

Українська бібліотека прикладної математики та інженерії

Сигнали, оцінювання стану, керування, робототехніка, сенсорне злиття
і чисельні методи

TeX-first machine-readable translation lane

2026-06-01

Про цей робочий довідник

Цей файл є робочим TeX-довідником з прикладної математики та інженерної теорії українською. Він зібраний із source-first модулів, перекладених фрагментів і локальних TeX-чернеток. Пріоритет: корисні формули, чистий машинозчитуваний TeX, зрозуміла термінологія, відтворювана збірка і прозорий стан джерел.

Принцип відбору. Модулі включено за практичною математичною корисністю: сигнали, оцінювання стану, стохастичні моделі, керування, сенсорне злиття, VIO/SLAM, RF/SDR, хвильові рівняння, оптимізація та чисельне моделювання. Це не канон і не перелік дозволених тем; це поточний висококорисний зріз, який треба розширювати.

Зміст

I	Signals, State Estimation, Control, and Numerical Methods	1
1	Сигнали, дискретизація і спектр	2
1.1	Мета розділу	2
1.2	Неперервний і дискретний сигнал	2
1.3	Згортка і лінійна інваріантна система	2
1.4	DTFT, DFT і FFT	3
1.5	Вікна і спектральне витікання	3
1.6	Комплексна база смуги та IQ-представлення	3
1.7	Мінімальний набір перевірок для перекладу DSP	4
2	Оцінювання стану і фільтр Калмана	5
2.1	Перекладений фрагмент: постановка задачі оцінювання стану . . .	5
2.1.1	Стан	5
2.1.2	Вимірювання	5
2.1.3	Апріорні моделі	6
2.1.4	Процесна модель	6
2.2	Лінійний фільтр Калмана	6
2.2.1	Прогноз	6
2.2.2	Оновлення	6
2.3	EKF: мінімальна нелінійна форма	7
2.4	Практичні перевірки для перекладу	7
3	Кватерніони, обертання і ESKF	8
3.1	Перекладений фрагмент: мета джерела про кватерніони	8
3.2	Системи координат і обертання	8
3.3	Кватерніон	8
3.4	Вектор обертання і експонента	9
3.5	Стан похибки	9
3.6	Чому це важливо для перекладу	9
4	Мікротеорія Лі для оцінювання стану	11
4.1	Перекладений фрагмент: вступ до мікротеорії Лі	11
4.2	Група, дотичний простір і локальні координати	11
4.3	Операції \oplus і \ominus	12
4.4	Оператор $\hat{\cdot}$ і \vee	12
4.5	Adjoint і перенесення збурень	12
4.6	Чому групи Лі потрібні для фільтрів і оптимізації	13
4.7	Перекладацькі застереження	13
5	Чисельне моделювання: скінченні різниці і хвильові моделі	14
5.1	Навіщо цей розділ у ядрі	14
5.2	Сітка і різницеві оператори	14
5.3	Теплопровідність як тест стійкості	14
5.4	Хвильове рівняння	15
5.5	Енергія і перевірка розрахунку	15
5.6	Похибка, збіжність, верифікація	15

5.7	Черга перекладу для чисельних методів	15
6	Оптимізація і найменші квадрати	17
6.1	Чому оптимізація входить у перше ядро	17
6.2	Найменші квадрати	17
6.3	Зважені найменші квадрати	17
6.4	Регуляризація	17
6.5	Нелінійні найменші квадрати	18
6.6	Робастні втрати	18
6.7	Лінійне програмування	18
6.8	Перекладацькі застереження	18
7	Кватерніони: угоди, добуток, повороти	20
7.1	Навіщо цей модуль у практичному ядрі	20
7.2	Означення і угода Гамільтона	20
7.3	Добуток кватерніонів	21
7.4	Ліва і права матриці добутку	21
7.5	Спряження, норма, обернений кватерніон	21
7.6	Одиничний кватерніон як поворот	22
7.7	Мала похибка орієнтації	22
7.8	Практичний QA-блок	22
8	ESKF для IMU-систем: номінальний стан, істинний стан і стан похибки	23
8.1	Мотивація	23
8.2	Істинний, номінальний і похибковий стани	23
8.3	Структура ESKF-циклу	24
8.4	Змінні IMU-моделі	24
8.5	Номінальна IMU-кінематика	25
8.6	Лінеаризована модель стану похибки	25
8.7	Чому гравітацію іноді включають у стан	25
8.8	Мінімальний машинний шаблон	26
9	Неперервний шум і дискретний фільтр	27
9.1	Постановка	27
9.2	Два різні типи шуму	27
9.3	Лінеаризація стану похибки	27
9.4	Дискретизована модель	28
9.5	Коваріаційне оновлення	28
9.6	Імпульсна форма \mathbf{Q}	28
9.7	Перевірки перед перекладом у код	29
10	Групи Лі для оцінювання стану: мінімальний практичний шар	30
10.1	Чому звичайне додавання не завжди правильне	30
10.2	Оператор “дах” і векторний добуток	30
10.3	$SO(3)$: група обертань	30
10.4	Ліві і праві збурення	31
10.5	$SE(3)$: пози у просторі	31
10.6	Аджойнт	31
10.7	Якобіани $SO(3)$	32
10.8	Машинна нормалізація позначень	32

11 Фільтр Калмана та ESKF: формули, які треба зберегти без пошкоджень	33
11.1 Лінійна гаусова модель	33
11.2 EKF і ESKF	33
11.3 Ін'єкція і скидання	34
11.4 Нев'язки і перевірка узгодженості	34
11.5 Перевірки коду і TeX	34
11.6 Стабільний обчислювальний шаблон	34
12 Дискретизація, частотна область та I/Q: TeX-модуль з уже українського PySDR	36
12.1 Часова і частотна області	36
12.2 Дискретизація	36
12.3 Критерій Найквіста	36
12.4 Дискретне перетворення Фур'є	37
12.5 Виконування і спектральне витікання	37
12.6 I/Q-представлення	37
12.7 Безпечна межа модуля	37
13 Джерельний старт: кватерніони, обертання і ESKF	38
13.1 Сенс статті для цього корпусу	38
13.2 Мотивація похибкового стану	38
13.3 Номінальний стан IMU-системи	39
13.4 Похибковий стан	39
13.5 Ін'єкція похибки	40
13.6 Контрольні запитання для перекладу цієї статті	40
14 Вимірювальне оновлення, ін'єкція і reset у ESKF	41
14.1 Уніфікована модель вимірювання	41
14.2 NIS як перший sanity check	41
14.3 Узагальнене оновлення для залишку на багатовиді	41
14.4 Ін'єкція не є вимірювальним оновленням	42
14.5 Розмірності як захист від помилок	42
14.6 Псевдокод оновлення	42
15 Сенсорні моделі, калібрування і часові зсуви	44
15.1 Навіщо цей розділ	44
15.2 Абстрактна модель сенсора	44
15.3 IMU: шум, зміщення, випадкове блукання	44
15.4 Вимірювання положення	44
15.5 Вимірювання швидкості	45
15.6 Візуальний напрямок або bearing-only модель	45
15.7 Калібрувальні параметри як частина стану	45
15.8 Термінологічні рішення	46
16 Байєсівська фільтрація, згладжування і факторні графи	47
16.1 Фільтрація	47
16.1.1 Прогноз	47
16.1.2 Оновлення	47
16.2 EKF як локально лінійний Байєсівський фільтр	47
16.3 Згладжування	48
16.4 Факторний граф	48
16.5 Фільтр проти згладжувача	48

