(**) CAPORALI, *Memorie di Geometria*, pag. 354,

(***) CLEBSCH, *Ueber Curven vierter Ordnung* (Crelle, Bd. 59); CAPORALI, *l. cit.*

Non tralascieremo poi di ricordare che il REYE nella sua Memoria, *Ueber die reciproke Werwandtschaft von F^2 Systemen und Φ^2 Geweben u. s. w.*, Bd. 82, fa considerazioni analoghe a queste per le superficie del 4.° ordine.

II. *Se una K^m contiene come parte una curva apolare ad una C^n $(m < n)$, essa è apolare a C^n.*

III. *Se $r+1$ curve linearmente indipendenti della stessa classe sono apolari rispetto ad un'altra, ciò avviene per tutte le curve del sistema lineare ∞^r da esse determinato: e se una K^m è apolare rispetto ad $r+1$ curve del medesimo ordine linearmente indipendenti è apolare rispetto a tutte le curve del sistema lineare ∞^r da esse determinato.*

§ 2. — Gruppi di punti apolari; $(n+1)$-goni coniugati rispetto a una C^n.

6. Particolarmente interessanti rispetto ad una C^n fondamentale sono i gruppi di n punti, o n-goni, coniugati e i gruppi apolari di $n-1$ punti. Quelli costituiscono una totalità ∞^{2n-1}, questi una totalità ∞^{2n-5}; e va sottinteso, naturalmente, che più punti di un gruppo possono coincidere in uno solo contato più volte.

In un gruppo di n punti coniugati ognuno trovasi sulla retta polare mista degli altri $n-1$, e se n punti coniugati sono in linea retta, è chiaro che essi costituiscono un gruppo coniugato a quello secondo cui la retta, che li contiene, taglia la C^n considerata, nel senso ordinario di gruppi binari coniugati. Ne segue che se un gruppo di $n-1$ punti in linea retta ha per polare mista rispetto a C^n la retta su cui giace (in particolare, è apolare a C^n), esso è apolare rispetto al gruppo secondo cui la retta stessa taglia C^n e quindi si ha il teorema:

Sopra ogni retta del piano vi è una involuzione d'ordine $n-1$ e di specie $n-3$, I_{n-1}^{n-3}, costituita dai gruppi di $n-1$ punti, che hanno per polare mista rispetto a C^n la retta medesima (o, in particolare, sono apolari).

Ora basta che un gruppo di questa I_{n-1}^{n-3} costituisca con un punto qualunque fuori della retta un n-gono coniugato a C^n, perchè esso sia apolare a C^n, dunque:

Sopra ogni retta del piano vi è una I_{n-1}^{n-4} costituita dai gruppi di $n-1$ punti apolari a C^n.

Vediamo più davvicino le conseguenze di questi teoremi per $n = 4, 5, 6$.

Innanzi tutto, data una quartica C^4, sopra ogni retta del piano si ha una involuzione cubica di 1.ª specie costituita dalle terne di punti che hanno per retta polare mista la retta medesima; e questa involuzione contiene *la* terna apolare a C^4 situata sulla retta (*). Poi, siccome una binaria biquadratica ammette una forma quadratica apolare solo quando è armonica, così segue che la retta r, la quale contiene una coppia di punti avente per conica polare mista una conica spezzata nella retta r medesima e in una retta residua, tocca costantemente l'inviluppo armonico della quartica C^4. Ed è chiaro che sopra ogni tangente dell'inviluppo armonico la coppia di punti in discorso costituisce (contata due volte) l'hessiana della quaterna di punti secondo cui essa taglia C^4, mentre l'involuzione cubica suddetta è costituita da questi due punti fissi e da un punto variabile sulla retta.

Così anche l'inviluppo armonico, una delle più note curve invariantive della quartica, proviene dalla corrispondenza polare fra coniche-inviluppo e coniche-luogo che la quartica medesima stabilisce.

Data invece una quintica C^5, sopra ogni retta r vi è una involuzione di prima specie e del quarto ordine costituita di quaterne apolari alla quintica. Anzi, poichè ogni quintica binaria ammette una cubica binaria apolare, segue che sopra ogni retta r giace una terna di punti la cui conica polare mista contiene la retta r. Allora ogni coppia di questa terna ha per cubica polare mista una cubica con un flesso nel terzo punto della terna medesima, la tangente di flesso essendo r, e le coppie di rette, incrociate su r e costituenti le coniche polari miste delle terne tratte dalle ∞^1 quaterne apolari situate su r, inviluppano una curva della 3.ª classe tangente ad r.

Se la retta r ruota intorno a un punto P, la terna suddetta, che essa contiene, descrive una curva del 9.° ordine con un punto sestuplo in P, e le sei tangenti in questo punto alla curva segano armonicamente la quartica polare di P; ecc., ecc.

Così data una sestica C^6 qualunque, poichè una sestica binaria ammette una cubica apolare solo quando si annulla il suo cataletticante, che è del 4.° grado nei suoi coefficienti, la retta r, che contiene una terna di punti la cui cubica polare mista rispetto a C^6 si spezza nella retta r medesima e in una conica, inviluppa una curva della 12.ª classe; ecc., ecc.

7. Come è chiaro, un gruppo di $n-1$ punti costituito da un punto A contato $n-2$ volte e da un altro B contato una volta sola è apolare rispetto a una C^n, solo quando A e B sono due punti corrispondenti della Hessiana e della Steineriana di C^n: allora la retta AB è una tangente della Cayleyana e la suddetta I^{n-4}_{n-1} contiene un elemento $(n-2)$-plo. Viceversa, se per

(*) Questa terna è stata considerata la prima volta dal CAPORALI, l. cit., pag. 345.

una retta r la relativa I^{n-4}_{n-1} contiene un elemento $(n-2)$-plo la retta r tocca la Cayleyana di C^n: quindi, se, in particolare, per una retta r l'involuzione dei gruppi apolari è invece una I^{n-3}_{n-1}, poichè questa possiede $2(n-2)$ punti $(n-2)$-pli, sarà r una tangente $2(n-2)$-pla per la Cayleyana.

Questa osservazione dà luogo per $n = 4$ a un elegante teorema osservato per la prima volta dal Bertini (*).

Abbiasi una quartica generale C^4 e sia r una tangente doppia della sua Cayleyana: su di essa si hanno due terne apolari a C^4, quindi se ne hanno ∞^1 costituenti un'involuzione cubica. Ma una tale involuzione ha quattro elementi doppi, dunque la retta r è una tangente quadrupla della Cayleyana. Ora si sa dalla teoria generale (**) che la Cayleyana di una quartica ha 126 tangenti doppie, quindi esse si riducono a 21 tangenti quadruple.

Si dimostra poi che queste 21 rette sono le 21 rette che fanno parte delle cubiche polari dei 21 punti doppi della Steineriana.

8. I gruppi di $n-1$ punti apolari a una C^n e situati sopra una retta costituiscono una I^{n-4}_{n-1}, dunque, presi $n-6$ punti qualunque della retta essi si trovano in sei gruppi *neutri* (***) dell'involuzione, ossia si possono assegnare in sei modi differenti due altri punti che, insieme a quegli $n-6$, diano un gruppo di $n-4$ punti che non individua pienamente il gruppo della I^{n-4}_{n-1} a cui appartiene.

Ne segue che:

Presi sopra una retta $n-6$ punti qualunque, vi sono sempre sei coppie di punti tali che la quartica polare mista degli $n-4$ punti dati da quegli $n-6$ e da una di queste coppie rispetto a una curva fondamentale d'ordine n, abbia nella retta stessa una tangente quadrupla della sua Cayleyana.

Particolarmente notevole è l'enunciato che se ne ricava facendo $n = 6$:

Data una curva qualunque del 6.° ordine, sopra ogni retta vi sono sei coppie di punti tali che la retta medesima sia una tangente quadrupla della Cayleyana della loro quartica polare mista.

9. A una curva C^n, se n è pari, è strettamente legato l'inviluppo delle rette che tagliano C^n secondo un gruppo di punti coniugato alla C^n stessa.

(*) Bertini, *Le tangenti multiple della Cayleyana*, etc. (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XXXII).

(**) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. I, pag. 368.

(***) Weyr, *Beiträge zur Curvenlehre*, pag. 42.

Per un'osservazione precedente tale inviluppo, se n è dispari, è indeterminato, perchè ogni binaria d'ordine dispari è coniugata a sè stessa; ma, se n è pari, esso è della n^a classe e la sua equazione è data per un noto *principio di trasporto (Uebertragungsprincip)* da:

$$(a\,b\,u)^n = 0,$$

se:

$$a_x^n = b_x^n = \ldots = 0,$$

è l'equazione di C^n.

10. Per una curva d'ordine n si sogliono considerare anche quei gruppi di $n+1$ punti tali, che n qualunque di essi costituiscono un n-gono coniugato alla curva. Tali gruppi di punti, poichè non può sorgere alcun equivoco, continueremo a chiamarli *gruppi coniugati*, o *$(n+1)$-goni coniugati* alla curva.

Per un gruppo di $n+1$ punti l'essere coniugato a una data C^n equivale a $n+1$ condizioni lineari, dunque:

Ogni C^n possiede ∞^{n+1} $(n+1)$-goni coniugati.

La costruzione degli $(n+1)$-goni coniugati è immediata nel caso di $n=1$ o $n=3$ (*). Qui diamo la costruzione dei pentagoni coniugati di una quartica.

Consideriamo dapprima una cubica C^3 e una quartica C^4 e proponiamoci di trovare i quadrangoli coniugati contemporaneamente alla C^3 e alla C^4.

Presi due punti qualunque A e B, vi è sulla polare mista di A e B rispetto a C^3 una determinata coppia C, D costituente con A e B un quadrangolo $A\,B\,C\,D$ coniugato a C^3: precisamente, $C\,D$ è la coppia di punti ove la polare mista di A e B taglia la conica che ad essa corrisponde nella trasformazione quadratica involutoria di Steiner individuata dalle coniche polari di A e B rispetto a C^3.

Ora teniamo fisso il punto A e facciamo scorrere il punto B sopra una retta r: la retta $C\,D$ ruoterà intorno al polo R di r rispetto alla conica polare di A, e, come è noto (**) e si vede subito del resto, i punti C e D descriveranno una curva del 4.° ordine Φ^4 con un punto doppio in R.

Tra questi ∞^1 quadrangoli coniugati per la C^3 cerchiamo quelli che sono coniugati anche per la C^4, ossia cerchiamo per quante posizioni del punto B sulla retta r avviene che, costruito il quadrangolo $A\,B\,C\,D$ coniugato a C^3, questo risulti anche coniugato a C^4.

(*) Per $n=3$, vedi: Caporali, l. cit., pag. 51.

(**) Caporali, l. cit., pag. 50.

Per questo ci occorre trovare dapprima la classe dell'inviluppo generato dalla retta polare mista della terna $A\,C\,D$ rispetto a C^4 quando la coppia $C\,D$ descrive la quartica Φ^4, ossia, giacchè la polare mista di $A\,C\,D$ passa per un punto O fissato a piacere quando C e D sono coniugati rispetto alla conica C^2 polare mista di A e O rispetto a C^4, bisogna trovare fra le ∞^1 coppie $C\,D$ della quartica Φ^4 quelle coniugate rispetto a tale C^2.

Una trasversale qualunque condotta per R taglia la quartica Φ^4 in una coppia $C\,D$: allora se C' e D' sono i punti di questa trasversale coniugati ordinatamente a C e D rispetto alla detta C^2, il luogo dei punti C' e D' al ruotare della trasversale intorno ad R è evidentemente una curva del 6.° ordine con un punto quadruplo in R. Dei 16 punti ove questa curva del 6.° ordine taglia la quartica Φ^4 fuori di R, otto sono i punti ove Φ^4 è tagliata dalla conica polare mista di A e O, e altri otto si distribuiscono in quattro coppie di punti allineati con R e che dànno le coppie richieste (*).

(*) In generale:

Data una conica e una curva d'ordine n, vi sono $n(n-r-1)$ coppie di punti (distinti) della curva d'ordine n allineati con un suo punto r-plo e che siano coniugati rispetto alla conica.

Facendo $n=3$ ed $r=1$ questo teorema esprime che presa una conica ed una cubica vi sono sulla cubica tre coppie di punti soltanto, in generale, che siano allineati con un punto della cubica medesima e siano coniugati rispetto alla conica. Che se ciò avviene per quattro coppie allora avviene per tutte: d'altra parte quattro coppie di punti sono sempre coniugate rispetto a un fascio di coniche, dunque:

Le ∞^1 coppie di punti che si ottengono tagliando una cubica colle rette uscenti da un suo punto si possono sempre pensare come coppie di punti coniugati rispetto a un fascio di coniche. I punti-base di questo fascio sono i punti di contatto delle tangenti condotte da quel punto alla cubica.

Con ciò si ottengono ∞^1 trasformazioni quadratiche involutorie di Steiner che trasformano la cubica in sè stessa. (Cfr. Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti dell'Acc. di Torino, 1889].)

Similmente si dimostra che:

Vi è sempre una conica rispetto a cui siano coniugate le ∞^1 coppie di punti tagliate su una quartica dotata di punto doppio dalle rette uscenti da questo punto. Essa è la conica che passa pei sei punti di contatto delle tangenti condotte alla quartica dal suo punto doppio e pei due punti allineati con quelli ove le tangenti alla quartica nel punto doppio tagliano ulteriormente la curva medesima. Inoltre le tangenti alla conica in questi due punti passano pel punto doppio.

(Cfr. Bertini, *Una nuova proprietà delle curve di ordine n con un punto $(n-2)$-plo*, (R. Acc. dei Lincei, vol. 1.°, serie 3.ª, Transunti); Caporali, *Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo*, l. cit.)

L'inviluppo suddetto è adunque della 4.^{a} classe.

