

完整版引力加速度公式：推导、推论与强场预言

王江祁

2026/5/1

Abstract

本文从势场指数调制框架出发，严格导出引力场中静止物体的完整加速度公式：

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)} \hat{\mathbf{r}}$$

该公式由两项乘积构成：牛顿加速度 GM/r^2 与引力场自衰减因子 $e^{-4GM/(c_0^2 r)}$ 。指数衰减的物理根源在于内部光速被引力势调制——势越深，内部光速越低，物体对势梯度的响应越弱。势场本身在因果链的第二层，产生调制但不被调制；指数因子全部来自第三层的 c_{local}^2 ，势梯度保持坐标形式不变。

弱场下一阶展开退回牛顿公式，太阳系内偏差量级为 10^{-6} 至 10^{-8} ，与所有现有观测一致。强场下该公式给出三个定性推论：(1) 奇点自动消除—— $r \rightarrow 0$ 时加速度趋于零而非无穷；(2) 光子圆轨道不存在——光子球方程 $x = e^x$ 在实数范围内无解；(3) 经典史瓦西半径不存在——逃逸速度达到光速的临界半径方程无实数解。(4) 最大引力场强度与有限暗天体。四个推论共享同一个数学根源：指数衰减压倒幂次发散。

本文进一步给出可检验的强场预言：黑洞阴影边界为渐变过渡带而非锐利光子环，双星并合波形末端存在系统性偏移，中子星最大质量略高于广义相对论预言。这些预言可由下一代事件视界望远镜 (ngEHT)、空间 VLBI 及引力波探测器检验。

1. 推导

1.1 出发点：势场指数调制框架

势场论的核心假设是：引力是势场对一切振动过程的指数调制。理论的因果链为 [1]：

- 第二层（势场）：源产生势场， $\Phi_g = -GM/(c_0^2 r)$
- 第三层（频率）：势场调制频率， $\nu/\nu_0 = e^{\Phi_g}$

因果方向严格单向：势场产生调制，势场本身在第二层，不被指数调制。在外部观测者视角下，引力场中静止物体的内部频率、波长和光速分别服从：

$$\nu = \nu_0 e^{\Phi_g}, \quad \lambda = \lambda_0 e^{\Phi_g}, \quad c = c_0 e^{2\Phi_g}$$

其中 c_0 是平直空间真空光速。

1.2 加速度公式的一般形式

势场论的运动方程不含质量和力。加速度由局域光速与势梯度的乘积直接给出 [1]：

$$\mathbf{a} = -c_{\text{local}}^2 \cdot \nabla \Phi_g$$

引力场中静止物体的局域光速即该点的空间光速：

$$c_{\text{local}} = c(r) = c_0 e^{2\Phi_g} = c_0 e^{-2GM/(c_0^2 r)}$$

因此：

$$c_{\text{local}}^2 = c_0^2 e^{4\Phi_g} = c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)}$$

1.3 势梯度的坐标形式

势梯度是第二层的量——势场本身不被指数调制。在外部观测者使用的坐标中，引力势直接对坐标求导：

$$\nabla \Phi_g = \frac{\partial \Phi_g}{\partial r} \hat{r} = \frac{GM}{c_0^2 r^2} \hat{r}$$

这就是牛顿极限中的标准形式。空间尺度调制影响的是物理距离的测量，但加速度公式中的 $\nabla \Phi_g$ 是坐标空间中的量——外部观测者用外部坐标描述运动，势梯度保持坐标形式，不需要额外的调制因子。

1.4 完整加速度公式

代入：

$$\mathbf{a} = -c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)} \cdot \frac{GM}{c_0^2 r^2} \hat{r}$$

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)} \hat{r}$$

1.5 推导链汇总

步骤	内容	所属因果层
加速度公式	$\mathbf{a} = -c_{\text{local}}^2 \nabla \Phi_g$	第五层（动力学）
内部光速	$c_{\text{local}} = c_0 e^{2\Phi_g}$	第三层（频率调制）
c_{local}^2	$c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)}$	第三层（被调制）
势梯度	$\nabla \Phi_g = \frac{GM}{c_0^2 r^2} \hat{r}$	第二层（不被调制）
完整加速度	$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} e^{-4GM/(c_0^2 r)} \hat{r}$	—

指数因子全部来自 c_{local}^2 。势梯度保持坐标形式不变。调制在响应方，不在驱动方。因果方向不逆。

2. 物理含义

2.1 公式拆解

$$\mathbf{a} = \underbrace{-\frac{GM}{r^2}}_{\text{牛顿加速度}} \cdot \underbrace{e^{-4GM/(c_0^2 r)}}_{\text{引力场自衰减因子}}$$