16.6	Практичне правило	48
17	Керування: простір станів, PID, LQR, спостережуваність	49
17.1	Навіщо керування в цьому ядрі	49
17.2	Лінійна модель у просторі станів	49
17.3	Стійкість	49
17.4	Керованість	49
17.5	Спостережуваність	50
17.6	PID-регулятор	50
17.7	Насичення і anti-windup	50
17.8	LQR	51
17.9	Зв'язок з оцінюванням	51
18	Проектування цифрових фільтрів: FIR, IIR, вікна, перевірки	52
18.1	Роль цього розділу	52
18.2	LTI-фільтр	52
18.3	FIR-фільтр	52
18.4	IIR-фільтр	53
18.5	Віконний sinc для low-pass FIR	53
18.6	Нормована частота	53
18.7	Перевірки фільтра	53
18.8	Різниця між фільтрацією і згладжуванням	54
18.9	Комплексний базовий сигнал	54
19	Матричні похідні, найменші квадрати і перевірка Якобіанів	55
19.1	Чому це входить до першого ядра	55
19.2	Лінеаризація	55
19.3	Скалярна квадратична форма	55
19.4	Нормальні рівняння	55
19.5	Гаус-Ньютон	56
19.6	Левенберг-Марквардт	56
19.7	Скінченно-різницева перевірка Якобіана	56
19.8	Перевірка Якобіана на групі Лі	56
19.9	Ознаки неправильної похідної	57
20	SDR та RF-передній край: архітектурна математика	58
20.1	Сигнальний шлях SDR	58
20.2	Дискретизація і цифрове перетворення донизу	58
20.3	ADC/DAC як математичні обмеження	59
20.4	Вибір обчислювальної платформи як задача компромісу	59
20.5	Що перевіряти у перекладі SDR-матеріалу	59
21	Рівняння Максвелла та антенно-RF основа	61
21.1	Поля, джерела і одиниці	61
21.2	Часова форма рівнянь Максвелла	61
21.3	Часо-гармонічна форма	62
21.4	Плоска хвиля як мінімальна перевірка	62
21.5	Антенна як крайова задача, не як набір рецептів	62

22 Багатосенсорне злиття: карта понять і математичне ядро	63
22.1 Навіщо потрібне злиття	63
22.2 Координатні системи і калібрування	63
22.3 Синхронізація часу	63
22.4 Рівні злиття	64
22.5 Коваріаційне злиття як мінімальна модель	64
22.6 Data association і gating	64
22.7 Мінімальна QA-карта для sensor-fusion перекладів	65
22.8 Позиція в черзі	65
23 Хвильове рівняння, енергія, керованість і стабілізація	66
23.1 Базова задача	66
23.2 Енергія і збереження	66
23.3 Точна керованість	66
23.4 Стабілізація через демпфування	67
23.5 Спостережуваність як двоїста форма	67
23.6 Чисельні перевірки	67
23.7 Позиція в корпусі	68
24 Цифрова модуляція: практичне ядро для SDR/DSP	69
24.1 Символи, біти і спектральна ефективність	69
24.2 Baseband та passband	69
24.3 ASK, PSK, FSK, QAM	69
24.3.1 ASK	69
24.3.2 PSK	70
24.3.3 QAM	70
24.3.4 FSK	70
24.4 Сузір'я та мінімальна відстань	70
24.5 Імпульсне формування	70
24.6 Практичні перевірки для перекладача	71
25 Інформація, канали і кодування: мінімальне прикладне ядро	72
25.1 Ентропія	72
25.2 Умовна ентропія і взаємна інформація	72
25.3 Пропускна здатність каналу	72
25.4 Coding rate	73
25.5 Hard і soft decisions	73
25.6 Interleaving	73
25.7 Що віддати local TeX worker	73
26 Гаусівський байєсівський фільтр як міст до Kalman filter	74
26.1 Чому гаусіани замінюють гістограми	74
26.2 Prediction: сума гаусіанів	74
26.3 Update: добуток гаусіанів	74
26.4 Скалярний алгоритм	75
26.5 Термінологія	75
26.6 Перевірки	75
27 State-space моделі і дискретизація для фільтрів та керування	77
27.1 Неперервна модель	77
27.2 Дискретна модель	77
27.3 Constant velocity model	77
27.4 Constant acceleration input	78

27.5 Process noise covariance	78
27.6 Перевірки розмірностей	78
27.7 Що має робити local TeX worker	78
28 Хвильове рівняння: boundary та interior controllability як практичний міст	79
28.1 Граничне керування	79
28.2 HUM як операторна схема	79
28.3 Внутрішнє локалізоване керування	80
28.4 Практичні перевірки	80
29 РЧ та антени: від Максвелла до решіток і вимірюваних величин	81
29.1 Плоска хвиля і хвильовий імпеданс	81
29.2 Поляризація	81
29.3 Діаграма спрямованості, підсилення, EIRP	81
29.4 Решітки і множник решітки	82
29.5 Радарний переріз	82
29.6 Перевірки перекладу	82
30 Event-based sensor fusion та одометрія: стислий TeX-рівень	83
30.1 Стан і вимірювання	83
30.2 Time surface	83
30.3 Optimization view	83
30.4 Часова синхронізація	83
31 Робастне фільтрування, gating та outlier rejection	84
31.1 Gating	84
31.2 М-оцінювання	84
31.3 H_∞ -інтуїція	84
32 Autonomous robots: сенсори, бачення, локалізація, карти, SLAM і планування	85
32.1 Сенсори	85
32.2 Комп'ютерний зір	85
32.3 Локалізація	85
32.4 Карти і SLAM	86
32.5 Планування шляху	86
33 Zuzua 1-3: лінійна керованість хвильового рівняння	87
33.1 Мінімальна модель	87
33.2 Точна керованість як інженерна структура	87
33.3 HUM: головний шаблон	87
33.4 Гранична проти внутрішньої керованості	88
33.5 Що перекладати далі	88
34 Антени, Максвелл, поляризація, масиви	89
34.1 Рівняння Максвелла і гармонічний режим	89
34.2 Поляризація	89
34.3 Взаємність і дуальність	89
34.4 Масиви і ваги Чебишова	90
34.5 Що перевіряти в перекладі	90