Ne segue che se B è un punto qualunque di r e B' è il punto ove r taglia la polare mista della corrispondente terna $A\,C\,D$, fra i punti B e B' viene stabilita una corrispondenza (4, 1): ossia:

Una cubica ed una quartica hanno sempre ∞^3 quadrangoli coniugati a comune. Preso arbitrariamente un punto, le ∞^1 terne che insieme ad esso dànno quadrangoli di tale specie sono situate sopra una curva del 5.° ordine.

Ora se un pentagono $A\,B\,C\,D\,E$ è coniugato ad una quartica, il quadrangolo $B\,C\,D\,E$ per es. è coniugato tanto alla quartica quanto alla cubica polare di A rispetto alla quartica, e viceversa: dunque:

Per ogni quartica vi sono ∞^5 pentagoni coniugati. Presi arbitrariamente due vertici di un tal pentagono, gli altri tre descrivono una curva del 5.° ordine che passa per i due punti dati.

Quest'ultima asserzione può dimostrarsi osservando che se A e B sono i due punti dati e $B\,C\,D$ è il triangolo coniugato comune alla cubica polare di A e alla conica polare del medesimo punto con un vertice in B, il pentagono $A\,A\,B\,C\,D$ con due vertici coincidenti in A è coniugato a C^4.

11. Possiamo vedere facilmente quanti sono i pentagoni coniugati costituiti dai quattro vertici di un quadrangolo completo e da un suo punto diagonale.

Sia $A\,B\,C\,D\,X$ un tale pentagono, essendo X all'intersezione di $A\,B$ e $C\,D$; rispetto alla conica polare mista di C e D i tre punti A, B, X hanno per polare la medesima retta $A\,B\,X$, dunque la conica polare mista di C e D contiene la retta $A\,B$, C e D sono punti coniugati della G_r di Caporali (l. cit., pag. 344-45) corrispondente alla retta $r \equiv A\,B$, e la retta $C\,D$ appartiene all'inviluppo della 3.^{a} classe, costituito dalle congiungenti queste coppie di punti coniugati, che indicheremo con Γ_r.

Inoltre la polare mista della terna $A\,B\,X$ è la retta $C\,D$ passante per X. Ora, dato un punto A e una retta r per esso, si considerino le ∞^1 terne $A\,B\,X$ situate su r tali che la retta polare mista di ciascuna di esse passi per il relativo punto X: poichè vi è sopra r una terna $A\,B\,X$ tale che la sua retta polare mista è la retta r medesima, l'inviluppo di queste ∞^1 rette, che indicheremo con Δ_r, avrà una tangente doppia in r e sarà della 3.^{a} classe; quindi la retta $C\,D$ tocca due curve della 3.^{a} classe.

Ne deduciamo che, dato del pentagono $A\,B\,C\,D\,X$ il vertice A e il lato $r \equiv A\,B$, il punto B e quindi il pentagono può determinarsi in nove modi differenti. Onde i pentagoni della specie richiesta sono ∞^3.

Si potrebbero determinare subito gli ordini dei luoghi descritti dai punti B e X al variare della r intorno al punto A; ma su ciò crediamo inutile intrattenerci più oltre. Solo osserveremo che quando la retta r ruotando intorno ad A prende la posizione di una delle tangenti alla polocayleyana (*) di A, la terna $A\,B\,X$ che ha per retta polare mista la retta r medesima è addirittura apolare alla quartica; quindi l'inviluppo Δ_r si spezza in tre fasci di raggi coi centri nei punti B, X e nel polo della retta r rispetto alla conica polare di A. Ossia si ha il teorema:

Preso sopra una retta r uno dei punti A della terna apolare situata sopra r, e le coppie di punti B, X tali che la retta polare mista di A, B, X passi per X, si trova che queste rette passano per un punto fisso — pel polo della retta r rispetto alla conica polare di A.

In particolare questo teorema si verifica per tutti i punti delle 21 tangenti quadruple della Cayleyana della quartica.

§ 3 — Polilateri polari di una curva piana d'ordine n.

12. La nozione di curve coniugate conduce alla soluzione più semplice e spontanea dei problemi di questa natura:

Data una forma ternaria di ordine qualunque n esprimerla linearmente per le potenze n^e di un certo numero di forme lineari.

Definito per *p-latero polare* di una C^n un sistema di p rette ($p \leq N(n)$) tali, che l'equazione della C^n possa ottenersi come una combinazione lineare omogenea delle potenze n^e delle forme lineari che, uguagliate a zero rappresentano le equazioni delle p rette, questo problema coincide chiaramente coll'altro:

Data una C^n costruire tutti i suoi p-lateri polari.

Ora questa costruzione nei casi particolari è facilitata e fornita da alcuni teoremi semplici e generali che qui esporremo brevemente.

13. Se un p-latero $a_1 a_2 \dots a_p$ è polare per una C^n, è chiaro che ogni curva di classe n inscritta in esso è coniugata a C^n, essendo coniugata

(*) Col Caporali chiamiamo polohessiana e polocayleyana di un punto rispetto ad una quartica la Hessiana e la Cayleyana della sua cubica polare, ed, una volta per tutte, osserviamo che qui e in prosieguo si suppongono note al lettore tutte le osservazioni contenute nei *Frammenti* del Caporali e nella Memoria di Clebsch inserita nel 59.° vol. del *Giornale di Crelle*.

a tutte le curve d'ordine n costituite dalle p rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ contate ciascuna n volte; e viceversa: dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un p-latero $a_1 a_2 \ldots a_p$ sia polare per una C^n è, che tutte le curve di classe n inscritte in esso siano coniugate a C^n.

Se le rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di classe n che le toccano, questi costituiscono in tutto un sistema lineare $\infty^{N(n)-p}$, e quindi per dimostrare in tal caso che il p-latero $a_1 \ldots a_p$ è polare per una C^n, basta far vedere che $N(n) - p + 1$ curve di classe n, inscritte in esso e linearmente indipendenti, sono coniugate a C^n. Allora fra le potenze n^e delle p forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano le equazioni delle p rette, non passa alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti; e viceversa, se ciò avviene, le rette $a_1, a_2, \ldots a_p$ offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di classe n che le toccano.

Si vede da ciò quanto sia importante studiare quei particolari sistemi di rette pei quali avviene che fra le potenze n^e delle forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano le equazioni delle rette passi una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Tale studio è stato fatto dal Rosanes (*) che ha dato su di essi i teoremi più importanti, e noi non staremo a ripeterli qui; solo, in prosieguo, esponendo la teoria dei polilateri polari delle quartiche terremo conto volta per volta di queste osservazioni per ottenere tutto il necessario rigore.

Dalle cose dette precedentemente risulta anche il teorema:

Se un p-latero è polare per una C^n ogni curva di classe m $(m < n)$ inscritta in esso è apolare a C^n;

che, in un certo senso, può invertirsi così:

Se un p-latero è costituito dalle tangenti comuni a due curve di classe m ed m' rispettivamente che non hanno alcuna tangente multipla a comune e sono apolari a una curva d'ordine n $\left(p = m\,m',\ p \leq \frac{n(n+3)}{2}\right)$, esso è polare per quest'ultima curva.

Infatti, se:

$$u_\alpha^m = 0, \quad u_\beta^{m'} = 0,$$

sono le equazioni di quelle due curve di classe m ed m', ed:

$$u_\gamma^m = 0,$$

(*) Rosanes, *Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen* (Crelle, Bd. 76).

è una qualunque curva di classe n inscritta nel p-latero, poichè per ipotesi le due curve di classe m ed m' non hanno alcuna tangente multipla comune, si possono trovare sempre due forme $u_{\alpha'}^{n-m}$ ed $_{\beta'}^{n-m'}$ tali che si abbia identicamente (*):

$$u_\gamma^n = u_{\alpha'}^{n-m}\, u_\alpha^m + u_{\beta'}^{n-m'}\, u_\beta^{m'},$$

e quindi, se:

$$a_x^n = 0\,,$$

è l'equazione della curva data di ordine n, in virtù di:

$$a_\alpha^m\, a_{\alpha'}^{n-m} = a_\beta^{m'}\, a_{\beta'}^{n-m'} = 0,$$

si ha appunto:

$$a_\gamma^n = 0.$$

Ora per una curva d'ordine n esistono sempre delle curve apolari di classe $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$, dunque:

Per ogni curva d'ordine n esistono infiniti $\left\{\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right\}^2$*-lateri polari* (**).

14. Il q-latero formato da q rette qualunque di un p-latero si dirà *contenuto* nel p-latero, e il $(p-q)$-latero formato dalle rette residue si dirà *complementare* del q-latero.

Inoltre si dirà, che m vertici di un p-latero costituiscono una *m-pla di vertici* $\left(m \leq \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ quando due qualunque di essi non si trovano sopra un medesimo lato del p-latero, e il $(p-2m)$-latero formato dai lati residui si dirà *complementare* di quella m-pla di vertici.

Allora riesce ben chiaro il teorema di cui in seguito si farà uso continuamente:

Quando un p-latero è polare per una C^n *e si considera una qualunque curva di classe m* K^m $(m < n)$ *inscritta in un suo q-latero, il* $(p-q)$*-latero complementare è polare per la polare di* K^m *rispetto a* C^n*;*

per modo che, per es., se un p-latero è polare per una C^n ogni suo $(p-1)$-latero è polare per le polari rispetto a C^n dei punti del lato complementare, ogni suo $(p-2)$-latero è polare per la polare del vertice complementare, ecc., ecc.

(*) Cfr. ad es. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria, ecc.* (Rend. del R. Ist. Lombardo, Serie II, vol. XXIV, 1891).

(**) Naturalmente questi non sono tutti i polilateri polari di un tal numero di lati.

Un p-latero ed un q-latero siano ambedue polari per una medesima curva C^n, e supponiamo che, essendo $m < n$, abbiasi $p \leqq N(m)$, $q \leqq N(m)$; di più, supponiamo, che, tanto le p rette del p-latero, quanto quelle del q-latero rappresentino tutte condizioni indipendenti per le curve di classe m che le toccano. Allora nel p-latero sono inscritte $\infty^{N(m)-p}$ e nel q-latero $\infty^{N(m)-q}$ curve di classe m apolari o coniugate a C^n secondochè $m < n$ o $m = n$: questi due sistemi lineari sono contenuti in un sistema lineare $\infty^{N(m)-N(n-m)-1}$, dunque, se $p + q \leqq N(m) + N(n-m) + 1$, essi hanno a comune un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(p+q)}$: ossia:

Un p-latero ed un q-latero polari per una curva d'ordine n e i cui lati offrano tutte condizioni indipendenti alle curve di classe m che li toccano, sono circoscritti a un sistema lineare $\infty^{N(m)+N(n-m)+1-(p+q)}$ di curve di classe m, se, essendo $m \leqq n$, $p \leqq N(m)$, $q \leqq N(m)$, si ha anche:

$$p + q \leqq N(m) + N(n-m) + 1.$$

15. Sulla costruzione delle figure polari di una C^n, in generale, si conosce ben poco: non si conoscono che le costruzioni degli $N(n)$—, $[N(n)-1]$—, $[N(n)-2]$— lateri polari (*), le quali del resto sono immediate e offrono per la curva ben poco interesse.

Un teorema generale del Reye (**) dà per ogni curva una figura polare costituita da un numero minore di lati dimostrandosi che:

Per ogni curva d'ordine n è polare l' $\frac{n(n+1)}{2}$-latero costituito dai lati di un suo $(n+1)$-gono coniugato,

e figure polari di un numero ancora minore di lati fornisce un teorema che abbiamo precedentemente enunciato; ma tanto l'uno quanto l'altro hanno il difetto di non fornire il più generale polilatero polare del considerato numero di lati.

Quanto al teorema del Reye non mancheremo poi di far osservare che il numero dei lati dell' $\frac{n(n+1)}{2}$-latero polare, che esso contempla, può essere notevolmente ridotto.

Si considerino nel primo membro dell'equazione della curva, scritta come una somma di $\frac{n(n+1)}{2}$ potenze n^e, gli n termini che si riferiscono ai lati

(*) Cfr. De-Paolis, *l. cit.*

(**) Reye, *Tragheits-und höhere Momente eines Massensystemes in Bezug auf Ebenen,* (Crelle, Bd. 72).

uscenti da un vertice: la loro somma costituisce in sostanza una binaria d'ordine n, la quale, per teoremi notissimi, può esprimersi per $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ anzichè per n potenze n^e di fattori lineari, quindi, senz'altro, nel primo membro dell'equazione della curva possono eliminarsi $\left[\frac{n}{2}\right]$ o $\frac{n}{2}-1$ (secondochè n è dispari o pari) potenze n^e di fattori lineari. Così continuando si giustifica la nostra asserzione.

Un' altra quistione molto interessante sarebbe quella di determinare per una C^n generale del suo ordine i polilateri polari del minimo numero di lati: ma, mentre questa si risolve facilmente per i primi ordini, pare che offra per gli ordini superiori gravi difficoltà.

16. Terminiamo con un teorema che in casi particolari dà conseguenze notevoli.

Supponiamo n pari: allora ad una C^n è coordinato, come abbiamo visto, un inviluppo della n^a classe costituito dalle rette che tagliano C^n secondo un gruppo coniugato di n punti: e se:

$$a_x^n = b_x^n = \cdots = 0,$$

è l'equazione della C^n,

$$(a\, b\, u)^n = 0,$$

è l'equazione di quell'inviluppo.

Supponiamo che il p-latero $a_1\, a_2 \ldots a_p$, i cui lati hanno per equazione:

$$a_{1,x} = 0, \quad a_{2,x} = 0, \ldots \quad a_{p,x} = 0,$$

sia polare per la C^n: sussisterà una identità della forma:

$$a_x^n = \sum_{i=1}^{i=p} k_i\, a_{i,x}^n,$$

le k_i essendo delle costanti, e quindi sarà per un principio adoperato la prima volta dal Lüroth e poi esplicitamente formulato dal Gordan (*):

$$(a\, b\, u)^n = \sum_{ij} k_i\, k_j\, (a_i\, a_j\, u)^n,$$

dove abbiamo indicato con $(a_i\, a_j\, u)$ il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

(*) Cfr. Lüroth, *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung, u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 1); Gordan, *Ueber das Pentaeder der Flächen 3. O.* (ibid., Bd. 5).