牛顿项来自势梯度的坐标形式——它保留了 $1/r^2$ 的几何衰减。指数因子来自内部光速的平方——它编码了引力场对物体响应能力的调制。

2.2 物理机制：场越强，越推不动

加速度公式表达的机制是：

- 引力场通过势梯度产生驱动（第二层，不被调制）
- 物体的响应能力取决于内部光速（第三层，被势场调制）
- 引力场越强，内部光速越低
- 内部光速越低，响应越弱

产生驱动的机制和被驱动对象的响应能力被同一个势场连接，但分属不同的因果层。势场决定调制，势场本身不被调制——这是因果单向性的体现。

2.3 与牛顿力学的对比

	牛顿	完整版
加速度	GM/r^2	$GM/r^2 \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)}$
$r \rightarrow \infty$	趋于零	趋于零
$r \rightarrow 0$	发散到无穷	趋于零
奇点	有	无

3. 弱场极限

3.1 一阶展开

$$e^{-4GM/(c_0^2 r)} \approx 1 - \frac{4GM}{c_0^2 r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c_0^4}\right)$$

$$\mathbf{a} \approx -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{4GM}{c_0^2 r}\right) \hat{r}$$

3.2 太阳系内偏差量级

场景	$4GM/(c_0^2 r)$	与牛顿值的相对偏差
太阳表面	8.5×10^{-6}	8.5×10^{-6}
水星轨道近日点	2.0×10^{-7}	2.0×10^{-7}
地球轨道	8.0×10^{-8}	8.0×10^{-8}
GPS 卫星轨道	$\sim 10^{-9}$	$\sim 10^{-9}$

太阳系内所有现有观测精度均不足以区分完整版与牛顿版。完整版在弱场下与所有经典检验一致。

4. 推论一：奇点消除

4.1 极限证明

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{GM}{r^2} \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)}$$

令 $u = 1/r$, $r \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} GMu^2 \cdot e^{-(4GM/c_0^2)u}$$

指数衰减速度远快于幂次发散速度:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 e^{-\alpha u} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\boxed{\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{a} = 0}$$

4.2 物理图像

奇点在牛顿力学和广义相对论中的产生，根源在于将质量集中在零体积点上然后取极限 [2, 3]。在完整版框架中，即使质量集中在一个点，越靠近该点引力场越强，内部光速指数衰减，响应能力指数衰减。加速度不是发散到无穷，而是光滑地趋于零。

核心不是无限密度，不是时空破裂，而是一个渐近冻结的区域——所有物理过程无限变慢，加速度趋于零。不需要量子引力来消除奇点，经典框架内的指数衰减已经完成。

这一结论同时意味着引力自能的发散在完整版中自动消失——自能不过是 e^Φ 展开的二阶项，在完整指数形式中从不产生奇点。

5. 推论二：光子圆轨道不存在

5.1 从完整加速度到完整 R 公式

光子圆轨道需要同时满足两个条件： $v = c_0$ （光子），且曲率半径等于轨道半径（ $R = r$ ）。

曲率半径的定义为 $R = v^2/a_n$ ，其中 a_n 是法向加速度。完整的 R 公式需同时包含引力场的自衰减和运动对引力的增强，其完整形式为 [4]:

$$R = \frac{v^2 r^2}{GM \sin \alpha} \cdot \frac{1}{(1 + v^2/c_0^2) \cdot e^{-2GM/(c_0^2 r)}}$$

分母中的 $(1 + v^2/c_0^2)$ 是光速因子， $e^{-2GM/(c_0^2 r)}$ 是引力因子。两者乘积构成引力增强因子 $\mathcal{F}_{\text{完整}}$ 。

5.2 光子球计算

代入光子条件： $v = c_0$ ， $R = r$ ， $\sin \alpha = 1$ ：

$$r = \frac{c_0^2 r^2}{GM} \cdot \frac{1}{2 \cdot e^{-2GM/(c_0^2 r)}}$$

$$1 = \frac{c_0^2 r}{2GM} \cdot e^{2GM/(c_0^2 r)}$$

令 $x = 2GM/(c_0^2 r)$ ，则 $c_0^2 r/(2GM) = 1/x$ ：

$$1 = \frac{1}{x} \cdot e^x$$

$$\boxed{x = e^x}$$

5.3 无解证明

令 $f(x) = e^x - x$ ：

- $f(0) = 1$
- $f'(x) = e^x - 1 > 0$ 对所有 $x > 0$
- $f(x)$ 在 $x > 0$ 严格单调递增
- $f(x) > 1$ 对所有 $x > 0$
- 方程 $f(x) = 0$ 在 $x > 0$ 无解