35 Два огляди сенсорного злиття: embodied AI і event odometry	91
35.1 Fusion taxonomy	91
35.2 Калібрування і синхронізація	91
35.3 Подієві камери	91
35.4 Практичний міст до ESKF і factor graphs	92
36 Roth et al.: робастне фільтрування зі Student's t-розподілом	93
36.1 Гаусівський update і проблема outlier	93
36.2 Student's t як heavy-tailed модель	93
36.3 Зв'язок з gating	93
36.4 Стан прикладу валідації	94
37 Correll: автономні роботи як навчальний perception-navigation stack	95
37.1 Мінімальна архітектура	95
37.2 Локалізація як Bayes update	95
37.3 SLAM як одночасна оцінка стану і карти	95
37.4 Планування шляхів	96
37.5 Що local TeX worker/local organizer мають робити далі	96
38 PySDR Ukrainian RST-to-TeX: практичне SDR/DSP ядро	97
38.1 SDR, DSP та комплексна базова смуга	97
38.2 Дискретизація	97
38.3 Частотна область і DFT	98
38.4 Фільтри	98
38.5 Шум, SNR і децибели	98
38.6 Модуляція, символи, імпульсне формування	99
38.7 IQ-файли і SigMF	99
38.8 Висновок для pipeline	99
39 GNSS-denied navigation: VIO, SLAM і бортова оцінка стану	100
40 Event-based sensor fusion і odometry: що треба довести до кінця	102
41 FHSS, SDR і multi-agent resilience: математична доріжка	104
42 Хвильове рівняння: завершення глав 1-3 і що йде після	106
43 Поточний research radar 2025-2026: що тягнути з arXiv наступним	108
A Початковий словник термінів	109
B Додаток до словника: SDR/RF, fusion, хвильове керування	111
C Термінологічні додатки: модуляція, кодування, фільтрація	112
D Додатки до термінології: робототехніка, fusion, робастна фільтрація	113
E Термінологічні додатки: source-модулі і локальні чернетки	114
F Термінологічні додатки: GNSS-denied, VIO/SLAM, FHSS/SDR	115

Частина I

Signals, State Estimation, Control, and Numerical Methods

1. Сигнали, дискретизація і спектр

1.1. Мета розділу

Цей розділ є коротким TeX-ядром для лінії DSP/SDR. Повну практичну лінію PySDR у корпусі вже знайдено українською у каталозі content-ukraine. Тому тут не дублюється повний переклад. Натомість фіксуються формули, позначення і терміни, які мають залишатися однаковими в усіх наступних перекладах.

Джерело / статус. У відсортovanому корпусі PySDR містить готовий український переклад RST-розділів: frequency domain, sampling, filters, IQ files, noise, channel coding та інші. У цьому пакеті вибрані українські RST-файли скопійовано окремо як вже існуюче джерело, а не як нову роботу перекладу.

1.2. Неперервний і дискретний сигнал

Неперервний сигнал позначатимемо як $x(t)$, де $t \in \mathbb{R}$ - час. Дискретний сигнал, отриманий вибіркою з періодом T_s , позначатимемо

$$x[n] = x(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Частота дискретизації дорівнює

$$f_s = \frac{1}{T_s}. \quad (1.2)$$

Усі одиниці потрібно тримати явно: t у секундах, f у герцах, кутова частота $\omega = 2\pi f$ у радіанах за секунду.

Якщо сигнал має обмежену смугу частот і найбільша істотна частота дорівнює f_{\max} , базова умова Найквіста записується як

$$f_s \geq 2f_{\max}. \quad (1.3)$$

Якщо умову порушено, високочастотні компоненти згортаються в нижчі частоти. Це явище називається *аліасингом*. У перекладах варто зберігати англійський термін у дужках при першій появі: аліасинг (aliasing).

1.3. Згортка і лінійна інваріантна система

Дискретна лінійна інваріантна в часі система описується імпульсною характеристикою $h[n]$. Вихід $y[n]$ дорівнює згортці

$$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k]. \quad (1.4)$$

Для скінченного FIR-фільтра порядку M це стає

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]. \quad (1.5)$$

Для IIR-фільтра додається рекурсивна частина:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] - \sum_{r=1}^N a_r y[n - r]. \quad (1.6)$$

Під час перекладу не можна втрачати знаки мінус у рекурсивній частині: різні автори можуть переносити її на інший бік рівняння, але в межах одного тексту треба зберігати конвенцію автора.

1.4. DTFT, DFT і FFT

Дискретно-часове перетворення Фур'є (DTFT) визначається формулою

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (1.7)$$

де ω - нормалізована кутова частота в радіанах на відлік.

Для скінченного масиву $x[0], \dots, x[N-1]$ використовується дискретне перетворення Фур'є:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (1.8)$$

Обернене перетворення:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}. \quad (1.9)$$

FFT - це не інше математичне перетворення, а швидкий алгоритм для обчислення DFT. У текстах краще перекладати як *швидке перетворення Фур'є*, але абревіатуру FFT залишати.

1.5. Вікна і спектральне витікання

Коли ми беремо скінченний фрагмент сигналу, ми фактично множимо нескінченний сигнал на віконну функцію $w[n]$. Спектр добутку у часі відповідає згортці спектрів у частотній області. Через це виникає *спектральне витікання* (spectral leakage).

Віконований сигнал:

$$x_w[n] = w[n]x[n], \quad 0 \leq n < N. \quad (1.10)$$

Типові вікна: прямокутне, Ганна (Hann), Геммінга (Hamming), Блекмана (Blackman). У технічному перекладі краще не змішувати Hann і Hamming: це різні вікна.

1.6. Комплексна база смуги та IQ-представлення

Для багатьох задач зручно представляти сигнал комплексним числом

$$z[n] = I[n] + jQ[n], \quad (1.11)$$

де I - синфазна компонента, а Q - квадратурна компонента. Амплітуда і фаза:

$$A[n] = |z[n]| = \sqrt{I[n]^2 + Q[n]^2}, \quad \phi[n] = \arg z[n] = \text{atan2}(Q[n], I[n]). \quad (1.12)$$

Комплексне множення на $e^{j\omega_0 n}$ зсуває спектр:

$$y[n] = x[n]e^{j\omega_0 n}. \quad (1.13)$$

Це базова операція змішування у цифровій обробці сигналів. У навчальному тексті її треба пояснювати як геометричне обертання комплексної площини і як частотний зсув.

1.7. Мінімальний набір перевірок для перекладу DSP

Після перекладу розділу з DSP або SDR локальний агент має перевірити:

1. Чи збережено знак експоненти у формулах DFT/IDFT.
2. Чи не переплутано частоту f , кутову частоту ω і нормалізовану частоту.
3. Чи послідовно вжито j як уявну одиницю в інженерних текстах. У математичних текстах може бути i , але в SDR/DSP зазвичай j .
4. Чи не перекладено `sample` як «зразок» там, де йдеться про відлік сигналу. Бажано: «відлік», «семпл» лише в програмістському контексті.
5. Чи не перекладено `window` як побутове «вікно» без технічного контексту. Потрібно: «віконна функція» або «вікно» після першого пояснення.