Ma:

$$(a_i\, a_j\, u) = 0\,,$$

è l'equazione del punto ove la retta a_i taglia a_j, dunque si ha il teorema:

Se un p-latero è polare per una C^n ($n = 2\,k$), il $\frac{p\,(p-1)}{2}$-gono costituito dai suoi vertici è polare per l'inviluppo delle rette che tagliano C^n secondo un gruppo coniugato:

pel quale però deve esser fatta una osservazione analoga a quella fatta precedentemente sopra un teorema del Reye.

II.

Sopra le figure polari della quartica piana.

§ 1. — Quartiche particolari.

17. Una quartica generale non ammette polilateri polari di un numero di lati inferiore a sei. Ma non crediamo affatto inutile ricordare rapidamente le proprietà principali delle quartiche che ammettono polilateri polari di un numero di lati inferiore a sei.

18. Una quartica dotata di unilatero o bilatero polare si spezza in una retta contata quattro volte o in una quaterna di rette costituenti gruppo armonico.

19. Una quartica dotata di trilatero polare, i cui lati non concorrano in un punto (altrimenti essa si spezzerebbe in quattro rette per quel punto), ha 12 punti di ondulazione (*) distribuiti in quattro quaterne armoniche sui lati del trilatero e si trasforma in sè stessa per 96 omografie (**). Tra queste, tre sono le omologie armoniche che hanno i centri nei vertici del trilatero e gli assi nei lati opposti, rispettivamente.

Il covariante S, luogo dei punti la cui cubica polare è equianarmonica, è indeterminato: il covariante T, luogo dei punti la cui cubica polare è ar-

(*) Masoni, *Sopra alcune curve del 4.° ordine dotate di punti di ondulazione* (Rendiconti della R. Acc. di Napoli, fasc. 2.°, 1882).

(**) W. Dyck, *Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche, u. s. w.* (Math. Ann., Bd. 17).

monica, si riduce, come la Hessiana, ai tre lati del trilatero contato ciascuno due volte, e la Steineriana si riduce alle tre rette medesime contate ciascuna quattro volte.

Le cubiche polari dei punti di un lato del trilatero si spezzano in terne di rette uscenti dal vertice opposto e costituenti una involuzione cubica sinigetica, di cui la Hessiana è data dai due lati del trilatero passanti per quel vertice: e l'inviluppo armonico si spezza nei tre vertici del trilatero contato ciascuno due volte.

Invece l'inviluppo equianarmonico ha per triangolo polare quello costituito dai tre vertici del trilatero (n.° 16) e trovasi colla quartica in posizione perfettamente reciproca.

Infatti, le quattro tangenti dell'inviluppo equianarmonico che escono da un punto della quartica sono le quattro tangenti condotte dal punto alla propria cubica polare (*): ma in questo caso le cubiche polari sono tutte equianarmoniche, dunque esse costituiscono un gruppo equianarmonico e la nostra asserzione è giustificata.

Infine si osserverà che la quartica in discorso ammette un tessuto di curve di seconda classe apolari, inscritte tutte nel trilatero polare, che è la più generale quartica di tal natura, e che tutte le quartiche a trilatero polare sono proiettivamente identiche.

Quest'ultime osservazioni valgono del resto per tutte le curve a trilatero polare d'ordine $n > 3$.

20. Ben più importanti sono le quartiche dotate di quadrilatero polare. Esse sono state considerate spesso dai Geometri (**) ed è notissima la particolare quartica a quadrilatero polare che porta il nome del Caporali. Appunto perciò noi non ci fermeremo più oltre su di esse: solo osserveremo che la quartica di Caporali è tanto più notevole, in quanto è l'unico caso in cui si conoscono le proprietà dei 24 flessi.

21. Passiamo quindi a considerare le quartiche a pentalatero polare, o, come diremo, le *quartiche di* Clebsch (***).

Se una quartica C^4 ammette un pentalatero polare $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$, la K^2 inscritta in esso è apolare a C^4 e quindi deve annullarsi l'invariante sestico

(*) Caporali, *l. cit.*, pag. 357.

(**) Del Pezzo, *Sulla curva Hessiana* (Rend. della R. Acc. di Napoli, 1883); Caporali, *l. cit.*; Ciani, *La quartica di Caporali* (Rend. della R. Accad. di Napoli, 1896).

(***) Clebsch, *l. cit.*; Lüroth, *l. cit.*

di C^4. Poi, siccome ogni vertice del pentalatero ha per cubica polare una cubica dotata di trilatero polare — il trilatero complementare —, il pentalatero $a_1 \ldots a_5$ sarà inscritto nel covariante S di C^4.

Viceversa, sia nullo l'invariante sestico di C^4: allora esisterà, in generale una sola K^2 apolare a C^4 e ogni sua tangente apparterrà a un pentalatero polare di C^4.

Sia, infatti, a_5 una tangente qualunque di tale K^2 e siano A_1, A_2, A_3, A_4 i punti ove essa taglia il covariante S: la polohessiana di A_1 sarà un trilatero circoscritto a K^2, poichè K^2 è apolare alla quartica, e quindi alla cubica polare di A_1, e, se a_2, a_3, a_4 sono i lati di questo trilatero, i vertici a_{23}, a_{34}, a_{42} (*) saranno ancora dei punti di S. Allora la polohessiana di a_{23} per es. sarà un trilatero con un vertice nel punto A_1 e circoscritto e K^2, ossia sarà costituita dalla retta a_4, dalla a_5 e dalla ulteriore tangente a_1 condotta dal punto A_1 alla conica K^2.

Ne segue che la retta a_4 taglia a_5 in un punto di S e quindi essa passa o per A_2, o per A_3, o per A_4.

Supponiamo che passi per A_4 e che, come analogamente si dimostrerebbe, a_2 e a_3 passino ordinatamente per A_2 e A_3: allora è subito visto, che il pentalatero $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ così costruito è inscritto nel covariante S, che ogni suo vertice ha per trilatero polohessiano il trilatero complementare e ogni sua coppia di vertici (nel senso dichiarato al n.° 14) ha per conica polare mista il lato complementare contato due volte.

Ora la K^2 inscritta nel pentalatero $a_1 \ldots a_5$ insieme a tutte le curve di 2.ª classe del piano, e la coppia di vertici a_{12}, a_{34}, per es., insieme alle curve di 2.ª classe tangenti ad a_5, danno due sistemi lineari ∞^5 e ∞^1 rispettivamente di curve di 4.ª classe inscritte nel pentalatero e coniugate a C^4, e il sistema lineare di dimensione minima contenente questi due è un sistema lineare ∞^9, poichè essi hanno a comune la sola curva di 4.ª classe costituita dalla coppia a_{12}, a_{34} insieme alla detta K^2; dunque poichè le cinque rette $a_1, \ldots\, a_5$ offrono condizioni tutte indipendenti alle curve di 4.ª classe, che le toccano, il pentalatero $a_1 \ldots a_5$ è polare per la C^4 considerata.

Si ha perciò il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica ammetta pentalateri polari è espressa dall'annullarsi dell'invariante sestico. Supposta

(*) Adesso e nel seguito indicheremo sempre con a_{ij} il punto d'incontro di due rette indicate con a_i ed a_j.

questa condizione soddisfatta, la quartica (di Clebsch*) possiede una conica-inviluppo apolare ed* ∞^1 *pentalateri polari circoscritti a questa conica e inscritti nel covariante S.*

22. Mantenendo le ipotesi e le notazioni precedenti, consideriamo uno degli 8 punti ove la conica K^2 taglia il covariante S e ripetiamo la costruzione precedente prendendo per a_5 la tangente a K^2 in uno di questi punti: allora è subito visto, che i lati del trilatero polohessiano del punto di contatto di a_5 passano per i tre punti ove questa retta taglia ulteriormente il covariante S e toccano ivi il covariante medesimo. Inoltre la polohessiana di ogni vertice del trilatero consta di a_5 contata due volte e del lato opposto, dunque in questo caso non si può più parlare di pentalatero polare, ma le cubiche polari dei vertici del trilatero hanno tutte a_5 per tangente cuspidale, e quindi si ha il teorema (Lüroth):

Le 24 tangenti cuspidali delle 24 cubiche polari cuspidate di una quartica di Clebsch *coincidono tre a tre nelle otto rette* (*) *tangenti alla conica-inviluppo apolare alla quartica negli otto punti ove essa è tagliata dal covariante S, e i 24 poli, cioè le 24 cuspidi della Steineriana, dànno otto triangoli circoscritti alla conica-inviluppo apolare e al covariante S, e tali, che in ognuno di essi un lato tocca il covariante S nella cuspide della cubica polare del vertice opposto. Queste 24 cuspidi sono tre a tre su quelle otto tangenti; dunque la Hessiana e il covariante S si tagliano in 24 punti allineati tre a tre sulle dette otto tangenti.*

In particolare ne risulta, che il covariante S ha 24 tangenti comuni con la conica-inviluppo apolare e che quindi è della 12.ª classe: ossia possiamo enunciare il teorema:

Il covariante S di una quartica generale è privo di nodi e di cuspidi (**).

(*) Si osserverà che queste otto rette sono le rette doppie della involuzione del 5.° ordine costituita sulla conica-inviluppo apolare dalle quintuple di lati degli ∞^1 pentalateri polari. Ora per il teorema del Rosanes (l. cit.):

Tra le quarte potenze delle 10 forme lineari che, uguagliate a zero, rappresentano 10 tangenti di una conica-inviluppo passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti;

questa involuzione è affatto qualunque, quindi quelle otto tangenti sono in generale distinte al pari dei loro otto punti di contatto. Il teorema che, col Lüroth, enunciamo sui nodi e sulle cuspidi del covariante S farà comprendere al lettore la necessita di insistere su ciò.

(**) Ciani, *Sopra due curve invariantive*, etc. (Ann. di Mat., 1892).

23. Siano:

$$a_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \dots 5),$$

le equazioni dei cinque lati di un pentalatero polare di una quartica di Clebsch C^4: la sua equazione sarà della forma:

$$\sum_1^5 k_i \, a_{i,x}^4 = 0,$$

e quindi l'equazione del suo covariante S sarà:

$$\sum k_i \, k_j \, k_l \, k_m \, (i\,j\,l)\,(i\,j\,m)\,(i\,l\,m)\,(j\,l\,m) \, a_{i,x} \, a_{j,x} \, a_{l,x} \, a_{m,x} = 0,$$

dove la sommatoria si intende estesa a tutte le combinazioni differenti $(i\,j\,l\,m)$ che possono formarsi coi cinque indici 1, 2 ... 5, e dove $(i\,j\,l)$ sta a significare il determinante costruito coi coefficienti di $a_{i,x}$, $a_{j,x}$, $a_{l,x}$.

Da queste equazioni si deduce subito, come già abbiamo osservato, che il pentalatero polare è inscritto nel covariante S: ma quel che più importa è, che se ne può dedurre anche il teorema inverso, cioè:

Se una quartica è circoscritta ad un pentalatero completo essa può pensarsi come covariante S di un'altra quartica a invariante sestico nullo, e quindi è circoscritta ad ∞^1 pentalateri completi.

Infatti se manteniamo le notazioni precedenti pei lati del pentalatero si vede subito che in tal caso l'equazione della quartica data può scriversi:

$$\rho_5\,(1\,2\,3)\,(1\,2\,4)\,(1\,3\,4)\,(2\,3\,4)\,a_{1x}\,a_{2x}\,a_{3x}\,a_{4x} + \cdots +$$
$$+ \cdots + \rho_1\,(2\,3\,4)\,(2\,3\,5)\,(2\,4\,5)\,(3\,4\,5)\,a_{2x}\,a_{3x}\,a_{4x}\,a_{5x} = 0,$$

determinando convenientemente i numeri $\rho_1 \dots \rho_5$: quindi essa è il covariante S della quartica di Clebsch (*):

$$\sum_1^5 \frac{1}{\rho_i} \, a_{i,x}^4 = 0.$$

24. Altre osservazioni potrebbero farsi a questo proposito, ma per ciò rimandiamo alla citata Nota del Lüroth: qui vogliamo osservare soltanto come la configurazione degli ∞^1 pentalateri polari di una quartica di Clebsch

(*) Cfr. a questo proposito la bella Nota del Lüroth, *Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann.* Math. Ann., Bd. 1.

si riconnetta strettamente a una configurazione che si incontra nella teoria delle figure polari delle cubiche (*).

Due cubiche in generale non hanno alcun pentalatero polare comune: ma se si annulla un certo loro invariante simultaneo, che il London indica con P nel § 2 della sua Memoria già citata, esse hanno ∞^1 pentalateri polari comuni circoscritti a una curva della 2.ª classe e inscritti in una curva del 4.° ordine.

Orbene, per quel che precede, questa quartica è covariante S di una quartica di Clebsch C^4, quindi quegli ∞^1 pentalateri sono polari non solo per le due cubiche considerate, ma anche per tutte la rete delle cubiche polari di C^4.

Dico che essi sono polari per le cubiche di questa rete soltanto.

Infatti siano $a_1 \dots a_5$, $a'_1 \dots a'_5$ due dei pentalateri in discorso: indicate con:

$$a_{i,x} = 0, \quad a'_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \dots 5),$$

le equazioni dei loro lati, si avrà, per quel che si è detto, una identità della forma:

$$\sum_1^5 k_i\, a_{i,x}^4 = \sum_1^5 k'_i\, a'^4_{i,x}$$

(le k, k' essendo delle costanti), da cui polarizzando si deduce l'altra:

$$\sum k_i\, a_{i,y}\, a_{i,x}^3 = \sum k'_i\, a'_{i,y}\, a'^3_{i,x}, \tag{1}$$

e se i pentalateri sono polari per una certa cubica sussisterà ancora una identità del tipo:

$$\sum l_i\, a_{i,x}^3 = \sum l'_i\, a'^3_{i,x}, \tag{2}$$

le l, l' essendo delle costanti.

