

光速因子：推导与精确形式 ——从动势非线性到等效曲率半径

王江祁

2026/6/1

Abstract

光速因子 $\frac{1}{1+v^2/c^2}$ 是等效曲率半径中连接牛顿曲率与真实曲率的修正因子。本文给出它的严格推导：从动势对数形式出发，展示动势的非线性使其实际值低于牛顿线性预期，在等势面矢量合成中引力势占据更大权重，等势面向引力方向倾斜更多。这一效应不在单点曲率中显现——单点法向加速度只含牛顿项——而在整条路径的累积弯曲中。经由加速度公式的路径积分，得到偏折率公式，反推等效曲率半径，光速因子自然出现。全文不依赖定义或唯象假设。光速因子是动势非线性在路径积分中的严格结果。

1. 引言

振动论用等势面描述轨道运动。等势面由引力势（场的属性）与动势（物体的属性）矢量合成构造，物体沿等势面滑行，等势面弯多少，路径就弯多少 [1]。

在牛顿力学中，动势取线性形式 $\Phi_{\text{motion}} \approx -v^2/(2c^2)$ 。引力势与动势的合成权重给出标准圆锥曲线。

但真实的动势不是线性的。它的精确形式是 [2]：

$$\Phi_{\text{motion}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (1)$$

展开后，高阶项全是负的。速度越快，动势比牛顿线性预期越小。在等势面的矢量合成中，动势偏弱，引力势占据更大权重。等势面向引力方向倾斜更多，路径在每一点都比牛顿预期弯得更厉害。

光速因子 $\frac{1}{1+v^2/c^2}$ 就是这个“动势折扣”在曲率上的数学编码。静止时因子为 1，光速时因子为 1/2，曲率翻倍。本文展示如何从动势对数形式出发，经由严格推导得到这一因子。

2. 动势的非线性——光速因子的物理根源

2.1 动势展开

将 (1) 展开为幂级数：

$$\Phi_{\text{motion}} = -\frac{v^2}{2c^2} - \frac{v^4}{4c^4} - \frac{v^6}{6c^6} - \dots \quad (2)$$

牛顿力学只取第一项 $-v^2/(2c^2)$ 。后面所有项 ($-v^4/(4c^4)$ 及更高) 都是非线性修正。

2.2 动势的“折扣”

所有非线性项都是负的。这意味着：

$$\Phi_{\text{motion}} < \Phi_{\text{motion}}^{\text{牛顿}} = -\frac{v^2}{2c^2} \quad (3)$$

真实动势比牛顿线性预期更小。速度越快，这个“折扣”越显著：

$$\text{折扣比例} = \frac{\Phi_{\text{motion}}}{\Phi_{\text{motion}}^{\text{牛顿}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots > 1 \quad (4)$$

(动势本身为负，绝对值更大意味着负得更多，即“折扣”更大。)

2.3 等势面博弈——引力势占优

等势面由引力势梯度与动势梯度矢量合成决定其法向 [1]。

牛顿力学中，引力势和动势以特定权重参与合成，给出标准圆锥曲线。

真实情况中，动势偏弱。在矢量合成的“博弈”中，引力势赢得更大权重。合成后的等势面法向更靠近径向——等势面向引力方向倾斜更多。

这就是光速因子的物理根源：动势在高速下打了折扣，引力势在等势面博弈中占了上风，路径弯曲得更厉害。

3. 单点法向分解——光速因子不在这里

3.1 加速度公式的矢量分解

振动论的加速度公式 [3]：

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -c^2 \nabla \Phi_g - (\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_g) \mathbf{v} \quad (5)$$

引力场 $\Phi_g = -GM/(c^2 r)$ ，梯度 $\nabla \Phi_g = \frac{GM}{c^2 r^2} \hat{\mathbf{r}}$ 。代入：

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{GM}{c^2 r^2} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{v} \quad (6)$$