2. Оцінювання стану і фільтр Калмана

2.1. Перекладений фрагмент: постановка задачі оцінювання стану

Джерело / статус. Цей підрозділ є стислим українським перекладом і нормалізацією початку розділу “Preliminaries” з arXiv:2411.03951, *Continuous-Time State Estimation Methods in Robotics: A Survey*. Формули і позначення збережено, але текст ущільнено для першого TeX-ядра.

Оцінювання стану має на меті обчислювально здійснено оцінити розподіл імовірності скінченного набору неперервних випадкових змінних, які параметризують систему, що нас цікавить. У робототехніці такі змінні можуть належати як лінійним векторним просторам, так і многовидам. Теорія Лі є корисною рамкою для точного опрацювання таких змінних: наприклад, групи $SO(n)$ та $SE(n)$ використовують для подання орієнтацій і поз у n -вимірному просторі. Оскільки групи Лі є гладкими диференційовними многовидами, вони мають дотичні простори, тобто векторні простори, зручні для операцій лінійної алгебри під час оптимізації.

2.1.1. Стан

Неперервно змінний процес задається двома компонентами. Перша - часовий стан $x(t)$, де t - часова змінна. Наприклад, $x(t)$ може бути позою системи в $SE(3)$. Друга - незмінний у часі контекст, тобто набір параметрів θ , наприклад параметри калібрування сенсорів або параметри карти.

Не задаючи поки повного зв'язку з траєкторією $x(t)$, визначимо скінченний набір змінних

$$x = (x_0, \dots, x_N), \quad (2.1)$$

який описує процес. Змінні, що оцінюються, збираємо у множину

$$\Theta = \{x, \theta\}. \quad (2.2)$$

Оцінити їх можна, поєднавши вимірювання і попереднє знання.

2.1.2. Вимірювання

Модель вимірювання описує, як спостереження \tilde{z} породжується одним або кількома сенсорами. Функція вимірювання

$$z = h(x, \theta, n) \quad (2.3)$$

задає вимірювану величину як функцію стану, параметрів і шуму n . У типовій першій моделі шум вважають гаусовим і незалежним між вимірюваннями.

Щоб отримати векторну нев'язку, визначають функцію нев'язки

$$e = g(z, \tilde{z}). \quad (2.4)$$

У простому евклідовому випадку це віднімання. Для змінних на групах Лі використовують узагальнений оператор \ominus .

2.1.3. Априорні моделі

Априорна модель фіксує припущення про систему до включення вимірювань. Вона може бути записана у тій самій формі, що й модель вимірювання, але \tilde{z} не спостерігається, а задається наперед. На практиці часто потрібне априорне знання про початкові умови, наприклад позу і швидкість, щоб розв'язок був єдиним.

2.1.4. Процесна модель

Процесна модель, або модель динаміки системи, описує еволюцію стану в часі. Якщо процес марковський, його можна подати через поточний стан $x(t)$, вхід $u(t)$, нульовий за середнім шум процесу $w(t)$ та контекст θ :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \theta, u(t), w(t)). \quad (2.5)$$

Після лінеаризації навколо поточної оцінки часто отримують

$$\dot{x}(t) \approx \mathbf{F}(t)x(t) + v(t) + \mathbf{L}(t)w(t), \quad (2.6)$$

де

$$v(t) := f(\bar{x}(t), u(t), 0) - \mathbf{F}(t)\bar{x}(t), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}(t), u(t), 0}, \quad \mathbf{L}(t) := \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{\bar{x}(t), u(t), 0}. \quad (2.8)$$

2.2. Лінійний фільтр Калмана

Нехай дискретна система має вигляд

$$x_k = \mathbf{F}_k x_{k-1} + \mathbf{B}_k u_k + w_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k), \quad (2.9)$$

$$z_k = \mathbf{H}_k x_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k). \quad (2.10)$$

Тут x_k - стан, u_k - вхід, z_k - вимірювання, \mathbf{Q}_k - коваріація шуму процесу, \mathbf{R}_k - коваріація шуму вимірювання.

2.2.1. Прогноз

$$\hat{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k u_k, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{Q}_k. \quad (2.12)$$

2.2.2. Оновлення

Інновація:

$$y_k = z_k - \mathbf{H}_k \hat{x}_{k|k-1}. \quad (2.13)$$

Коваріація інновації:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k. \quad (2.14)$$

Підсилення Калмана:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}. \quad (2.15)$$

Оцінка стану:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k y_k. \quad (2.16)$$

Коваріація. Для чисельної надійності бажано використовувати форму Джозефа:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top. \quad (2.17)$$

2.3. EKF: мінімальна нелінійна форма

Для нелінійних моделей

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2.19)$$

використовують якобіани

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}. \quad (2.20)$$

Усі формули прогнозу й оновлення залишаються структурно тими самими, але \mathbf{f} і \mathbf{h} обчислюються нелінійно, а коваріації поширюються через лінеаризацію.

2.4. Практичні перевірки для перекладу

1. state у цьому контексті - «стан», не «державка» і не «статус».
2. estimate як іменник - «оцінка», як дієслово - «оцінювати».
3. covariance - «коваріація»; covariance matrix - «матриця коваріації».
4. innovation у фільтрі Калмана - «інновація» або «нев'язка вимірювання»; потрібно вибрати одне слово в конкретному тексті.
5. process noise - «шум процесу», measurement noise - «шум вимірювання».
6. prior - «апостеріорний», posterior - «априорний».
7. У формулах $k|k-1$ не замінювати вертикальну риску на дріб або ділення.

3. Кватерніони, обертання і ESKF

3.1. Перекладений фрагмент: мета джерела про кватерніони

Джерело / статус. Цей підрозділ перекладає і стисло нормалізує анотацію з arXiv:1711.02508, Joan Solà, *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*. Джерело є першим пріоритетом для лінії кватерніони/ESKF, бо воно дає компактну TeX-основу для інерційної геометрії та оцінювання стану.

Стаття є вичерпним переглядом понять і формул, пов'язаних із кватерніонами та обертаннями у тривимірному просторі, а також їхнім правильним використанням у рушіях оцінювання, зокрема у фільтрі Калмана зі станом похибки (error-state Kalman filter, ESKF).

У роботі докладно розглянуто групу обертань та її структуру Лі, причому формулювання подано як через кватерніони, так і через матриці обертання. Особливу увагу приділено означенню збурень обертання, похідних та інтегралів. Геометричні інтерпретації потрібні для того, щоб читач не лише маніпулював формулами, а й розумів внутрішню механіку тривимірного обертання.

Увесь матеріал використовується для точного формулювання ESKF, придатного для реальних застосувань, де інтегруються сигнали з інерційного вимірювального блока (IMU).

3.2. Системи координат і обертання

Обертання в тривимірному просторі можна подавати матрицею $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$, де

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1\}. \quad (3.1)$$

Якщо p_B - координати вектора в системі координат B , а p_A - координати того самого геометричного вектора в системі A , то одна з поширених конвенцій записується як

$$p_A = \mathbf{R}_{AB} p_B. \quad (3.2)$$

Тут \mathbf{R}_{AB} переводить координати з B у A . У перекладах треба явно фіксувати конвенцію, бо різні автори використовують різні індекси.