Ora possiamo sempre determinare y_1, y_2, y_3 in modo che risulti:

$$k_1\, a_{1,y} = l_1, \quad k_2\, a_{2,y} = l_2, \quad k_3\, a_{3,y} = l_3,$$

perchè nè alcuna delle k_1, k_2, k_3 può esser nulla (altrimenti la C^4 sarebbe a quadrilatero polare e il suo cavariante S si spezzerebbe nei quattro lati del quadrilatero), nè le tre rette a_1, a_2, a_3 concorrono in un punto (essendo tan-

(*) London, *l. cit.*

genti a una conica), quindi sottraendo (2) da (1) risulterà identicamente:

$$(k_4\, a_{4,y} - l_4)\, a^3_{4,x} + (k_5\, a_{5,y} - l_5)\, a^3_{5,x} - \sum_1^5 (k'_i\, a'_{iy} - l'_i)\, a'^3_{i,x} = 0.$$

Ora ciò non può sussistere a meno che non sia (*):

$$k_4\, a_{4,y} = l_4, \quad k_5\, a_{5,y} = l_5, \quad k'_i\, a'_{i,y} = l'_i, \quad (i = 1 \ldots 5),$$

dunque rimane confermata la nostra asserzione: e in particolare si deduce che le due cubiche date appartengono alla rete delle cubiche polari di C^4.

25. Un altro teorema notevole si deduce applicando il teorema generale dimostrato al n.º 15. Da esso risulta che il decagono costituito dai vertici di un pentalatero polare di una quartica di Clebsch è polare per il suo inviluppo equianarmonico: dunque, poichè tale decagono è inscritto nel covariante S della quartica:

Gli ∞^1 pentalateri polari di una quartica di Clebsch *sono coniugati al suo inviluppo equianarmonico, e questo è coniugato al covariante S.*

Ne segue che l'invariante sestico di una C^4 che rivela col suo annullarsi l'esistenza di una conica-inviluppo apolare coincide coll'invariante simultaneo bilineare del covariante S e dell'inviluppo equianarmonico. La sua espressione simbolica è dunque (**):

$$(a\,b\,c)\,(a\,b\,d)\,(a\,c\,d)\,(b\,c\,d)\,(a\,e\,f)\,(b\,e\,f)\,(c\,e\,f)\,(d\,e\,f),$$

se $a^4_x = b^4_x = \cdots = 0$ è l'equazione della quartica, e può dirsi che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una quartica ammetta pentalatero polare è che il suo covariante S e il suo inviluppo equianarmonico siano coniugati.

§ 2. — Gli esalateri polari della quartica piana generale.

26. Adesso consideriamo una quartica generale C^4 ed osserviamo che, se $a_1 \ldots a_6$ è un suo esalatero polare, la K^2 inscritta in un suo pentalatero qualunque è, rispetto a C^4, l'antipolare del lato complementare.

(*) Rosanes, l. cit.

(**) Un'altra espressione simbolica di tale invariante è data dal Clebsch nella sua Memoria inserita nel 59.º volume del *Giornale di Crelle*, ma questa è manifestamente più semplice.

Cercando di invertire questa semplice osservazione si arriva subito alla costruzione degli esalateri polari di C^4. Sia a_1 una retta qualunque, che non tocchi però il contravariante Ω di C^4, e K_1^2 la sua antipolare: se a_2 è una tangente qualunque di K_1^2, la sua antipolare K_2^2 tocca a_1 e stacca da K_1^2 quattro tangenti a_3, a_4, a_5, a_6 che insieme ad a_1 e a_2 dànno un esalatero polare di C^4.

Infatti i due sistemi lineari ∞^4 di curve di 4.^{a} classe inscritte nell'esalatero $a_1 \dots a_6$, che si ottengono aggiungendo a K_1^2 e K_2^2 le ∞^4 coniche-inviluppo tangenti ad a_1 e a_2 rispettivamente, avendo una curva comune determinano un sistema lineare ∞^8 di curve di 4.^{a} classe inscritte nell'esalatero e coniugate a C^4. Nè, d'altra parte, può avvenire che, oltre questo sistema, siavi ancora qualche curva di 4.^{a} classe inscritta nell'esalatero perchè sei rette, a meno che non passino tutte per uno stesso punto, offrono tutte condizioni indipendenti alle curve di 4.^{a} classe che le toccano (*).

Siano allora $a_1 \dots a_6$ ed $a_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6$ due esalateri polari qualunque degli ∞^1 di cui fa parte la retta a_1: sussisterà una identità della forma:

$$\sum_1^6 k_i \, a_{i,x}^4 = l_1 \, a_{1,x}^4 + \sum_2^6 l_i \, a'^4_{i,x},$$

dove le k e le l sono costanti opportune, e:

$$a_{i,x} = 0, \quad a'_{i,x} = 0,$$

sono le equazioni delle rette a_i e a'_i.

Da essa si trae:

$$(k_1 - l_1) \, a_{1,x}^4 = \sum_2^6 (l_i \, a'^4_{i,x} - k_i \, a_{i,x}^4).$$

Ora tale uguaglianza non può sussistere a meno che non siano i due membri identicamente nulli: giacchè altrimenti la quartica spezzata nella retta a_1 contata quattro volte apparterrebbe al sistema lineare determinato dalle quartiche spezzate nelle rette $a_2 \dots a_6$, $a'_2 \dots a'_6$ contate ciascuna quattro volte e, dovendo, come queste, esser coniugata alla curva di 4.^{a} classe costituita da K_1^2 contata due volte, consterebbe d'una tangente di K_1^2 contata

(*) Questa costruzione può generalizzarsi alle curve d'ordine pari qualunque. Sia data una C^{2k} fondamentale e sia a_1 una retta generica del piano: allora se a_2 è una tangente dell'antipolare di a_1, l'antipolare di a_2 tocca a_1, e le due rette a_1 e a_2 insieme alle k^2 tangenti comuni a queste due antipolari dànno un (k^2+2)-latero polare della C^{2k}.
Naturalmente esso non è il (k^2+2)-latero polare più generale.

quattro volte, contro l'ipotesi esplicitamente fatta, dunque:

$$k_1 = l_1,$$

e:

$$\sum_2^6 k_i a_{i,x}^4 = \sum_2^6 l_i a'^4_{i,x}.$$

Da tutto ciò noi deduciamo il teorema:

La quartica C^4 ammette ∞^3 esalateri polari. Gli ∞^1 pentalateri, che, insieme ad una retta a_1, costituiscono esalateri polari di C^4 sono polari per una quartica di Clebsch C_1^4 *avente colla quartica data quattro contatti quadripunti sulla retta a_1: quindi sono inscritti nel covariante S di C_1^4, mentre sono circoscritti all'antipolare K_1^2 di a_1.*

E anche l'altro:

Data una quartica di Clebsch C_1^4, *i suoi ∞^1 pentalateri polari formano, insieme ad una retta arbitraria a_1, ∞^1 esalateri, che possono pensarsi come polari per un fascio di quartiche aventi con essa quattro contatti quadripunti su quella retta, e per esse soltanto;*

che riavvicinato a un'osservazione precedente (n.° 24) dà l'altro:

Condizione necessaria e sufficiente perchè due cubiche possano pensarsi come polari di due certi punti rispetto a una quartica è che si annulli il loro invariante simultaneo P. Supposta la condizione soddisfatta, le due cubiche sono le polari di due punti fissi rispetto a un fascio di quartiche, cui appartiene una sola quartica di Clebsch, *aventi quattro contatti quadripunti sulla congiungente i due punti fissi.*

27. Diciamo:

$$\sum_2^6 k_i a_{i,x}^4 = 0,$$

l'equazione della quartica di Clebsch di cui si parla nel penultimo teorema, ed:

$$a_{1,x} = 0,$$

l'equazione della retta a_1: allora l'equazione del fascio suddetto è:

$$\sum_2^6 k_i a_{i,x}^4 + \lambda a_{1,x}^4 = 0, \tag{1}$$

e su questa si verificano subito alcuni semplici teoremi.

Innanzi tutto l'equazione del covariante S della quartica (1) è:

$$S_1 + \lambda a_{1x} \sum k_i k_j k_l (1\,i\,j)(1\,i\,l)(1\,j\,l)(i\,j\,l)\, a_{i,x}\, a_{j,x}\, a_{l,x} = 0,$$

dove $S_1 = 0$ è l'equazione del covariante S della quartica di Clebsch C_1^4 scritta nella forma data al n.° 23, e la sommatoria si intende estesa a tutte le 10 combinazioni differenti $i\,j\,l$, che possono formarsi con gli indici 2, 3, 4, 5, 6 presi tre a tre in tutti i modi possibili. Ora:

$$\sum k_i\, k_j\, k_l\, (1\, i\, j)\, (1\, i\, l)\, (1\, j\, l)\, (i\, j\, l)\, a_{i,x}\, a_{j,x}\, a_{l,x} = 0\,,$$

per quel che risulterà tra poco dalla (2), è l'equazione della G_{a_1} di Caporali corrispondente alla retta a_1 rispetto a tutte le quartiche del fascio (1), dunque:

I covarianti S delle quartiche del fascio (1) *formano pure fascio: anzi tra i due fasci vi è corrispondenza proiettiva, ad ogni quartica del primo corrispondendo il proprio covariante S nel secondo, e alla quartica spezzata nella retta a_1 contata quattro volte del primo corrispondendo la quartica del secondo fascio spezzata in a_1 e in G_{a_1}.*

Ancora: l'equazione della G_u di Caporali corrispondente ad una retta u rispetto alla quartica (1) è:

$$\left.\begin{aligned} &\sum k_i\, k_j\, k_l\, (u\, i\, j)\, (u\, i\, l)\, (u\, j\, l)\, (i\, j\, l)\, a_{i,x}\, a_{j,x}\, a_{l,x} + \\ &+ \lambda\, a_{1,x} \sum k_i\, k_j\, (a_1\, a_i\, a_j)\, (a_1\, a_i\, u)\, (a_1\, a_j\, u)\, (a_i\, a_j\, u)\, a_{i,x}\, a_{j,x} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove le sommatorie hanno il solito significato, dunque:

Le G_u di Caporali di una retta generica u rispetto alle quartiche del fascio (1) *formano un fascio ad esso proiettivo, e le terne apolari alle dette quartiche situate sopra u costituiscono una involuzione cubica di prima specie* (*).

I quattro elementi doppi di questa involuzione dànno quattro quartiche del fascio (1) le cui Cayleyane toccano la retta data u.

(*) In generale non è evidentemente così. Per vedere che cosa costituiscono le terne apolari alle singole quartiche di un fascio qualunque sopra una retta r, consideriamo dapprima un fascio di cubiche. Le coniche polari di un punto di r rispetto a queste cubiche costituiscono un fascio e al muoversi del punto sulla retta i quattro punti-base descrivono una curva del 4.° ordine, mentre i tre punti doppi descrivono una curva del 6.° ordine. (Caporali, *l. cit.*, pag. 361.) I sei punti ove questa curva taglia la retta r si distribuiscono in tre coppie di punti tali che ciascuna di essa è apolare per una certa cubica del fascio: quindi abbiamo incidentalmente che:

Le Cayleyane di un fascio di cubiche costituiscono una serie ∞^1 del 3.° ordine.

Ma allora è chiaro che se due punti X e X' di r appartengono a una terna apolare ad una quartica del dato fascio di quartiche, fra X e X' viene stabilita una corrispondenza simmetrica (6, 6). Le sue 12 coincidenze mostrano che:

Le Cayleyane di un fascio di quartiche costituiscono una serie ∞^1 del 12.° ordine.

La (2) se si interpretano le u come variabili correnti è l'equazione della polocayleyana del punto x, dunque:

Le polocayleyane di un punto rispetto alle quartiche del fascio (1) *formano schiera:*

e così teoremi perfettamente analoghi valgono per le polohessiane di un punto, per le hessiane, gli inviluppi armonici, equianarmonici, ecc., ecc.

28. Nella costruzione degli ∞^1 esalateri polari della quartica C^4, che hanno un lato in una retta data a_1, abbiamo escluso, che questa retta toccasse il contravariante Ω: vediamo più davvicino, che cosa accade nell'ipotesi che la retta a_1 sia proprio una tangente di Ω.

Se a_1 tocca il contravariante Ω essa tocca anche (e nel medesimo punto) la sua antipolare K^2_1, ond'è che quando a_2 si muove tangenzialmente a K^2_1 la sua antipolare K^2_2 tocca costantemente a_1 e stacca da K^2_1 solo tre tangenti variabili a_3, a_4, a_5. Allora non si può più parlare di esalatero polare, ma sta sempre il fatto che nel pentalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ ogni quadrilatero è circoscritto all'antipolare del lato complementare.

Infatti il pentalatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ è polare per la cubica polare di un punto qualunque di a_1, perchè rispetto ad essa K^2_1 è apolare e K^2_2 ha per polare il lato complementare a_2; quindi se si considera la schiera di K^2 inscritte per es. nel quadrilatero $a_1 a_2 a_3 a_4$, dovendo queste K^2 avere tutte a_5 per retta polare rispetto alle cubiche polari dei punti di a_1, necessariamente il fascio delle coniche polari corrispondenti, rispetto alla quartica, è costituito dal fascio involutorio avente per raggi doppi a_1 e a_5. Ma allora è chiaro che a questa schiera appartiene l'antipolare di a_5.

Se si osserva poi che gli ∞^1 quadrilateri $a_2 a_3 a_4 a_5$, che si ottengono al variare di a_2, essendo inscritti (come subito si vede) in una cubica C^3_1 e circoscritti a K^2_1, sono polari per una medesima cubica C^3 di cui C^3_1 è la Hessiana, si conclude che anche in questo caso gli ∞^1 pentalateri $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ sono polari per una rete di cubiche. Precisamente, questa rete è determinata dalla cubica C^3 e dal fascio delle cubiche polari dei punti di a_1.