在轨道任意点建立局域正交标架： $\hat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{v}/v$ (切向)， $\hat{\mathbf{e}}_n$ (法向，指向轨道凹侧)。设 $\hat{\mathbf{r}}$ 与 $\hat{\mathbf{v}}$ 的夹角为 α ：

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_t - \sin \alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \quad (7)$$

代入 (6)，利用 $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_t$ 、 $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}} = v \cos \alpha$ ：

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \cos \alpha \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{\mathbf{e}}_t + \frac{GM}{r^2} \sin \alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \quad (8)$$

3.2 法向分量——不含光速因子

从 (8) 直接读出法向分量：

$$a_n = \frac{GM}{r^2} \sin \alpha \quad (9)$$

第二项 $-(\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi_g)\mathbf{v}$ 完全在切向，没有法向投影。

3.3 瞬时曲率半径——也不含光速因子

由 Frenet 公式，瞬时曲率半径：

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2 r^2}{GM \sin \alpha} \quad (10)$$

这就是牛顿曲率半径。在单点法向分解中，光速因子不出现。

3.4 关键认识

光速因子不在单点曲率中。单点法向分解只看到加速度公式第一项的直接贡献——这一项给出牛顿引力。第二项虽然是精确加速度公式的必要组成部分，但它在单点的法向投影为零。它的影响通过改变切向加速度、进而改变速度演化、最终在路径累积中显现。

4. 路径积分——光速因子的数学位置

4.1 切向加速度的累积效应

加速度公式第二项改变切向加速度：

$$a_t = -\frac{GM}{r^2} \cos \alpha \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (11)$$

与牛顿力学（切向加速度仅含 $-\frac{GM}{r^2} \cos \alpha$ ）相比，多出的 v^2/c^2 项使：

- 前半程（靠近中心天体， $\cos \alpha > 0$ ）：减速更快
- 后半程（远离中心天体， $\cos \alpha < 0$ ）：加速更快

净效果：物体在强场区的速度比牛顿预期更小，停留时间更长，累积的横向偏转更多。

4.2 偏折率公式

动势的非线性折扣沿整条路径累积。设物体沿 x 轴附近掠过中心天体，瞄准距为 b ，路径上任意点到天体的距离 $r = \sqrt{b^2 + x^2}$ 。

加速度公式的完整路径积分 [4] 给出偏折率——单位路径长度上的转角：

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{GM}{c^2} \frac{b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (12)$$

对光子 ($v = c$):

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{2GM}{c^2} \frac{b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \quad (13)$$

$1 + v^2/c^2$ 是动势非线性在偏折率中的体现。它不是“额外的偏转”，而是同一个偏转——由等势面形状决定的偏转——因为动势折扣而比牛顿预期更大。

5. 从偏折率反推等效曲率半径

5.1 近日点的等效曲率半径

在近日点 ($x = 0, r = b, \alpha = 90^\circ$)，偏折率与曲率半径满足几何关系 $d\phi/dx \approx 1/R_{\text{等效}}$ (小角度近似):

$$\frac{1}{R_{\text{等效}}} = \frac{GM}{c^2 b^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (14)$$

$$R_{\text{等效}} = \frac{c^2 b^2}{GM} \cdot \frac{1}{1 + v^2/c^2} \quad (15)$$

在近日点， c^2 与 v^2 通过等势面方程关联。用 v^2 替换 c^2 :

$$R_{\text{等效}} = \frac{v^2 r^2}{GM} \cdot \frac{1}{1 + v^2/c^2} \quad (16)$$

5.2 推广到任意点

引入方向因子 $\sin \alpha$ 以覆盖非近日点的普遍情况:

$$R_{\text{等效}} = \frac{v^2 r^2}{GM \sin \alpha} \cdot \frac{1}{1 + v^2/c^2} \quad (17)$$

推广到任意中心势场 (耦合常数 K):

$$R_{\text{等效}} = \frac{v^2 r^2}{K \sin \alpha} \cdot \frac{1}{1 + v^2/c^2} \quad (18)$$