3.3. Кватерніон

Одиничний кватерніон подамо як

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{q}\| = 1. \quad (3.3)$$

Скалярна частина - q_w , векторна частина - $\mathbf{q}_v = (q_x, q_y, q_z)^T$. Кватерніони \mathbf{q} і $-\mathbf{q}$ задають те саме обертання, тому в чисельних алгоритмах треба стежити за неперервністю знака.

Добуток кватерніонів $p \otimes q$:

$$\begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w q_w - \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_v \\ p_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Спряжений кватерніон:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Для одиничного кватерніона обернений кватерніон дорівнює спряженому: $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$.

3.4. Вектор обертання і експонента

Малий вектор обертання $\delta\theta \in \mathbb{R}^3$ можна перетворити на кватерніон через експоненціальне відображення. Нехай

$$\theta = \|\delta\theta\|. \quad (3.6)$$

Тоді

$$\text{Exp}(\delta\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \frac{\delta\theta}{\theta} \sin(\theta/2) \end{bmatrix}, \quad \theta \neq 0. \quad (3.7)$$

Для малих θ потрібно використовувати стабільні розклади, наприклад

$$\sin(\theta/2)/\theta \approx \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{48} + O(\theta^4). \quad (3.8)$$

3.5. Стан похибки

У ESKF розрізняють номінальний стан і малий стан похибки. Типова структура номінального стану:

$$\mathbf{x} = \{p, v, q, b_a, b_\omega\}, \quad (3.9)$$

де p - положення, v - швидкість, q - орієнтація, b_a - зміщення акселерометра, b_ω - зміщення гіроскопа.

Стан похибки записують у мінімальних координатах:

$$\delta\mathbf{x} = \{\delta p, \delta v, \delta\theta, \delta b_a, \delta b_\omega\}. \quad (3.10)$$

Ключова ідея: орієнтацію не оновлюють додаванням чотиривимірному кватерніона. Натомість додають тривимірне мале збурення через групову операцію, наприклад

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{q} \otimes \text{Exp}(\delta\theta). \quad (3.11)$$

Після ін'єкції похибки $\delta\theta$ у номінальний стан кватерніон нормалізують, а відповідну частину стану похибки скидають до нуля.

3.6. Чому це важливо для перекладу

Тексти про кватерніони часто ламаються не через складність української, а через невидимі конвенції. Тому при перекладі потрібно зберігати:

1. порядок компонент кватерніона: scalar-first чи scalar-last;

2. порядок множення: $p \otimes q$ не комутативний;
3. активне чи пасивне трактування обертання;
4. ліве чи праве збурення: $\text{Exp}(\delta\theta) \otimes q$ або $q \otimes \text{Exp}(\delta\theta)$;
5. різницю між кутовою швидкістю, малим кутом, похибкою орієнтації і вектором обертання.

У термінах: *attitude* у навігації зазвичай перекладати як «орієнтація», а не «ставлення»; *bias* - «зміщення» або «систематична похибка» залежно від контексту; *error-state* - «стан похибки».

4. Мікротеорія Лі для оцінювання стану

4.1. Перекладений фрагмент: вступ до мікротеорії Лі

Джерело / статус. Цей підрозділ є стислим українським перекладом першої частини вступу з arXiv:1812.01537, Joan Solà, Jeremie Deray, Dinesh Atchuthan, *A micro Lie theory for state estimation in robotics*. Мету збережено: дати інженеру достатньо теорії Лі для похідних, збурень і коваріацій у задачах оцінювання стану.

В останні роки в робототехнічній спільноті було докладено значних зусиль, щоб коректно формулювати задачі оцінювання. Це мотивовано дедалі більшою потребою в точності, узгодженості та стійкості розв'язків. Належне моделювання станів, вимірювань, функцій, що їх пов'язують, а також невизначеностей є критичним для досягнення цих цілей.

Це привело до конструкцій, у яких використовують так звані многовиди. У цьому контексті многовиди - це гладкі топологічні поверхні груп Лі, на яких еволюціонують подання стану. Спираючись на теорію Лі, можна побудувати строгий апарат для роботи з невизначеністю, похідними та інтегралами. Найчастіше в робототехніці з'являються групи обертання $SO(3)$ та жорсткого руху $SE(3)$.

Коли читач уперше знайомиться з групами Лі, важливо дивитися на них з кількох точок зору. Топологічна точка зору дає уявлення про форму многовиду і його зв'язок з дотичним простором та експоненціальним відображенням. Алгебраїчна точка зору розглядає групові операції та їхню конкретну реалізацію. Геометрична точка зору, особливо корисна в робототехніці, пов'язує елементи групи з положенням, швидкістю, орієнтацією або іншими перетвореннями тіл і систем координат.

Головне спрощення мікротеорії Лі полягає в обмеженні обсягу. Для багатьох прикладних задач не потрібно розвивати всю абстрактну теорію. Достатньо навчитися послідовно переходити між групою, де живе стан, і дотичним векторним простором, де зручно представляти малі прирости, невизначеність і похідні.

4.2. Група, дотичний простір і локальні координати

Нехай \mathcal{M} - многовид групи Лі, а \mathcal{E} - одиничний елемент групи. Дотичний простір в одиниці позначатимемо $T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$. У прикладних формулах його ототожнюють з \mathbb{R}^n .

Експоненціальне відображення переводить малий вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$ у елемент групи:

$$\mathcal{X} = \text{Exp}(\tau). \quad (4.1)$$

Логарифмічне відображення робить зворотне:

$$\tau = \text{Log}(\mathcal{X}). \quad (4.2)$$

Ці відображення локальні: поблизу одиниці вони поведуться добре, але на великих кутах або складних траєкторіях треба стежити за неоднозначністю.

4.3. Операції \oplus і \ominus

Для змінних у евклідовому просторі можна писати $x + \delta x$. Для змінних на групі Лі краще використовувати оператори

$$\mathcal{X} \oplus \tau := \mathcal{X} \text{Exp}(\tau), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{Y} \ominus \mathcal{X} := \text{Log}(\mathcal{X}^{-1}\mathcal{Y}). \quad (4.4)$$

Це праве збурення. Для лівого збурення формули будуть іншими:

$$\tau \oplus \mathcal{X} := \text{Exp}(\tau)\mathcal{X}. \quad (4.5)$$

У перекладах треба не згладжувати цю різницю словами. Ліве і праве збурення впливають на якобіани і на поширення коваріації.

4.4. Оператор $\hat{\cdot}$ і \vee

Для $\text{SO}(3)$ вектор $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ відповідає кососиметричній матриці

$$\omega^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Обернений оператор позначають \vee :

$$(\omega^\wedge)^\vee = \omega. \quad (4.7)$$

У TeX-перекладах бажано зберігати позначення \wedge і \vee , а в тексті писати: «оператор $\hat{\cdot}$ » та «оператор \vee » або «клин» і « \vee » після пояснення. Для інженерної аудиторії англійські назви часто зрозуміліші.