I punti ove K^2_1 tocca le sei tangenti che ha ulteriormente a comune col contravariante Ω, sono quelli ove essa taglia la Hessiana C^3_1 di C^3, e quelle sei tangenti toccano anche la Cayleyana di C^3. Ora è subito visto che C^3 è una cubica generale e che K^2_1 è una qualunque conica-inviluppo ad essa apolare; dunque abbiamo incidentalmente il teorema:

I sei punti ove una conica inviluppo apolare a una cubica taglia la sua Hessiana sono i punti di contatto delle sei tangenti che essa ha comuni con *la Cayleyana della cubica: e le 12 tangenti della Hessiana nei 12 punti ove essa è tagliata ulteriormente dalle sei rette ora considerate toccano anche la conica-inviluppo.*

Nel caso generale invece in cui la retta a_1 non tocca il contravariante Ω, si può osservare che le otto tangenti comuni a questo contravariante e all'antipolare K_1^2 di a_1 sono le otto rette tangenti a K_1^2 negli otto punti ove essa è tagliata dal covariante S della quartica di Clebsch C_1^4 corrispondente ad a_1 nel modo visto precedentemente.

29. Vediamo se di un esalatero polare $a_1 \ldots a_6$ della nostra quartica C^4, tre lati, per es. a_1, a_2, a_3, possono concorrere in un medesimo punto.

Se ciò avviene, il punto ove concorrono $a_1 a_2 a_3$ ha per polohessiana il trilatero $a_4 a_5 a_6$ e quindi si trova sul covariante S.

Viceversa è chiaro che, preso un punto del covariante S e per esso arbitrariamente una retta a_1, il trilatero polohessiano $a_4 a_5 a_6$ del punto, circoscritto all'antipolare K_1^2 di a_1, la retta a_1 e le due tangenti a_2 e a_3 condotte dal punto stesso a K_1^2 costituiscono un esalatero polare di C^4; dunque:

Ogni quartica ammette ∞^2 esalateri polari di cui tre lati concorrano in un punto. Ogni trilatero polohessiano appartiene ad ∞^1 esalateri cosiffatti, e il punto di concorso dei tre lati concorrenti è il polo del trilatero; mentre i tre lati medesimi descrivono intorno ad esso un' involuzione cubica di 1.ª specie.

Ne segue che una retta generica a_1 fa parte di quattro esalateri polari di cui due lati concorrano in un punto di a_1; e questi quattro punti sono quelli ove a_1 taglia il covariante S della quartica C^4 o della quartica di Clebsch C_1^4 sopra considerata.

Si può notare ancora che pei punti del covariante S e per essi soltanto la corrispondenza simmetrica (2, 2) determinata intorno a un punto qualsivoglia dalle coppie di rette a, b tali, che a tocca l'antipolare di b mentre b tocca l'antipolare di a, è un'involuzione cubica di prima specie.

30. Se si fa la costruzione precedente partendo da una tangente a_1 dell'inviluppo σ (*) costituito dalle rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti del covariante S, e si prende per punto a_{123} uno dei punti della coppia ora detta che trovasi sopra a_1, si arriva a un esalatero polare costituito da un quadrilatero semplice e una sesta retta residua, che rispetto alle precedenti non presenta alcuna particolarità di posizione.

(*) Cfr. Ciani, *Sopra la corrispondenza polare, ecc.*, *l. cit.*

Dunque vi sono ∞^1 esalateri polari così costituiti e se si applica a uno qualunque di essi il teorema generale del n.° 16 si trova l'elegante enunciato:

Il polo di un trilatero polohessiano rispetto alla quartica C^4 è anche il polo misto del trilatero stesso rispetto all'inviluppo equianarmonico della quartica.

Si osserverà poi che, per una quartica generale, non esistono nè esalateri polari di cui tre lati concorrono in un punto e gli altri tre in un altro, perchè altrimenti esisterebbe una coppia di punti apolare, nè per una ragione analoga, esalateri polari circoscritti a una conica, nè infine esalateri polari costituiti dai sei lati di un quadrangolo completo, perchè altrimenti il suo covariante S si spezzerebbe in due coniche circoscritte al quadrangolo (*).

31. Se un esalatero $a_1 \ldots a_6$ è polare per la nostra quartica C^4 ogni sua *terna* di vertici è apolare a C^4. Viceversa:

Data una qualunque terna di punti apolare a C^4 vi sono due esalateri polari di C^4 che abbiano in quella terna una terna di vertici.

Siano a_{12}, a_{34}, a_{56} i tre punti dati costituenti una terna apolare a C^4: i due punti a_{34}, a_{56} dànno una coppia di punti apolare alla cubica polare di a_{12} rispetto a C^4, quindi possono considerarsi come vertici opposti di ∞^1 quadrilateri polari di questa cubica, e le ∞^1 coppie di rette che così si ottengono intorno ad essi costituiscono come è ben noto un'involuzione quadratica. In particolare i raggi doppii del fascio involutorio a_{56} sono le due rette costituenti la conica polare di a_{34} rispetto alla cubica suddetta, ossia le due rette costituenti la conica polare mista di a_{12} e a_{34} rispetto alla quartica C^4. Ne segue, che, se si considerano a_{12} e a_{34} come vertici opposti di ∞^1 quadrilateri polari della cubica polare di a_{34}, la nuova involuzione di raggi che si ottiene intorno ad a_{56} coincide colla precedente, e che quindi si possono intanto costruire ∞^1 esalateri $a_1 \ldots a_6$ con una terna di vertici nei tre punti dati e tali che in essi le cubiche polari dei vertici a_{12} e a_{34} abbiano per quadrilateri polari i quadrilateri complementari. Di più le coppie a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6 descrivono intorno ai tre punti dati tre fasci involutorii.

Ora si considerino le due coppie comuni al fascio involutorio a_{12} e alla corrispondenza (1, 2) che si ottiene nel fascio a_{12} facendo corrispondere a ogni raggio i due che toccano la sua antipolare, e si considerino i due esalateri della totalità ∞^1 precedente cui esse appartengono. Questi due esalateri saranno quelli richiesti (**).

(*) CAPORALI, *l. cit.*, pag. 347.

(**) Ci risparmiamo qui la dimostrazione perchè essa risulterà implicitamente da un teorema generale che dimostreremo tra poco.

Ciò posto, tenendo fermo il punto a_{12} della terna polare data, facciamo variare a_{34} e a_{56} sulla polohessiana di a_{12}: si otterranno in tal modo ∞^1 esalateri polari col vertice in a_{12}. Cerchiamo la classe dell'inviluppo costituito dagli ∞^1 quadrilateri complementari a_{12} in questi ∞^1 esalateri.

Per questo, dato un punto qualunque P, riferiamo tra di loro le rette del fascio a_{12} in modo che due rette corrispondenti a_1, a_2 abbiano per antipolari due coniche-inviluppo tangenti a una medesima retta r di P. In tal modo viene stabilito nel fascio a_{12} una corrispondenza simmetrica (2, 2), poichè per ogni posizione della retta a_1 r può assumere due posizioni e ad ogni posizione di r ne corrisponde una di a_2: questa corrispondenza (2, 2) contiene quattro coppie $a_1 a_2$ tali, che inoltre a_1 tocchi l'antipolare di a_2 e a_2 quella di a_1, e le rette r relative a queste quattro coppie sono le rette dell'inviluppo in discorso passanti per P, dunque:

Dato un punto qualunque vi sono ∞^1 esalateri polari che abbiano un vertice in quel punto. Gli ∞^1 quadrilateri complementari di quel vertice sono circoscritti ad una curva della 4.^{a} classe tangente alle quattro rette del contravariante Ω uscenti dal punto dato.

32. Si vede subito che:

I 12 lati di due esalateri polari qualunque di una quartica toccano una medesima curva di 3.^{a} classe apolare alla quartica.

Ora tale proposizione si può invertire. Perciò dimostriamo dapprima il lemma:

Se una curva di 3.^{a} classe apolare a una quartica C^4 tocca tre lati di un suo esalatero polare tocca anche i tre rimanenti, a meno che questi non concorrano in un medesimo punto.

Siano:

$$a_{i,x} = 0, \quad (i = 1 \ldots 6),$$

le equazioni dei sei lati dell'esalatero e sia:

$$u_a^3 = 0,$$

l'equazione della curva di 3.^{a} classe apolare alla quartica e tangente alle rette:

$$a_{1,x} = 0, \quad a_{2,x} = 0, \quad a_{3,x} = 0.$$

L'equazione della quartica sarà della forma:

$$\sum_1^6 k_i \, a_{i,x}^4 = 0,$$

e poichè la curva di 3.ª classe:

$$u_a^3 = 0,$$

è apolare alla quartica dovrà essere identicamente:

$$\sum_1^6 k_i\, a_{i,a}^3\, a_{i,x} = 0.$$

Ma per ipotesi:

$$a_{1,a}^3 = 0, \quad a_{2,a}^3 = 0, \quad a_{3,a}^3 = 0,$$

dunque deve essere identicamente:

$$\sum_{i=4}^{i=6} k_i\, a_{i,a}^3\, a_{i,x} = 0.$$

Ciò porta, poichè le rette a_4, a_5, a_6 non concorrono in un punto, che deve essere, come volevasi (*):

$$a_{4,a}^3 = 0, \quad a_{5,a}^3 = 0, \quad a_{6,a}^3 = 0.$$

Deduciamo di qui, prima di passar oltre un teorema notevole.

Siano a_1 e a_2 due lati di un trilatero polohessiano $a_1 a_2 a_3$ della quartica C^4 e sia K^3 una curva di 3.ª classe apolare a C^4 e tangenti alle rette a_1 e a_2: se a_4 è una delle tre tangenti condotte a K^3 dal polo del trilatero suddetto rispetto a C^4, le quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 fanno parte di un esalatero polare di C^4 ben determinato di cui altri due lati concorrono in quel polo, dunque questi due lati insieme ad a_3 toccano ancora la curva K^3. Ossia:

Una curva di 3.ª classe apolare ad una quartica che tocchi due lati di un suo trilatero polohessiano tocca anche il terzo.

Reciprocamente:

Se tre rette a_1, a_2, a_3 sono così situate che tutte le curve di 3.ª classe apolari ad una quartica e tangenti a due di esse, per es. a_1 e a_2, toccano anche la terza, le tre rette costituiscono un trilatero polohessiano della quartica.

(*) Questo ragionamento è del resto generale. E può enunciarsi:

Se una curva di classe m è apolare a una curva d'ordine n e tocca $p - 3$ lati di un suo p-latero polare, tocca anche gli altri tre, a meno che questi non concorrano in un punto.

Accanto al qual teorema va ricordato l'altro:

Se una curva di classe n è coniugata ad una d'ordine n e tocca $p - 1$ lati di un suo p-latero polare, tocca anche il rimanente.

Infatti in tal caso la conica-inviluppo apolare alla cubica polare di un punto qualunque del piano e tangente ad a_1 e a_2, costituendo con quel punto una curva di 3.ª classe apolare alla quartica, tocca anche a_3 ed ha per conica polare una coppia di rette (distinte o no) incrociate in quel punto. Ne segue che la Iacobiana della rete delle coniche polari del tessuto di coniche-inviluppo inscritte nel trilatero $a_1 a_2 a_3$ è indeterminata. Ma allora necessariamente questa rete è data dalla ∞^2 coppia di rette uscenti da un punto, e questo punto appartiene al covariante S, il suo trilatero polohessiano essendo a_1 a_2 a_3.

33. Ritornando al nostro scopo, abbiasi una qualunque curva di 3.ª classe K^3 apolare alla nostra quartica fondamentale C^4 e siano a e b due tangenti di K^3 tali, che l'una tocchi l'antipolare dell'altra: cerchiamo la classe dell'inviluppo Φ generato dalle quattro tangenti comuni alle antipolari di a e b al variare di queste rette tangenzialmente a K^3.

Prendiamo un punto P: se una retta r per P appartiene all'inviluppo Φ, l'antipolare di r deve staccare da K^3 una coppia della corrispondenza (6, 6) descritta dalla coppia (a, b). Ora le antipolari delle rette per P costituiscono una serie quadratica semplicemente infinita, e quindi segnano sopra K^3 una corrispondenza (10, 10) di valenza (*Werthigkeit*) 2, ogni coppia di questa toccando l'antipolare di una retta per P: dunque le 60 coppie comuni a queste due corrispondenze simmetriche dànno che:

L'inviluppo Φ è della 60.ª classe.

Sia r una delle 12 tangenti comuni a K^3 e al controvariante Ω di C^4, e prendiamo il punto P sopra r. Evidentemente, se $r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$ sono le cinque tangenti ulteriori comuni a K^3 e all'antipolare di r, le cinque coppie:

$$(r,\ r_i),\quad (i = 1 \ldots 5),$$

sono comuni alla suddetta corrispondenza (6, 6) e alla corrispondenza (10, 10) relativa nel modo detto al punto P, dunque:

L'inviluppo Φ ha 12 tangenti quintuple nelle 12 tangenti comuni a K^3 e al contravariante Ω.

Consideriamo le altre $60 . 3 - 12 . 5 = 120$ tangenti comuni a Φ e a K^3.

Per la definizione stessa di Φ, se c è una di queste tangenti, vi sono certe due altre tangenti a e b di K^3 (e anche di Φ) tali che l'antipolare di a tocca b e c e l'antipolare di b tocca a e c: quindi le tre rette a, b, c determinano un esalatero polare di C^4, cui esse appartengono, circoscritto a K^3 per il lemma precedente D'altra parte è chiaro che ogni lato di questo esalatero è una tangente 10-pla per l'inviluppo Φ, dunque le 120 tangenti suddette si raccolgono 10 a 10 in 12 rette costituenti due esalàteri polari di C^4 circoscritti a K^3.