光速因子 $\frac{1}{1+v^2/c^2}$ 严格出现。它不是“定义”——它是偏折率公式反推等效曲率半径时的直接结果。

6. 验证

6.1 光线偏折

光子 $v = c$ ，近日点 $\sin \alpha = 1$ ， $r = b$ ：

$$R_{\text{等效}} = \frac{c^2 b^2}{GM} \cdot \frac{1}{2} \quad (19)$$

偏折角 $\Delta\theta = 2b/R_{\text{等效}} = 4GM/(c^2 b) = 1.75''$ 。与 1919 年日食观测 [5] 及后续 VLBI 测量一致。

6.2 水星进动

光速因子嵌入引力增强因子的展开，贡献系数 1。与引力势自调制贡献的系数 2 汇聚为 Binet 方程中的系数 3，给出每世纪进动：

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)} = 42.98''/\text{世纪} \quad (20)$$

与 Le Verrier (1859) 的观测异常及 Einstein (1915) 的计算结果一致 [6]。

6.3 牛顿极限

$v \ll c$ 时， $1/(1+v^2/c^2) \approx 1-v^2/c^2 \approx 1$ ，光速因子退化为 1。等效曲率半径退回牛顿曲率半径 $R = v^2 r^2 / (GM \sin \alpha)$ 。

7. 为什么不是 $1/(1-v^2/c^2)$

7.1 单点代数代入给出不同的结果

如果将光速恒等式 $c_{\text{local}}^2 = c^2 - v^2$ 直接代入曲率半径公式 $R = v^2 r^2 / (GM) \cdot c^2 / c_{\text{local}}^2$ ：

$$R = \frac{v^2 r^2}{GM} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (21)$$

这给出的是 $1/(1-v^2/c^2)$ ，不是光速因子 $1/(1+v^2/c^2)$ 。

7.2 两个因子在 $v = c$ 时分岔

速度	$1/(1+v^2/c^2)$	$1/(1-v^2/c^2)$
$v = 0$	1	1
$v \ll c$	$\approx 1 - v^2/c^2$	$\approx 1 + v^2/c^2$
$v = c$	1/2	∞
光线偏折	1.75'' ✓	0 ×

在 $v \ll c$ 时，两者展开到一阶分别为 $1 - v^2/c^2$ 和 $1 + v^2/c^2$ ，符号相反。但低速下两者的数值差异极小（水星 $v/c \sim 10^{-4}$ ，差异 $\sim 10^{-8}$ ），单个检验无法区分。是光子在 $v = c$ 时的极限行为——偏折角 $1.75''$ 要求因子 $1/2$ ——锚定了光速因子的精确形式。

7.3 单点代数与路径积分的区别

单点代数代入（光速恒等式 \rightarrow 曲率半径）给出的 $1/(1 - v^2/c^2)$ 是局部瞬时关系。路径积分给出的 $1/(1 + v^2/c^2)$ 是整条路径上动势折扣累积效应的编码。两者的差异在低速时被掩盖，在高速时暴露。观测支持路径积分的结果。

8. 常见误区

8.1 误区一：从等势面方程代数展开推导光速因子

等势面方程给出的是能量层面的 $v^2(r)$ 关系。展开到 v^4/c^4 阶，能量修正系数为 $1/4$ 。将此系数直接代入曲率半径，得不到正确的光速因子 $1/(1 + v^2/c^2)$ 。原因：能量到曲率需要经过微分运算（加速度是速度的导数，曲率是加速度的空间投影），两者的连接不是代数替换，而是路径积分。

8.2 误区二：将单点法向分解等同于曲率半径的全部

加速度公式第二项在单点法向投影为零。由此容易误认为第二项对曲率没有贡献。实际上，第二项改变了切向加速度，从而改变了物体在强场区的停留时间。这一效应沿路径累积，在全局弯曲中体现出来。光速因子是全局效应，不是局部效应。

8.3 误区三：将 $1 - v^2/c^2$ 当作光速因子的精确形式

$1 - v^2/c^2$ 是动势导数的分母因子，在 $v \rightarrow c$ 时趋于零。它只是 $1/(1 + v^2/c^2)$ 的低速截断，不是独立于光速因子的“精确形式”。在需要光子极限的场合，必须使用精确形式 $1/(1 + v^2/c^2)$ 。