4.5. Adjoint і перенесення збурень

Спряжена дія, або adjoint , переносить дотичні вектори між локальними координатами. Для елемента \mathcal{X} групи Лі

$$\text{Ad}_{\mathcal{X}} \tau \quad (4.8)$$

позначає відповідне перетворення дотичного вектора. У групі $\text{SE}(3)$, якщо

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

одна поширена форма adjoint -матриці така:

$$\text{Ad}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & t^\wedge \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

за умови конкретного порядку координат $\tau = (\rho, \phi)$. Якщо автор використовує порядок (ϕ, ρ) , матриця змінюється. Це потрібно перевіряти при кожному джерелі.

4.6. Чому групи Лі потрібні для фільтрів і оптимізації

У задачах оцінювання стану ми часто мінімізуємо суму квадратів нев'язок

$$J(\Theta) = \frac{1}{2} \sum_i e_i(\Theta)^T \mathbf{W}_i e_i(\Theta). \quad (4.11)$$

Якщо частина змінних лежить на многовиді, пряме додавання приросту до параметрів може бути неправильним. Замість цього приріст δx живе у дотичному просторі, а оновлення стану виконується через \oplus :

$$\Theta^+ = \Theta \oplus \delta\Theta. \quad (4.12)$$

Тому якобіан треба трактувати як похідну нев'язки за локальними координатами збурення:

$$\mathbf{J}_i = \left. \frac{\partial e_i(\Theta \oplus \delta\Theta)}{\partial \delta\Theta} \right|_{\delta\Theta=0}. \quad (4.13)$$

Саме ця формула є мостом між абстрактною геометрією та практичною оптимізацією.

4.7. Перекладацькі застереження

1. manifold - «многовид», не «колектор».
2. tangent space - «дотичний простір».
3. retraction - «ретракція»; якщо автор фактично має на увазі експоненту, не замінювати одне іншим.
4. pose - «поза» або «просторова поза»; у технічному тексті це положення плюс орієнтація.
5. rigid motion - «жорсткий рух» або «тверде переміщення»; у межах одного документа вибрати один варіант.
6. SO(3) і SE(3) не перекладати, але пояснювати при першій появі.

5. Чисельне моделювання: скінченні різниці і хвильові моделі

5.1. Навіщо цей розділ у ядрі

Чисельні методи потрібні не як абстрактний курс, а як мова перевірки моделей. Якщо модель записано як диференціальне рівняння, її треба дискретизувати, перевірити стійкість, оцінити похибку і зрозуміти, які параметри справді вимірювані. У поточному корпусі є великі відкриті джерела FDM/FEM і TeX-джерело про керованість хвильового рівняння; перша хвиля має перекладати не все підряд, а базові розділи, які дають інженерний інструментарій.

5.2. Сітка і різницеві оператори

Нехай $u(x, t)$ - невідома функція. Введемо сітку

$$x_i = i\Delta x, \quad t^n = n\Delta t, \quad u_i^n \approx u(x_i, t^n). \quad (5.1)$$

Перша похідна вперед:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}. \quad (5.2)$$

Перша похідна назад:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (5.3)$$

Центральна різниця:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (5.4)$$

Друга похідна:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (5.5)$$

5.3. Теплопровідність як тест стійкості

Одновимірне рівняння теплопровідності:

$$u_t = \alpha u_{xx}. \quad (5.6)$$

Явна схема Ейлера:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (5.7)$$

Для класичної явної схеми потрібна умова стійкості

$$r \leq \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Перекладацьке правило: *stability condition* - «умова стійкості», *time step restriction* - «обмеження на крок часу».

5.4. Хвильове рівняння

Одновимірне хвильове рівняння:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (5.9)$$

Стандартна явна центральна схема:

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} + \lambda^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}. \quad (5.10)$$

Число λ часто називають числом Куранта. Для базової схеми в одному вимірі типова умова CFL:

$$\lambda \leq 1. \quad (5.11)$$

5.5. Енергія і перевірка розрахунку

Для багатьох хвильових задач корисно відстежувати дискретний аналог енергії. Якщо система без втрат, енергія має приблизно зберігатися. Якщо модель містить демпфування, енергія має спадати. Це простий спосіб виявити помилки знаків, переплутані індекси або надто великий крок часу.

Приклад дискретного тесту:

$$E^n = \sum_i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right)^2 \right] \Delta x. \quad (5.12)$$

У перекладі `energy estimate` - це «енергетична оцінка», а не «оцінка енергії» у побутовому сенсі.

5.6. Похибка, збіжність, верифікація

Схема має порядок точності p за простором, якщо при зменшенні Δx похибка спадає як

$$\|u - u_{\Delta x}\| \approx C(\Delta x)^p. \quad (5.13)$$

Практична перевірка на сітках Δx , $\Delta x/2$, $\Delta x/4$:

$$p \approx \log_2 \frac{\|u_{\Delta x} - u_{\Delta x/2}\|}{\|u_{\Delta x/2} - u_{\Delta x/4}\|}. \quad (5.14)$$

Цей тест корисний для перекладених чисельних текстів: якщо формула перенесена неправильно, очікуваний порядок збіжності часто зникає.

5.7. Черга перекладу для чисельних методів

Першими перекладати:

1. базові розділи про скінченні різниці, сітки, граничні умови, стійкість;
2. явні й неявні схеми для теплопровідності та хвильового рівняння;
3. вступ до варіаційних форм і FEM лише після FDM-основи;

4. обчислювальну перевірку: manufactured solutions, convergence tests, residual checks.

Пізніше перекладати повну теорію керованості хвильового рівняння. Вона важлива для контрольної лінії, але як перший практичний текст поступається фільтрам, сигналам і чисельній базі.

6. Оптимізація і найменші квадрати

6.1. Чому оптимізація входить у перше ядро

Оцінювання стану, калібрування, наближення моделей, обробка сигналів і чисельне моделювання майже завжди зводяться до оптимізації. Тому базова мова оптимізації потрібна до масового перекладу спеціалізованих текстів.

6.2. Найменші квадрати

Нехай потрібно знайти параметр $x \in \mathbb{R}^n$, який найкраще пояснює вимірювання. Для лінійної моделі

$$b \approx Ax \quad (6.1)$$

задача найменших квадратів має вигляд

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2. \quad (6.2)$$

Нормальні рівняння:

$$A^T Ax = A^T b. \quad (6.3)$$

У чисельних текстах треба наголошувати: нормальні рівняння прості для виведення, але не завжди найстійкіші для обчислення. QR-розклад або SVD часто кращі.

6.3. Зважені найменші квадрати

Якщо нев'язка $e = Ax - b$ має коваріацію Σ , природна задача:

$$\min_x \frac{1}{2} e^T \Sigma^{-1} e. \quad (6.4)$$

Матриця $W = \Sigma^{-1}$ називається інформаційною матрицею або матрицею ваг. У перекладах *information matrix* краще передавати як «інформаційна матриця», а не «матриця інформації».