Raccogliamo da ciò l'importante teorema (*):

La condizione necessaria e sufficiente perchè una curva di 3.ª classe sia apolare ad una quartica è che sia inscritta a due suoi esalateri polari;

che fornisce una interpretazione geometrica del concetto di apolarità nel caso particolare in discorso.

Possiamo aggiungere con lo Schlesinger che i 12 lati dei due esalateri circoscritti a una K^3 apolare a C^4 costituiscono l'intersezione completa (ci sia permessa questa parola, poco usata in tal senso benchè molto espressiva) della K^3 con una (anzi con infinite) curve di questa classe coniugata a C^4.

Infatti per un teorema generale notato a suo luogo due esalateri polari di una C^4 sono circoscritti a un sistema lineare ∞^3 di curve di 4.ª classe coniugate a C^4 e di questo ∞^3 solo un tessuto è costituito dalla K^3 (unica) apolare a C^4, inscritta in essi, insieme a un punto arbitrario del piano.

§ 3. — Gli ettalateri polari della quartica piana generale.

34. Consideriamo sempre la quartica fondamentale C^4 e sia $a_1 \dots a_7$ un suo ettalatero polare. Ogni terna di vertici dell'ettalatero ha per polare mista il lato complementare e ogni K^2 tangente a cinque dei suoi lati ha per conica polare una coppia di rette incrociate nel vertice complementare e separate armonicamente dai due lati ivi concorrenti.

Ciò posto dimostriamo che, date tre rette $a_1 a_2 a_3$, esiste in generale uno ed un solo ettalatero polare di C^4 che abbia tre lati nelle tre rette date.

Chiamati $a_4 a_5 a_6 a_7$ i lati incogniti di un eventuale ettalatero che soddisfi alla questione, osserviamo che la K^2 inscritta nel pentalatero $a_3 \dots a_7$ deve avere per conica polare una coppia di rette incrociate nel punto a_{12} e separate armonicamente da a_1 e a_2, e che la K^2 inscritta nel pentalatero $a_2 a_4 \dots a_7$ deve avere per conica polare una coppia di rette incrociate nel punto a_{13} e separate armonicamente da a_1 e a_3. Esse d'altra parte sono pie-

(*) Questo teorema, come tutti quelli che seguono circa la distribuzione delle figure polari di una quartica sopra le curve di 3.ª classe ad essa apolari, è contenuto in una proposizione generale dimostrata dallo Schlesinger con metodo trascendente nella sua bella Nota già citata: *Ueber die Werwerthung der ϑ-Functionen u. s. w.*

namente individuate dovendo appartenere a due schiere note e dovendo rispettivamente toccare le rette a_3 e a_2: quindi le quattro rette $a_4 \ldots a_7$ sono date dalle quattro tangenti comuni a queste due coniche inviluppo.

Per dimostrare poi che l'ettalatero $a_1 \ldots a_7$ è polare per la quartica C^4 basta osservare che i due sistemi lineari ∞^3 di K^4, ottenuti aggiungendo a ciascuna di quelle due K^2 le ∞^3 K^2 tangenti ai due lati complementari, non avendo alcuna curva comune individuano un sistema lineare ∞^7 di K^4 inscritte nell'ettalatero e coniugato alla quartica C^4.

Si ha dunque:

Ogni quartica possiede ∞^6 ettalateri polari. Date tre rette arbitrarie vi è in generale uno ed un solo ettalatero polare di una quartica assegnata che abbia tre lati in quelle tre rette.

35. Una interessante quistione sugli ettalateri polari di una quartica è quella di cercare le varie forme particolari che essi possono assumere: e noi ben lungi dall'aver esaurito un tale argomento esponiamo qui alcuni semplici risultati a cui siamo pervenuti.

Prendiamo tre punti A, B, C in modo che ciascuno sia all'intersezione delle polohessiane degli altri due: A potrà prendersi ad arbitrio nel piano, B arbitrariamente sulla polohessiana di A, e C sarà uno dei nove punti ove la polohessiana di A taglia quella di B. Escludiamo però che il punto C coincida col punto P_{AB}, coniugato di B (di A) sulla polohessiana di A (di B) e che con A e B costituisce una terna apolare a C^4.

Allora se si indicano con P_{BC}, P_{CA} i punti aventi rispetto alle coppie B, C; C, A significato analogo a quello che ha P_{AB} rispetto alla coppia A, B (*), è chiaro che i tre punti P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} si trovano in linea retta — sulla polare mista di A, B, C — e che l'ettalatero costituito da questa polare mista e dalle rette AB, BC, CA, AP_{BC}, BP_{CA}, CP_{AB} sarà polare per la quartica C^4.

Infatti i due sistemi lineari ∞^2 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero ottenuti aggiungendo alle terne A, B, P_{AB}; B, C, P_{BC} rispettivamente tutti i punti del piano non hanno alcuna curva comune e quindi determinano un sistema lineare ∞^5 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero e coniugate a C^4. Con questo sistema lineare ∞^5, l'altro ∞^2 ottenuto in modo analogo ai due precedenti considerando la terna C, A, P_{CA} ha comune la sola

(*) D'ora innanzi indicheremo sempre con P_{XY} il terzo punto d'una terna apolare di cui facciano parte i punti X ed Y.

curva di 4.ª classe spezzata nei quattro punti A, B, C, P_{CA} (come si riconosce subito osservando che questa appartiene alla schiera individuata dalle due curve di 4.ª classe spezzate nelle due quaterne di punti A, B, P_{AB}, C e B, C, P_{BC}, A), dunque si ha in tutto, appunto come volevasi, un sistema lineare ∞^7 di curve di 4.ª classe inscritte nell'ettalatero e coniugate a C^4.

Ne ricaviamo il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^3 ettalateri polari costituiti dai quattro lati di un quadrilatero semplice, da una sua diagonale, da una retta passante per uno dei vertici non contenuti da questa diagonale, e poi da una retta che rispetto alle precedenti non ha, in generale, alcuna particolarità di posizione. Esse si ottengono tutte nel modo precedente.

Una volta scelti i punti A e B (l'uno sulla polohessiana dell'altro) il punto C può assumere otto posizioni differenti: in tal modo si hanno intorno a ciascuno dei punti A, B, P_{AB} (si vede facilmente) otto coppie di rette appartenenti ad una medesima involuzione quadratica.

36. Consideriamo l'ettalatero particolare ora costruito e vediamo se scegliendo convenientemente il punto B sulla polohessiana di A può farsi in modo che le tre rette $A\,P_{BC}$, $B\,P_{CA}$, $C\,P_{AB}$ concorrano in un punto.

Per questo osserviamo che, posto:

$$A\,P_{BC}\cdot B\,P_{CA}=0_C,\quad B\,P_{CA}\cdot C\,P_{AB}=0_A,\quad C\,P_{AB}\cdot A\,P_{BC}=0_B,$$

il pnnto 0_A per es. appartiene alla polohessiana di A, perchè la terna costituita dai punti A, 0_A e dal punto ove la retta $B\,C$ taglia la polare mista di A, B, C potendosi considerare come una curva di terza classe inscritta nell'ettalatero è apolare a C^4. Quindi i punti 0_A ed 0_B per es. sono gli ulteriori punti ove la retta $C\,P_{AB}$, che già taglia in C e P_{AB} le polohessiane di A e B, taglia le polohessiane medesime.

Ed allora supponiamo che la polohessiana di B non si spezzi e tagli la polohessiana di A in tre punti situati in linea retta, uno di questi essendo il punto P_{AB}: in tal caso, è chiaro, che se si fa la costruzione precedente assumendo per punto C uno degli altri due di questi tre punti, si trova un ettalatero polare in cui le tre rette sopra indicate concorrono in un punto, giacchè la polohessiana di B non spezzandosi non potrà in particolare contenere tutta la retta $C\,P_{AB}$.

La ricerca di questi particolari ettalateri è adunque ricondotta all'altra:

Trovare sulla polohessiana di A un punto B tale che dei nove punti ove la polohessiana di A è tagliata da quella di B tre siano in linea retta, *e uno di questi tre sia il punto P_{AB} costituente terna apolare con A e con B.*

Per questo, sulla polohessiana di A diciamo corrispondenti due punti X ed X' quando può trovarsi sulla polohessiana stessa un tal punto B, che X sia all'intersezione delle polohessiane di A e B, ma non coincida con P_{AB}, ed X' sia l'ulteriore intersezione della polohessiana di A con una qualunque delle sette rette congiungenti P_{AB} con i sette rimanenti punti di intersezione delle polohessiane di A e B.

Dato X, B può evidentemente assumere otto posizioni, cioè la posizione di uno qualunque dei punti ove la polohessiana di A è incontrata da quella di X, tranne di quello che insieme ad A e X costituisce terna apolare: da ogni posizione di B seguono sette posizioni pel punto X' corrispondente ad X, dunque ad ogni punto X corrispondono $8 \cdot 7 = 56$ punti X'.

Viceversa, ad ogni punto X' quanti punti X corrispondono?

Si tratta prima di tutto di condurre per X' una tal trasversale, che, chiamati P_{AB}, P_{AB_1} gli altri due punti ove essa taglia la polohessiana di A e quindi B e B_1 i loro coniugati sulla polohessiana stessa, la polohessiana di B (che naturalmente passa per P_{AB}) passi anche P_{AB_1}, oppure la polohessiana di B_1 (che passa per P_{AB_1}) passi anche per P_{AB}.

Per questo condotta una trasversale qualunque per X' e, mantenute le notazioni precedenti, chiamiamo Y ed Y', Z e Z' rispettivamente le ulteriori intersezioni di questa trasversale colle polohessiane di B e B_1, e cerchiamo al ruotare della trasversale intorno ad X' il luogo dei punti P_{AB}, P_{AB_1}, Y Y', Z, Z'. Poichè per un tal luogo il punto X' è un punto nonuplo, come si vede assumendo per trasversale una delle nove rette che vanno da X' ai nove punti coniugati sulla polohessiana di A a quelli ove tale polohessiana è incontrata da quella di X' (fra quei nove punti vi è anche X', quindi fra le nove trasversali in discorso vi è la tangente in X' alla polohessiana di A), esso sarà dell'ordine $9 + 6 = 15$. Tolta la polohessiana di A descritta da P_{AB} e P_{AB_1} resta che il luogo dei punti Y, Y', Z, Z' è una curva del 12° ordine C^{12}, con un punto ottuplo in X'.

È chiaro che le trasversali richieste sono da cercarsi fra le congiungenti X' con uno dei punti ove C^{12} taglia la polohessiana di A, fuori di X': queste sono $3\,12 - 8 = 28$, dunque dobbiamo cercarle fra queste 28 rette.

Consideriamone una $X'\,P_{AB}\,P_{AB_1}$ e sia P_{AB_1} il punto situato sopra C^{12}: allora, mantenute le notazioni precedenti, le polohessiane di B e B_1 tagliano $X'\,P_{AB}\,P_{AB_1}$ in sei punti di cui uno è P_{AB} e, degli altri, due sono raccolti in P_{AB_1}. Quindi, o la polohessiana di B passa per P_{AB_1}, o la polohessiana di B_1 tocca in P_{AB_1} la retta $X' P_{AB} P_{AB_1}$, o infine questa polohessiana ha un punto doppio in P_{AB_1}. Quest'ultimo caso ha luogo per le 12 rette congiungenti con X' coi 12 punti ove il covariante S taglia la polohessiana di A e che si trovano evidentemente sopra C^{12}: il secondo caso si verifica per le due rette congiungenti X' coi punti coniugati a quelli ove la polare di X' rispetto alla conica polare di A (rispetto a C^4) taglia ulteriormente la polohessiana di A fuori del punto $P_{AX'}$ (perchè se la retta $X' P_{AB_1}$ tocca in P_{AB_1} la polohessiana di B_1, essendo A e P_{AB_1} punti coniugati su tale polohessiana, la retta $X' P_{AB_1}$ è la retta polare di A rispetto alla cubica polare di B_1, cioè è la retta polare di B_1 rispetto alla conica polare di A); dunque le trasversali richieste rimangono $28 - 12 - 2 = 14$.

Ora ognuna di queste trasversali dà luogo a sette punti X corrispondenti ad X', dunque ad ogni punto X' corrispondono $7 \cdot 14 = 98$ punti X e la corrispondenza fra X ed X è una (98, 56).

Per trovarne le coincidenze osserviamo che i 56 punti X' corrispondenti ad X si ottengono tagliando la polohessiana di A con un sistema di 56 rette, cioè con una curva θ del 56.° ordine. Questa curva taglia la suddetta polohessiana in $3 \cdot 56 = 168$ punti di cui 56 si raccolgono sette a sette negli otto punti (che chiameremo X'') coniugati sulla polohessiana di A agli otto punti $B_1, B_2 \ldots B_8$ che tale polohessiana ha comuni con quella di X, oltre il punto P_{AX}: altri 56 si distribuiscono nei $7 \cdot 8 = 56$ punti ove le polohessiane di $B_1 \ldots B_8$ tagliano quella di A, oltre X e gli otto punti X'' (questi 56 punti li diremo punti X'''): altri 56 sono infine i detti punti X.

La corrispondenza fra X ed X'' è, come si vede facilmente, una (8, 8): la corrispondenza fra X ed X''' è una corrispondenza simmetrica (56, 56), dunque indicando con a il numero delle coincidenze delle (98, 56), con b quello relativo alla (8, 8), con c quello della (56, 56), poichè la curva θ non passa per X e passa una volta per ogni punto X', 7 volte per ogni punto X'' ed una volta per ogni punto X''', si avrà, per una nota formula del Cayley (*):

$$(a - 154) + 7(b - 16) + (c - 112) = 0.$$

I numeri b e c si calcolano facilmente. Gli otto punti X'' e i 56 punti X''' corrispondenti ad X si ottengono tagliando la polohessiana di A con

(*) Cfr. ad es.: Salmon, *Courbes planes*, pag. 468. Paris, Gauthier-Villars, 1884.

quelle di $B_1 \dots B_8$, cioè con una curva del 24.° ordine passante otto volte per X, dunque per la formula ora citata:

$$(b - 16) + (c - 112) = 16,$$

ossia:

$$b + c = 144.$$

Ora gli otto punti X corrispondenti ad un punto X'' si ottengono tagliando la polohessiana di A colla polohessiana del punto $P_{AX''}$, e questa passa per X', dunque la corrispondenza fra X ed X'' è di valenza 1, e il numero b delle coincidenze è dato da:

$$b = 18.$$

Ne segue:

$$c = a = 126.$$

ossia le coincidenze della (98, 56) sono 126.