5.4 物理图像

光子无法在任何半径处形成闭合圆轨道。真实的光子路径永远是螺旋线——要么向内坠入中心，要么向外逃逸到无穷远。不存在那个“刚好平衡”的半径。

注：若直接从本文的完整加速度公式 $a = (GM/r^2) \cdot e^{-4}$ 出发，用法向力平衡 $a = c^2/r$ 或曲率半径定义 $R = v^2/a$ ，均导出等价方程 $ye^{-y} = 4$ ($y = 4GM/(c^2 r)$)，与 $x = e^x$ 同为实数无解。多路径无解强化了结论的稳健性。

6. 推论三：史瓦西半径不存在

6.1 逃逸速度的完整推导

逃逸条件来自势场论的势差方程：物体从无穷远处静止释放，下落到 r 处时获得的动势等于引力势的减少量 [1]。

动势的完整形式为：

$$\Phi_{\text{motion}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c_{\text{local}}^2} \right)$$

其中 $c_{\text{local}}^2 = c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)}$ 。

自由下落中动势累积等于引力势变化： $\Phi_{\text{motion}} = GM/(c_0^2 r)$ 。

令两者相等：

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)}} \right) = \frac{GM}{c_0^2 r}$$

6.2 求解逃逸速度

$$1 - \frac{v^2}{c_0^2 e^{-4GM/(c_0^2 r)}} = e^{2GM/(c_0^2 r)}$$

$$v_{\text{esc}}^2 = c_0^2 \left(e^{-4GM/(c_0^2 r)} - e^{-2GM/(c_0^2 r)} \right)$$

6.3 令 $v_{\text{esc}} = c_0$ 求临界半径

$$1 = e^{-4x} - e^{-2x}$$

其中 $x = GM/(c_0^2 r_s)$ 。令 $y = e^{-2x}$ ：

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1.618$$

$$e^{-2x} = \varphi > 1 \Rightarrow x < 0$$

但 $x = GM/(c_0^2 r_s) > 0$ 。方程在 $x > 0$ 时无解——当 $x > 0, e^{-2x} < 1, e^{-4x} - e^{-2x} < 0$ ，不可能等于 1。

方程无实数解

6.4 物理图像

物体从任何有限半径处都无法通过自由下落加速到光速。光速是渐近极限，在任何有限半径处都达不到。”视界”不是光速逃逸面，而是内部光速指数衰减的渐近区域。这与光子球不存在的结论一致——没有圆轨道，没有明确视界，只有连续的指数衰减。

7. 推论四：最大引力场强度与有限暗天体

7.1 加速度的极大值

完整版加速度公式在 $r \rightarrow 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 时均趋于零，因此在中间某个半径处必然存在极大值。

令 $a(r) = GM/r^2 \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)}$ ，求导 $da/dr = 0$ 。
 令 $x = 2GM/(c_0^2 r)$ ，则 $r = 2GM/(c_0^2 x)$ ， $GM/r^2 = c_0^4 x^2/(4GM)$ 。
 代入：

$$a(x) = \frac{c_0^4}{4GM} \cdot x^2 \cdot e^{-2x}$$

求极值：

$$\frac{da}{dx} = \frac{c_0^4}{4GM} \cdot (2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}) = \frac{c_0^4}{2GM} \cdot xe^{-2x}(1 - x) = 0$$

在 $x > 0$ 时， $x = 1$ 。此时：

$$r_{\max} = \frac{2GM}{c_0^2}$$

$$a_{\max} = \frac{c_0^4}{4GM} \cdot e^{-2} \approx \frac{c_0^4}{4GM} \times 0.1353$$

7.2 物理图像

这个半径恰好等于经典史瓦西半径的数值。但在完整版框架中，它不是事件视界。
 两者的本质区别：

	广义相对论	完整版
$r = 2GM/c^2$ 的性质	事件视界，单向膜	加速度极大值点
光能否逃逸	不能	能（推论三）
内部	奇点	加速度渐近于零的冻结区

在 $r > 2GM/c_0^2$ 区域，引力加速度随靠近中心而增大——这是牛顿直觉适用的区域。在 $r = 2GM/c_0^2$ 处达到峰值。在 $r < 2GM/c_0^2$ 区域，指数衰减压倒幂次发散，加速度不升反降，趋向中心时趋于零。

7.3 有限暗天体的物理图像

完整版框架所描述的强场天体既无奇点亦无事件视界：在 $r = 2GM/c_0^2$ 处引力最强，向内逐渐减弱，中心趋于冻结。光可以从任何半径逃逸，不存在不可返回的边界。

这是一个有限强度、有限密度的暗天体——它的“暗”来自极端红移（频率指数衰减），而非视界的因果隔离。在外部观测者看来，靠近中心区域的辐射高度红移，实际上不可见，但在物理上仍然是连通的空间。