8.4 正确的推导路径

动势对数形式 \rightarrow 动势非线性 \rightarrow 等势面博弈 \rightarrow 路径积分 \rightarrow 偏折率公式 \rightarrow 反推等效曲率半径 \rightarrow 光速因子。光速因子不在单点法向分解里，不在等势面方程的代数展开里。它在整条路径上动势折扣的累积效应中。

9. 推导链总结

$$\begin{aligned}
 & \text{动势对数形式} \frac{1}{2} \ln(1 - v^2/c^2) \\
 & \quad \downarrow \text{展开} \\
 & \text{非线性修正项} -v^4/(4c^4) - v^6/(6c^6) - \dots \\
 & \quad \downarrow \text{等势面矢量合成} \\
 & \text{动势偏弱} \rightarrow \text{引力势权重上升} \rightarrow \text{路径更弯} \\
 & \quad \downarrow \text{路径积分} \\
 & \text{偏折率增强因子} 1 + v^2/c^2 \\
 & \quad \downarrow \text{反推等效曲率半径} \\
 & \boxed{\text{光速因子} \frac{1}{1 + v^2/c^2}}
 \end{aligned} \tag{22}$$

10. 结论

1. 光速因子的精确形式是 $\frac{1}{1 + v^2/c^2}$ 。
2. 它的物理根源是动势的非线性：动势低于牛顿预期 \rightarrow 等势面博弈中引力势占优 \rightarrow 路径弯曲增强。
3. 它的数学位置在路径积分中，不在单点法向分解中。单点曲率半径不含光速因子，光速因子是全局累积效应的编码。
4. 它从偏折率公式反推等效曲率半径时严格出现，不需要定义或唯象假设。
5. 它是动势对数形式在路径积分中的严格结果。而动势对数形式由面积扫过原理导出 [2]。整条推导链闭合。
6. 它在 $v = 0$ 时为 1， $v = c$ 时为 1/2，统一描述从行星到光子的全部轨道弯曲行为。
7. 它的精确形式由光子极限（ $v = c$ ）锚定。低速展开无法区分 $1/(1 + v^2/c^2)$ 与 $1/(1 - v^2/c^2)$ ，是光线偏折的观测事实锁定了前者。

附录 A： 光速因子与洛伦兹因子的区别

属性	光速因子	洛伦兹因子
公式	$\frac{1}{1+v^2/c^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
管辖域	外部耦合	内部属性
回答问题	引力怎么拉物体？	物体自身怎么变？
来源	动势非线性 \rightarrow 路径积分	动势 \rightarrow 频率调制
$v = 0$	1	1
$v = c$	1/2	∞
应用	光线偏折、水星进动	时间膨胀、寿命延长

两者同源于动势的对数形式，但管不同的域。光速因子管外部（运动如何增强引力响应），洛伦兹因子管内部（运动如何改变自身属性）。不可混淆。

附录 B：符号表

符号	含义
Φ_{motion}	动势
Φ_g	引力势
$R_{\text{等效}}$	等效曲率半径
K	耦合常数（引力场 $K = GM$ ）
α	速度方向与径向的夹角
b	瞄准距
v	物体速度
c	真空光速

References

[1] 王江祁. (2026). 等势面构造原理：从势场矢量合成到轨道几何. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.20061595.

[2] 王江祁. (2026). 运动动力学是势场的时空变化积分——从“面积扫过”原理重新推导相对论效应. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.19965708.

[3] 王江祁. (2026). 加速度公式：力的终结与运动的统一. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.19965708.

[4] 王江祁. (2026). 偏折率公式——从光线偏折到行星进动的统一工具. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.20354584.

[5] Dyson, F. W., Eddington, A. S., & Davidson, C. (1920). A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 220, 291–333.

[6] Einstein, A. (1915). Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 831–839.