Sia C una di queste coincidenze: esisterà un punto B tale che la sua polohessiana tagli quella di A in tre punti in linea retta C, P_{AB} e D; quindi se la polohessiana di B non si spezza l'ettalatero costituito dai sei lati del quadrangolo $A\,B\,C\,D$ e dalla polare mista di A, B, C (ossia di tre qualunque dei punti A, B, C, D) sarà un ettalatero polare per la C^4. Allora si riconosce che non solo il punto C, ma anche B e D sono coincidenze della nostra corrispondenza, e che ognuno di essi ne assorbe due, perchè per es. la polohessiana di D si comporta rispetto a C in modo analogo a quella di B.

Ma se la polohessiana di B si spezza, cioè B è uno dei 12 punti ove il covariante S taglia la polohessiana di A, dal trilatero polohessiano di B un lato passerà per A, il vertice opposto (appartenendo adunque al covariante S) sarà il punto P_{AB} e i quattro punti ove i due lati concorrenti in questo vertice tagliano ulteriormente la polohessiana di A saranno quattro coincidenze per cui non potrà ripetersi la considerazione precedente, dunque tolte queste $12 \cdot 4 = 48$ coincidenze estranee alla nostra questione, le rimanenti $126 - 48 = 78$ si riducono a 39 che dànno luogo a $\frac{39}{3} = 13$ ettalateri della specie suddetta.

Si ha pertanto il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^2 ettalateri polari costituiti dai sei lati di un quadrangolo completo $A\,B\,C\,D$ e da una settima retta che, in generale, non ha rispetto alle prime sei alcuna particolarità di posizione. Dato un punto A, *vi sono 13 quadrangoli cosiffatti aventi un vertice in A: le terne residue dei vertici costituiscono 13 terne di punti della polohessiana di A.*

37. Possiamo dimostrare che:

Dette B, C, D; B', C', D' due qualunque delle 13 terne ora considerate dalla polohessiana di A, i due triangoli $B\,C\,D$ e $B'\,C'\,D'$ sono inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra.

Indichiamo con:

$$a_{1,x}=0,\ a_{2,x}=0,\ldots\ a_{7,x}=0,$$

ordinatamente le equazioni delle rette $A\,B$, $B\,D$, $D\,C$, $C\,A$, $B\,C$, $A\,D$ e della polare mista di tre qualunque dei quattro punti $A\,B\,C\,D$; e analogamente indichiamo con:

$$a'_{i,x}=0, \quad (i=1\ldots7),$$

le equazioni delle rette omologhe relative al quadrangolo $A\,B'\,C'\,D'$.

Poichè i due ettalateri costituiti da questi due gruppi di sette rette sono polari per la C^4, sussisterà una relazione identica della forma:

$$\sum_{i=1}^{i=7} k_i\, a_{i,x}^4 = \sum_{i=1}^{i=7} k'_i\, a'^4_{i,x},$$

ossia, polarizzando, si avrà identicamente:

$$\sum k_i\, a_{i,y}\, a_{i,z}\, a_{i,x}^2 = \sum k'_i\, a'_{i,y}\, a'_{i,z}\, a'^2_{i,x}. \tag{1}$$

Basta in questa identità porre per le y le coordinate del punto A e per le z le coordinate del punto comune ad:

$$a_{7,x}=0, \quad a'_{7,x}=0,$$

per accorgersi che i due trilateri $B\,C\,D$ e $B'\,C'\,D'$ sono polari per una medesima conica, e quindi sono inscritti in una conica e circoscritti ad un'altra.

Si può osservare che le 12 coniche per le quali sono autopolari il triangolo $B\,C\,D$ e quello costituito da un'altra qualunque delle rimanenti 12 terne in discorso appartengono a un fascio, perchè le loro equazioni si ottengono ponendo per le z nella (1) le coordinate di 12 punti situati sulla retta:

$$a_{7,x}=0,$$

dopo aver naturalmente posto per le y le coordinate del punto A.

Dunque le $\frac{13\cdot12}{2}=78$ coniche per cui sono autopolari due a due i 13 triangoli $B\,C\,D$, $B'\,C'\,D'$,... si distribuiscono 12 a 12 in 13 fasci, Infine applicando un teorema generale già osservato si ha:

Se un ettalatero è polare per una quartica C^4 *ed è costituito dai sei lati di un quadrangolo completo* $A\,B\,C\,D$ (*) *e dalla retta polare mista* r *di tre qualunque dei punti* A, B, C, D, *due lati opposti del quadrangolo, il lato del triangolo diagonale opposto al vertice in cui si incrociano quei due lati e la retta* r *dànno un quadrilatero coniugato all'inviluppo equianarmonico della quartica.*

38. Consideriamo un poco più davvicino che cosa accade quando un punto B della polohessiana di un punto qualunque A appartiene al covariante S.

Poichè B appartiene al covariante S la sua polohessiana sarà un trilatero di cui un lato a passerà per A e gli altri due b e c si taglieranno sulla polohessiana di A nel punto P_{AB}, che con A e B costituisce terna apolare. Siano poi C e D i punti ove b per es. taglia ulteriormente la polohessiana di A: le due curve di 3.ª classe apolari alla quartica spezzate nelle due terne A, C, P_{AC} e A, B, P_{AD} ordinatamente toccano allora due lati del trilatero polohessiano $a\,b\,c$, e quindi devono toccare anche il terzo, ossia i punti P_{AC} e P_{AD} sono situati sulla retta c. Poi le rette $B\,C$ e $B\,D$ passano per P_{AD} e P_{AC} ordinatamente, dunque:

Se si considera un punto qualunque B *del covariante* S, *la polohessiana di un punto* A *di un lato del suo trilatero polohessiano taglia i due lati rimanenti del trilatero, fuori della loro comune intersezione, in quattro punti distribuiti in due coppie allineate con* B.

Le rette $B\,C$ e $B\,D$ descrivono evidentemente intorno al punto B le coppie di una corrispondenza (2, 2) con 4 coincidenze, dunque:

Se B *è un punto qualunque del covariante* S *e* $a\,b\,c$ *è il suo trilatero polohessiano, vi sono sopra* a *per es. quattro punti le cui polohessiane (non degeneri) toccano* b *e* c *contemporaneamente (e basta che tocchino* b *o* c *perchè tocchino anche l'altro) in coppie di punti allineati con* B.

39. Adesso consideriamo una curva qualunque di 3.ª classe K^3 apolare alla quartica C^4 e siano a_1 e a_2 due sue tangenti qualunque. Prendiamo un punto P sopra a_1 e sia a_3 una delle altre due tangenti di K^3 uscenti da P: le K^2 che hanno per coniche polari coppie di rette incrociate in P e separate armonicamente da a_1 e a_3 costituiscono una schiera, quindi una soltanto

(*) Si osserverà che questi quadrangoli sono tutti e soli quelli dotati della proprietà che i loro quattro triangoli hanno rispetto alla quartica la medesima retta polare.

di esse, K_1^2, tocca la retta a_2. Cerchiamo l'ordine della serie ∞^1, Σ, descritta da K_1^2 al variare della retta a_3 tangenzialmente a K^3.

Per questo sia r una retta qualunque: se K_1^2 è una curva della serie che tocca r, come essa tocca a_2, la sua conica polare dovrà essere costituita da una coppia di rette (incrociate in un punto P di a_1 e separate armonicamente da a_1 e da una delle altre due tangenti di K^3 che passano per P) coniugate rispetto alle antipolari di a_2 e di r.

Ora da ogni punto della retta a_1 parte una coppia di rette coniugate rispetto a queste antipolari (la coppia di tangenti che dal punto possono condursi alla curva di 2.ª classe che gli corrisponde nella trasformazione quadratica involutoria, correlativa all'ordinaria trasformazione quadratica di Steiner, individuata dalle antipolari di a_2 e di r), e l'inviluppo di queste coppie di rette è una curva della 3.ª classe Φ^3 generata dalla punteggiata a_1 e dalla schiera di curve di 2.ª classe ad essa proiettiva che le corrisponde nella detta trasformazione quadratica: quindi le rette coniugate armoniche di a_1 rispetto a tali coppie inviluppano una curva di 2.ª classe (la polare di a_1 rispetto a Φ^3) tangente ad a_1. Le cinque tangenti che tale curva ha ulteriormente a comune con K^4, oltre a_1, dànno che:

La serie ∞^1 Σ è del 5.° ordine.

Ciò posto, date le rette a_1 e a_2, per ogni posizione di a_3 tangenzialmente a K^3 costruiamo l'ettalatero polare individuato da a_1, a_2, a_3, e cerchiamo la classe dell'inviluppo Ψ generato dalle ∞^1 quaterne complementari di $a_1 a_2 a_3$ in questi ∞^1 ettalateri.

Esso è generato dalle quaterne di tangenti comuni alle curve corrispondenti di due serie ∞^1 di curve di 2.ª classe, di cui una è la schiera Σ' delle K^2 che hanno per coniche polari coppie di rette uscenti da a_{12} e separate armonicamente da a_1 e a_2, l'altra è la serie Σ precedente, riferite fra di loro in una corrispondenza (1, 6), dunque è della 20.ª classe ed ha una tangente quintupla in a_2, perchè le due serie hanno in comune (come si vede facendo assumere ad a_3 la posizione di a_2) la K^2 della schiera Σ' che tocca a_2. Per ragioni di simmetria essa avrà una tangente quintupla anche in a_1 e quindi abbiamo che:

L'inviluppo Ψ è della 20.ª classe ed ha due tangenti quintuple in a_1 e a_2.

Sia a_4 una delle $20 . 3 - 10 = 50$ tangenti ulteriori che Ψ ha comuni con K^3.

Per la definizione stessa di Ψ esisterà un'altra tangente a_3 di K^3 tale, che la curva della schiera Σ' che tocca a_3 e la curva della serie Σ che ha per conica polare una coppia di rette concorrenti nel punto a_{13} e separate armonicamente da a_1 e a_3, tocchino ambedue a_4.

Ora possono darsi due casi: o a_3 è differente da a_4 e allora a_4 appartiene all'ettalatero polare determinato da $a_1 a_2 a_3$ e ogni lato di questo ettalatero (circoscritto a K^3 per un teorema già osservato; n. 32 in nota), esclusi a_1 e a_2, è una tangente quadrupla di Ψ; o a_3 coincide con a_4 e allora non si può parlare più di ettalatero polare, ed a_4 è solo una tangente semplice di Ψ. Quest'ultimo caso si dà precisamente 10 volte, come si vede subito applicando il principio di corrispondenza generalizzato, dunque le 40 tangenti residue comuni a K^3 e Ψ si raccolgono in 10 rette distribuite in due gruppi di cinque rette ciascuno, che insieme ad a_1 e a_2 dànno due ettalateri polari di C^4.

Se si osserva poi che due ettalateri polari di C^4, che abbiano due lati comuni, sono circoscritti a un sistema lineare ∞^3 di curve di 4.^{a} classe coniugata a C^4, si conclude, tenuto conto delle cose precedenti, che:

Data una qualunque curva di 3.^{a} classe K^3 apolare a C^4 e due sue tangenti qualunque, queste fanno parte di due ettalateri polari di C^4 circoscritti a K^3. I 12 lati di questi due ettalateri costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezioni.

§ 4. — Gli ottalateri polari.

40. Se l'ottalatero $a_1 \dots a_8$ è polare per la quartica fondamentale C^4, ogni suo trilatero è polare per la conica polare della K^2 inscritte nel pentalatero complementare ed ogni sua quaterna di vertici è una quaterna di punti coniugati a C^4.

Ora osserviamo che coi vertici di un ottalatero possono formarsi 105 quaterne: d'altra parte sappiamo che se in un ottalatero sono inscritte 7 curve di 4.^{a} classe linearmente indipendenti e coniugate a C^4, ciò avviene per ogni altra curva inscritta di 4.^{a} classe e l'ottalatero è polare (*) per C^4, dunque abbiamo il teorema:

Se sette quaterne di vertici di un ottalatero, linearmente indipendenti, sono coniugate rispetto a una quartica ciò avviene per tutte le altre e l'ottalatero è polare per la quartica:

(*) Naturalmente qui si suppone che l'ottalatero considerato sia generico e che quindi i suoi lati offrano condizioni tutte indipendenti alle curve di 4.^{a} classe che li toccano.

che può riguardarsi come l'analogo per queste ricerche del notissimo teorema di HESSE.

41. Consideriamo adesso quattro rette $a_1 a_2 a_3 a_4$ e vediamo se vi sono degli ottalateri polari per la C^4 che abbiano quattro lati nelle quattro rette date.

Chiamati $a_5 a_6 a_7 a_8$ i rimanenti lati incogniti di un eventuale ottalatero che soddisfi al problema, la K^2 tangente ad a_1, a_5, a_6, a_7, a_8 deve avere per conica polare rispetto a C^4 una conica coniugata al trilatere $a_2 a_3 a_4$ e deve toccare la retta a_1, dunque appartiene ad una schiera determinata. Così appartengono a schiere determinate le K^2 inscritte nei pentalateri $a_2 a_5 a_6 a_7 a_8$ ed $a_3 a_5 a_6 a_7 a_8$ rispettivamente.