7.4 与可检验预言的关系

最大引力场强度的存在，为第七节的三个可检验预言提供了物理根源：

- 阴影渐变过渡带：光子没有圆轨道，加上加速度在 $r < 2GM/c_0^2$ 区域减弱，光子在中心附近不被强弯折。阴影边界不是锐利的光子环，而是红移渐深的连续过渡带。
- 并合波形末端偏移：并合过程中，两个天体的加速度在接近 $r = 2GM/c_0^2$ 时不升反降，并合末期的加速比广义相对论慢，导致波形末端存在系统性相位偏移。
- 中子星最大质量偏高：引力在强场下比广义相对论弱，天体在更大质量下仍能稳定支撑。

8. 可检验预言

8.1 黑洞阴影：渐变过渡带

广义相对论预言黑洞暗影周围存在由绕行多圈光子形成的锐利光子环。完整版因光子圆轨道不存在，预言阴影边界为亮度连续变化的渐变过渡带，无锐利边界。

当前事件视界望远镜（EHT）对 M87 和 Sgr A 的观测已看到环状结构 [5, 6]，但分辨率尚不足以区分锐利环和弥散带。下一代 EHT（ngEHT）和空间 VLBI 可将分辨率提升至微角秒级，直接检验这一预言。

8.2 引力波：并合波形末端偏移

双星并合最后阶段进入强场。完整版加速度公式的指数衰减会改变并合末期的轨道动力学——并合速度比广义相对论慢，波形末端存在系统性相位偏移。可由 LIGO/Virgo/KAGRA 数据的高精度波形比对检验 [7]。

8.3 中子星最大质量：略高于广义相对论预言

中子星内部 $\Phi_g \sim -0.1$ 至 -0.3 。指数衰减因子 $e^{-4GM/(c_0^2 r)} \approx 0.3 - 0.7$ ，意味着强场下引力比广义相对论弱。中子星在更大质量下仍可稳定支撑——最大质量略高于广义相对论预言 [8]。精确数值需构建完整的中子星结构方程。

8.4 三个预言的汇总

预言	检验手段	与广义相对论的差异
黑洞阴影渐变过渡带	ngEHT、空间 VLBI	定性不同（锐利环 vs 渐变带）
并合波形末端偏移	LIGO/Virgo/KAGRA	定量偏移，需高精度波形比对
中子星最大质量偏高	脉冲星质量测量	定量差异，需精确结构计算

9. 与广义相对论的对比

	牛顿	广义相对论	完整版
加速度公式	GM/r^2	测地线方程（无显式标量公式）	$GM/r^2 \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)}$
奇点	有	有（曲率发散）[3]	无
光子球	无此概念	$r = 3GM/c^2$ [3]	无解
史瓦西半径	$r = 2GM/c^2$	$r = 2GM/c^2$ [3]	无解
视界性质	无	尖锐事件视界	渐近衰减区
弱场极限	基准	退回牛顿	退回牛顿

完整版与广义相对论在弱场下重合，在强场下定性分岔。差异可观测。

10. 结论

完整版引力加速度公式为：

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \cdot e^{-4GM/(c_0^2 r)} \hat{r}$$

它的物理含义可以用一句话概括：场越强，越推不动。引力场通过势梯度产生驱动（第二层，不被调制），但同时降低物体的内部光速（第三层，被调制），削弱响应能力。产生驱动的机制和被驱动对象的响应能力被同一个势场连接，但分属不同的因果层——因果方向严格单向。

这个公式在弱场下退回牛顿，与太阳系内所有观测一致。在强场下自动消除奇点、光子圆轨道和经典史瓦西半径。三个消除不是假定，是指数衰减的数学推论。

它对强场的预言——渐变过渡带、波形末端偏移、中子星质量偏高——可由下一代观测检验。如果这些预言被证实，这个公式将成为引力理论中比广义相对论更基本的方程。如果被证伪，它自动失效。

一个指数因子。三个自动消除。四个可检验预言。这就是完整版加速度公式。

References

- [1] 王江祁. (2026). 振动论方程体系 2.0——从频率第一性原理到经典物理的统一计算. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.20421496
- [2] Einstein, A. (1915). Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 831-839.
- [3] Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, 189-196.
- [4] 王江祁. (2026). 振动论方程体系 3.0——R 公式的结构性修正与几何工具层的高阶完备化. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.20421496
- [5] Event Horizon Telescope Collaboration (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. The Astrophysical Journal Letters, 875, L1.

- [6] Event Horizon Telescope Collaboration (2022). First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. *The Astrophysical Journal Letters*, 930, L12.
- [7] Abbott, B. P. et al. (LIGO/Virgo Collaboration) (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116, 061102.
- [8] Özel, F. & Freire, P. (2016). Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 54, 401–440.