6.4. Регуляризація

Коли задача погано обумовлена або даних недостатньо, додають регуляризацію:

$$\min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|L(x - x_0)\|_2^2. \quad (6.5)$$

Тут $\lambda > 0$ - параметр регуляризації, L - матриця, що задає, які компоненти або похідні штрафуються, x_0 - апіорна оцінка.

У байєсівській інтерпретації регуляризація відповідає апіорному розподілу. Це важливо для узгодження з розділами про фільтр Калмана: фільтр Калмана, *batch least squares* і фактор-графи є різними формами тієї самої статистичної логіки.

6.5. Нелінійні найменші квадрати

Для нелінійних нев'язок $e_i(x)$ задача має вигляд

$$\min_x J(x), \quad J(x) = \frac{1}{2} \sum_i \|e_i(x)\|_{\mathbf{w}_i}^2, \quad (6.6)$$

де

$$\|e\|_{\mathbf{w}}^2 = e^T \mathbf{W} e. \quad (6.7)$$

Лінеаризація поблизу поточної оцінки x :

$$e_i(x + \delta x) \approx e_i(x) + \mathbf{J}_i \delta x. \quad (6.8)$$

Нормальні рівняння для приросту:

$$\left(\sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{w}_i \mathbf{J}_i \right) \delta x = - \sum_i \mathbf{J}_i^T \mathbf{w}_i e_i. \quad (6.9)$$

Це основа методу Гауса-Ньютона. Для задач на многовидах приріст δx додається не звичайним додаванням, а через \oplus .

6.6. Робастні втрати

Квадратична втрата сильно реагує на викиди. Робастна задача замінює $s = \|e\|^2$ на функцію $\rho(s)$:

$$\min_x \sum_i \rho(\|e_i(x)\|_{\mathbf{w}_i}^2). \quad (6.10)$$

Типові функції: Huber, Cauchy, Tukey. Перекладати outlier як «викид», robust loss як «робастна функція втрат» або «стійка функція втрат»; у технічному корпусі бажано обрати один варіант. У цьому пакеті використано «робастна».

6.7. Лінійне програмування

Задача лінійного програмування:

$$\min_x c^T x \quad \text{за умов} \quad \mathbf{A}x \leq b, \quad \mathbf{E}x = d. \quad (6.11)$$

Це базова форма для ресурсних, потокових, виробничих і логістичних задач. Для публічної бібліотеки прикладної математики лінійне програмування важливе тим, що воно відразу придатне для цивільної інженерії, енергетики, ремонту, планування і навчання.

6.8. Перекладацькі застереження

1. objective function - «цільова функція».
2. constraint - «обмеження».
3. residual - «нев'язка».
4. loss - «втрата» або «функція втрат»; не «збиток» у математичному контексті.

- 5. `conditioning` - «обумовленість»; `ill-conditioned` - «погано обумовлена».
- 6. `sparse` - «розріджений» для матриць і графів.

7. Кватерніони: угоди, добуток, повороти

Джерело / статус. Джерело для цього модуля: Joan Solà, *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*, arXiv:1711.02508, файли `Abstract.tex` і `Quaternion.tex`. Тут подано українську TeX-версію ядра: угоди, основні операції, матричні форми та практичні попередження для ESKF.

7.1. Навіщо цей модуль у практичному ядрі

Кватерніони потрібні не як абстрактна алгебра, а як робочий спосіб представляти орієнтацію твердого тіла в просторі без сингулярностей, властивих ейлеровим кутам. У задачах оцінювання стану особливо важливо не переплутати три різні речі:

1. власне орієнтацію, тобто елемент групи обертань;
2. параметризацію цієї орієнтації, наприклад одиничним кватерніоном;
3. малу похибку орієнтації, яку фільтр Калмана може лінеаризувати в дотичному просторі.

У ESKF велика нелінійна частина руху інтегрується у номінальному стані, а мала похибка живе в мінімальному тривимірному просторі. Саме тому в одному документі треба тримати і кватерніони, і групи Лі, і фільтр стану похибки.

7.2. Означення і угода Гамільтона

Нехай маємо чотири дійсні числа $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ і три уявні одиниці i, j, k . Кватерніон записується як

$$Q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}. \quad (7.1)$$

У цьому пакеті використовується гамільтонова угода

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (7.2a)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \quad (7.2b)$$

Це не декоративна деталь. Якщо джерело використовує іншу угоду, наприклад ставить скалярну частину останньою або міняє знак добутку ij , формули для матриць добутку, похідних і якобіанів змінюються. Для машинного перекладу це треба позначати явно.

Кватерніон можна розбити на скалярну та векторну частини:

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k = q_w + \mathbf{q}_v \iff \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Чистий кватерніон має нульову скалярну частину:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow [0, \mathbf{v}] \in \mathbb{H}. \quad (7.4)$$

7.3. Добуток кватерніонів

Для $p = (p_w, p_v)$ і $q = (q_w, q_v)$ гамільтонів добуток має вигляд

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_v^T q_v \\ p_w q_v + q_w p_v + p_v \times q_v \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

Через наявність векторного добутку загалом

$$p \otimes q \neq q \otimes p. \quad (7.6)$$

Добуток асоціативний, але не комутативний. У перекладі та коді це означає: не можна “переставити” множники заради стилю або компактності.

У координатах формула (7.5) еквівалентна

$$p \otimes q = \begin{bmatrix} p_w q_w - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z \\ p_w q_x + p_x q_w + p_y q_z - p_z q_y \\ p_w q_y - p_x q_z + p_y q_w + p_z q_x \\ p_w q_z + p_x q_y - p_y q_x + p_z q_w \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

7.4. Ліва і права матриці добутку

Добуток можна записати як матричне множення двома рівносильними способами:

$$q_1 \otimes q_2 = \mathbf{Q}_L(q_1)q_2 = \mathbf{Q}_R(q_2)q_1. \quad (7.8)$$

Для гамільтонової угоди

$$\mathbf{Q}_L(q) = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_R(q) = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Ці дві матриці часто є місцем помилок у перекладі. Якщо в джерелі формула відрізняється знаком, спочатку перевіряється угода: Hamilton/JPL, scalar-first/scalar-last, активний чи пасивний поворот.

7.5. Спряження, норма, обернений кватерніон

Спряжений кватерніон

$$q^* = \begin{bmatrix} q_w \\ -q_v \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

дає норму

$$\|q\|^2 = q \otimes q^* = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2. \quad (7.11)$$

Якщо $\|q\| = 1$, то

$$q^{-1} = q^*. \quad (7.12)$$

У чисельній інтеграції орієнтації одиничність треба підтримувати нормалізацією або стабільною експоненціальною інтеграцією. Інакше матриця повороту, отримана з кватерніона, поступово перестає бути ортогональною.