Ora queste tre schiere appartengono ad un medesimo sistema lineare ∞^3 — al sistema delle K^2 che hanno per coniche polari coniche aventi in $a_1 a_2 a_3 a_4$ un quadrilatero polare e che costituiscono appunto un sistema lineare ∞^3 — dunque può stabilirsi fra di esse un tal riferimento proiettivo che le terne di K^2 corrispondenti appartengano ad una medesima schiera, ossia abbiano quattro tangenti comuni.

Presa una tal terna e chiamate $a_5 a_6 a_7 a_8$ le quattro tangenti relative, dal fatto, che nell'ottalatero $a_1 \ldots a_8$ le coniche polari della K^2 inscritte nei pentalateri $a_1 a_5 \ldots a_8$, $a_2 a_5 \ldots a_8$, $a_3 a_5 \ldots a_8$ hanno per trilateri polari i trilateri complementari, segue subito che esso è polare per la quartica C^4.

Infatti se:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0,$$

sono le equazioni di quelle tre K^2, si ha innanzi tutto per un conveniente valore di λ:

$$\chi = \varphi + \lambda \psi,$$

e poi, se:

$$\varphi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 4),$$

sono le equazioni di tre K^2 tangenti ad a_2, a_3, a_4:

$$\psi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

sono le equazioni di tre K^2 inscritte nel trilatero $a_1 a_3 a_4$, e infine:

$$\chi = 0,$$

è una K^2 inscritta in $a_1 a_2 a_4$, le sette curve di 4.ª classe:

$$\chi \chi_1 = 0, \quad \varphi \varphi_i = 0, \quad \psi \psi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

sono inscritte nell'ottalatero, sono coniugate a C^4 e sono linearmente indipendenti, altrimenti dovrebbe sussistere un'identità della forma:

$$\varphi\,[k_1\,\varphi_1 + k_2\,\varphi_2 + k_3\,\varphi_3 + k_4\,\chi_1] = \psi\,[k_5\,\psi_1 + k_6\,\psi_2 + k_7\,\psi_3 + k_8\,\chi_1],$$

mentre, nè può essere contemporaneamente:

$$k_1\,\varphi_1 + k_2\,\varphi_2 + k_3\,\varphi_3 + k_4\,\chi_1 = 0$$
$$k_5\,\psi_1 + k_6\,\psi_2 + k_7\,\psi_3 + k_8\,\chi_1 = 0,$$

nè può:

$$\varphi = 0,$$

toccare la retta a_4 toccata da:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0, \quad \chi_1 = 1.$$

Ne risulta che gli ottaleri richiesti costituiscono una semplice infinità, e che la quaterna variabile $a_5 \ldots a_8$ descrive una curva di 4.ª classe generata da quelle schiere proiettive e quindi tangente alle rette $a_1 \ldots a_4$. Tale curva come inscritta in ∞^1 ottalateri polari di C^4 è ad essa coniugata, dunque raccogliamo il risultato:

Ogni quartica possiede ∞^9 ottalateri polari. Date quattro rette arbitrarie a_1, a_2, a_3, a_4 esse fanno parte di ∞^1 ottalateri polari per la quartica considerata e le ∞^1 quaterne di rette che insieme ad esse li costituiscono inviluppano una curva di 4.ª classe tangente ad a_1, a_2, a_3, a_4 e coniugata alla quartica.

42. Questo teorema può presentarsi sotto vari aspetti che forse non è inutile osservare.

Intanto può dirsi per es. che:

Date quattro rette arbitrarie, se si costruiscono le quattro schiere di curve di 2.ª classe che toccano una delle quattro rette e hanno per conica polare rispetto ad una quartica una conica coniugata al trilatero costituito dalle rette residue, si ottengono quattro schiere di un sistema ∞^2 quadratico contenuto in un sistema lineare ∞^3: ossia, rappresentato questo ∞^3 sui punti dello spazio ordinario, le quattro schiere sono rappresentate da quattro generatrici di una rigata quadrica.

Ancora: prendiamo quattro rette arbitrarie $a_1 \ldots a_4$ e consideriamo una qualunque curva di 3.ª classe K^3 apolare a C^4 e inscritta nel quadrilatero $a_1 \ldots a_4$. La curva K^3 staccherà dalla curva di 4.ª classe K^4 coniugata a C^4 e inviluppata dalle ∞^1 quaterne che con $a_1 \ldots a_4$ dànno ottalateri polari di C^4, oltre le tangenti $a_1 \ldots a_4$, altre otto tangenti. Sia l una di queste tangenti: essa insieme ad altre tre rette m, n, p tangenti a K^4 dà un ottalatero polare a C^4 che è circoscritto anche a K^3, perchè K^3 ne tocca già cinque lati, dunque m, n, p sono altre tre di quelle otto tangenti. Ne deduciamo il teorema:

Data una curva di 3.ª classe K^3 apolare alla quartica C^4 e quattro sue tangenti qualunque, queste fanno parte di due ottalateri polari di C^4 circoscritti alla curva K^3. I 12 lati di questi ottalateri costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezioni.

§ 5. — Gli altri polilateri polari.

43. Resta ormai che noi diciamo qualche cosa dei polilateri polari di 9, 10 ed 11 lati della quartica fondamentale C^4. Quanto ai 12-, 13-, 14-lateri polari, noi non ce ne occuperemo, perchè la loro costruzione segue immediatamente da semplici considerazioni generali (n.° 15).

44. Consideriamo sei rette date ad arbitrio $a_1 \ldots a_6$ e vediamo se è possibile trovare altre tre rette $a_7\, a_8\, a_9$ in modo che l'ennalatero $a_1 \ldots a_9$ sia polare per la quartica C^4.

Ma se ciò è possibile, la K^2 inscritta in $a_5 \ldots a_9$ deve avere per conica polare una conica coniugata al quadrilatero $a_1 \ldots a_4$ e deve toccare le rette a_5, a_6 date, dunque appartiene a una schiera determinata. Così appartengono a schiere determinate le K^2 inscritte nei pentalateri $a_4\, a_6 \ldots a_9$, $a_3\, a_6 \ldots a_9$, $a_2\, a_6 \ldots a_9$.

Ora queste quattro schiere appartengono a un medesimo sistema lineare ∞^3 — quello costituito dalla K^2 che toccano la retta a_6 e hanno per conica polare una conica coniugata al pentalatero $a_1 \ldots a_5$ — dunque, come si vede subito riferendo proiettivamente questo sistema ∞^3 ai punti dello spazio, si potranno in due modi differenti scegliere quattro K^2, una per schiera, in modo che esse appartengano a una medesima schiera. Siano a_7, a_8, a_9 le ulteriori rette-basi, oltre a_6, della schiera formata da quattro di queste K^2: allora l'ennalatero $a_1 \ldots a_9$ è polare per la C^4.

Noi lasciamo al lettore la cura di provare quest'ultima asserzione: qui ci limiteremo ad osservare che, volendo, il teorema ora trovato può enunciarsi così:

Sei tangenti qualunque di una curva di 3.ª classe K^3 apolare a C^4 appartengono a due e due soli ennalateri polari di C^4 circoscritti a K^3. Le

12 tangenti di K^3 che così si ottengono costituiscono su K^3 un sistema completo di intersezione.

Un'altra costruzione degli ennalateri polari potrebbe darsi partendo dalla proprietà che in un ennalatero polare di C^4 ogni ettalatero è polare per la cubica polare del vertice complementare e assumendo come dati cinque lati $a_1 \dots a_5$ e uno dei vertici del quadrilatero costituito dai quattro lati rimanenti: ma noi non crediamo opportuno insistere maggiormente su ciò.

In ogni modo si ha che:

Una quartica possiede ∞^{12} ennalateri polari.

45. Siano ora date sette rette qualunque $a_1 \dots a_7$: dico che esse fanno parte di ∞^1 decalateri polari per la C^4: per modo che:

Ogni quartica possiede ∞^{15} decalateri polari.

Infatti diciamo $a_8\, a_9\, a_{10}$ tre rette che, eventualmente, formino con quelle sette un decalatero polare di C^4: la K^2 inscritta nel pentalatero $a_6\, a_7 \dots a_{10}$ deve essere coniugata alla conica polare della K^2 inscritta nel pentalatero complementare e deve toccare a_6, a_7, dunque appartiene a un tessuto determinato.

Così appartengono a tessuti determinati le K^2 inscritte nei pentalateri $a_5\, a_7 \dots a_{10}$, $a_4\, a_7 \dots a_{10}$, $a_3\, a_7 \dots a_{10}$, $a_2\, a_7 \dots a_{10}$. Questi cinque tessuti appartengono a un medesimo sistema lineare ∞^4 perchè hanno tutti la retta a_1 come retta-base, dunque si possono in ∞^1 modi scegliere cinque K^2, una per tessuto, in modo che essi appartengano a una medesima schiera.

Allora se $a_8\, a_9\, a_{10}$ sono le ulteriori rette-basi di una di queste schiere, il decalatero $a_1 \dots a_{10}$ è, come subito si vede, polare per la quartica C^4.

46. Consideriamo infine nove rette qualunque $a_1 \dots a_9$: si tratta di costruire un undici-latero che sia polare per la quartica C^4 ed abbia nove lati nelle nove rette date.

Detti a_{10}, a_{11} i due lati rimanenti di un tale eventuale undici-latero, osserviamo che il punto $a_{10,11}$ deve trovarsi sulla retta r polare rispetto a C^4 della curva di 3.ª classe inscritta nell'ennalatero $a_1 \dots a_9$: poi la curva di 3.ª classe inscritta nell'ennalatero $a_3 \dots a_{11}$ deve avere per retta polare una retta passante pel punto a_{12} e deve toccare $a_3 \dots a_9$, dunque appartiene a una schiera nota.

Così appartengono a schiere note le curve di 3.ª classe inscritte negli ennalateri $a_2\, a_4 \dots a_{11}$ e $a_1\, a_4 \dots a_{11}$.

Ora queste tre schiere appartengono a un sistema lineare ∞^3 perchè hanno tutte le rette $a_4 \dots a_9$ fra le rette basi, dunque si possono riferire proiettivamente in modo che le curve corrispondenti appartengano a una schiera.

Le terne di tangenti, oltre $a_4 \ldots a_9$, comuni alle terne di curve corrispondenti generano una curva di 6.ª classe (aventi in $a_4, \ldots a_9$ sei tangenti doppie e in a_1, a_2, a_3, tre tangenti semplici) e quindi formano un trilatero i cui vertici descrivono una curva del 6.° ordine (*). Ne segue che possono trovarsi sei terne di curve corrispondenti tali che delle tre tangenti ulteriori

(*) Per maggior comodità di linguaggio dimostriamo qui il teorema correlativo; ossia, facciamo vedere che se due fasci di cubiche proiettivi hanno sei punti-base comuni, i lati del triangolo costituito dai tre punti ulteriori comuni a due curve corrispondenti inviluppano una curva della 6.ª classe.

Intanto il luogo dei vertici di questo triangolo è una curva del 6.° ordine C^6 con sei punti doppi nei sei punti-base comuni dei due fasci e passanti semplicemente per gli altri punti-base; quindi se diciamo corrispondenti due raggi di un fascio P quando proiettano da P due vertici di uno di questi ∞^1 triangoli, viene stabilita nel fascio una corrispondenza simmetrica (12, 12).

Sia a una delle 24 coincidenze: o a è lato di un effettivo triangolo e allora essa assorbe due coincidenze ed è una tangente dell'inviluppo richiesto, oppure a proietta da P un punto in cui due curve corrispondenti dei due fasci si toccano, e allora essa è da considerarsi come una coincidenza semplice e non tocca l'inviluppo suddetto.

Per vedere quante volte si verifica quest'ultimo caso, consideriamo i due fasci di cubiche come immagini delle sezioni piane prodotte in una superficie del 3.° ordine da due fasci di piani r ed s, la superficie del 3.° ordine essendo rappresentata punto per punto sul piano dei due fasci.

Se due cubiche qualunque dei due fasci si toccano in un punto A, le sezioni piane corrispondenti si toccano nel punto obiettivo A' e delle tangenti in A' alla superficie una si appoggia alle due rette r ed s. Quindi per trovare l'ordine della curva luogo dei punti di contatto di cubiche dei due fasci basta trovare l'ordine della curva gobba della superficie costituita dai punti di contatto delle tangenti appoggiate ad r ed s, di cui essa è l'immagine.

Ora questa curva gobba incontra r nei tre punti ove essa taglia la superficie e poi incontra ulteriormente un piano generico σ per r, nei sei punti di contatto delle sei tangenti condotte dal punto $s\sigma$ alla cubica sezione di σ colla superficie, dunque essa è del nono ordine. Inoltre le sei rette della superficie rappresentate dai sei punti-base comuni ai due fasci sono trisecanti di questa curva, perchè le tangenti alla superficie lungo i punti di una retta costituiscono una congruenza del 2.° ordine e della 1.ª classe e quindi ve ne sono tre che si appoggiano ad r ed s, dunque la sua immagine è una curva del nono ordine che ha sei punti tripli in questi sei punti-base e che passa semplicemente per gli altri punti-base dei due fasci. (Cfr. la bella Nota del Berzolari, *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI.) I 12 punti che questa curva del 9.° ordine ha comuni con C^6, fuori dei punti-base, mostrano che il caso in discorso si verifica 12 volte, dunque il teorema è dimostrato.

ad esse comuni due si incrocino sulla retta r, e quindi, come subito si vede, vi sono sei undici-lateri polari della quartica C^4 che abbiano nove lati nelle nove rette date.

Ne riceviamo il teorema:

Ogni quartica possiede ∞^{18} undici-lateri. Nove rette generiche del piano appartengono a sei di questi undici-lateri.

47. Con ciò il problema delle figure polari delle quartiche piane è completamente risoluto; o se si vuole è risoluto il problema:

Dato un sistema lineare ∞^{13} di curve di 4.ª classe (del 4.º ordine) trovare gli r-lateri (r-goni) ($6 \leqq r \leqq 14$) *nei quali (ai quali) sono inscritte (circoscritte) ∞^{14-r} curve del sistema.*