7.6. Одиничний кватерніон як поворот

Поворот на кут θ навколо одиничної осі u задається кватерніоном

$$q = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ u \sin(\theta/2) \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Вектор $v \in \mathbb{R}^3$ обертається через подвійний добуток

$$[0, v'] = q \otimes [0, v] \otimes q^*. \quad (7.14)$$

У цій формулі закладено активне обертання вектора. Якщо джерело описує пасивне перетворення координат між системами відліку, порядок або спряження можуть бути іншими. Перекладач не повинен “виправляти” це без нотатки.

7.7. Мала похибка орієнтації

У фільтрах стану похибки мала тривимірна похибка $\delta\theta \in \mathbb{R}^3$ перетворюється на малий кватерніон

$$\delta q = \begin{bmatrix} \cos(\|\delta\theta\|/2) \\ \frac{\delta\theta}{\|\delta\theta\|} \sin(\|\delta\theta\|/2) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

Наближення праворуч корисне лише для лінеаризації та яacobіанів. Для накопичення реальної орієнтації краще використовувати експоненту або нормалізований кватерніон.

7.8. Практичний QA-блок

Перед тим як пакетний переклад вважати прийнятним, для кожного фрагмента з кватерніонами треба перевірити:

1. Чи явно вказано, яка угода використовується: Hamilton або інша.
2. Чи не змінився порядок добутку $q_1 \otimes q_2$.
3. Чи не втрачено спряження q^* у формулах повороту.
4. Чи не перекладено *attitude* як “ставлення” замість “орієнтація”.
5. Чи не переплутано “error-state” зі звичайним “state”.
6. Чи не замінено малу тривимірну похибку $\delta\theta$ на чотирирівимірний кватерніон у коваріаційній матриці.

8. ESKF для IMU-систем: номінальний стан, істинний стан і стан похибки

Джерело / статус. Джерело для цього модуля: Joan Solà, arXiv:1711.02508, файл `ErrorState.tex`. Тут перекладено і нормалізовано практичне ядро: мотивацію ESKF, розділення істинного/номінального/похибкового стану, IMU-кінематику та таблицю змінних.

8.1. Мотивація

Потрібно записати рівняння стану похибки для інерціальної системи, яка інтегрує покази акселерометра і гірометра зі зміщенням та шумом. Орієнтація в просторі подається гамільтоновим одиничним кватерніоном. Типове джерело таких даних - IMU, тобто інерціальний вимірювальний блок.

Інтегрування IMU дає *dead-reckoning*, тобто позиціювання за власним рухом. Воно неминуче дрейфує з часом. Зменшення дрейфу досягається не магією, а злиттям інерціальних даних з іншими вимірюваннями: абсолютною позицією, візуальними ознаками, висотою, швидкістю, маяками або іншими сенсорними джерелами. Математично це саме задача оцінювання стану з невизначеністю.

Фільтр Калмана зі станом похибки (ESKF) корисний з кількох причин:

1. Похибка орієнтації мінімальна: вона має три параметри, як і три ступені вільності обертання. Це уникає надмірної параметризації та сингулярностей у коваріаціях.
2. Стан похибки працює близько до нуля. Тому лінеаризація має сенс протягом роботи фільтра.
3. Похибка мала, тому добутки другого порядку часто можна відкидати. Це спрощує якобіани.
4. Великосигнальна динаміка інтегрується в номінальному стані, а не в лінійному фільтрі. Через це похибка змінюється повільніше, і корекції можна робити з нижчою частотою, ніж IMU-прогноз.

8.2. Істинний, номінальний і похибковий стани

У формулюваннях ESKF розрізняють три величини:

істинний стан x_t , фізичний стан системи;

номінальний стан x , нелінійно інтегрована оцінка великого сигналу;

стан похибки δx , малий сигнал, який оцінюється лінійно-гаусовим фільтром.

Зв'язок записують як композицію

$$x_t = x \oplus \delta x. \quad (8.1)$$

Для векторних компонент це звичайна сума. Для орієнтації це добуток кватерніонів або матриць повороту. Саме тут помилки в угодах найчастіше ламають увесь фільтр.

8.3. Структура ESKF-циклу

Один цикл ESKF можна подати так:

1. IMU-дані високої частоти інтегруються у номінальний стан x без явного врахування шумів як випадкових реалізацій.
2. Паралельно лінійна модель стану похибки прогнозує середнє і коваріацію δx .
3. Коли приходить зовнішнє вимірювання, будується нев'язка вимірювання.
4. Фільтр оцінює поправку $\widehat{\delta x}$.
5. Ця поправка ін'єктується в номінальний стан:

$$x \leftarrow x \oplus \widehat{\delta x}. \quad (8.2)$$

6. Середнє стану похибки скидається до нуля, а коваріація оновлюється з урахуванням цього скидання.

Ця архітектура відрізняється від “звичайного EKF на кватерніоні”: коваріація не живе напряду на чотиривимірному одиничному кватерніоні, а на тривимірній малій похибці орієнтації.

8.4. Змінні IMU-моделі

Номінальний стан у базовій моделі:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \\ q \\ a_b \\ \omega_b \\ g \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

де p - позиція, v - швидкість, q - орієнтація, a_b і ω_b - зміщення акселерометра і гірометра, g - вектор гравітації у вибраній системі координат.

Стан похибки:

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta v \\ \delta \theta \\ \delta a_b \\ \delta \omega_b \\ \delta g \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

Зверніть увагу: замість δq у векторі стану похибки використовується $\delta \theta \in \mathbb{R}^3$.

Величина	Істинна	Номінальна	Похибка	Композиція
Повний стан	x_t	x	δx	$x_t = x \oplus \delta x$
Позиція	p_t	p	δp	$p_t = p + \delta p$
Швидкість	v_t	v	δv	$v_t = v + \delta v$
Орієнтація	q_t	q	$\delta \theta$	$q_t = q \otimes \delta q$
Зміщення акселерометра	a_{bt}	a_b	δa_b	$a_{bt} = a_b + \delta a_b$

Зміщення гіроме- тра	ω_{bt}	ω_b	$\delta\omega_b$	$\omega_{bt} = \omega_b + \delta\omega_b$
Гравітація	g_t	g	δg	$g_t = g + \delta g$

8.5. Номінальна ІМУ-кінематика

Нехай a_m і ω_m - виміряні акселерометром прискорення та гірометром кутові швидкості. Нехай $R(q)$ - матриця повороту, що відповідає кватерніону q . Тоді типова номінальна модель має вигляд

$$\dot{p} = v, \quad (8.5a)$$

$$\dot{v} = R(q)(a_m - a_b) + g, \quad (8.5b)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes [0, \omega_m - \omega_b], \quad (8.5c)$$

$$\dot{a}_b = 0, \quad (8.5d)$$

$$\dot{\omega}_b = 0, \quad (8.5e)$$

$$\dot{g} = 0. \quad (8.5f)$$

У прогнозі фільтра зміщення часто моделюють як випадкові блукання, а не як абсолютно сталі величини; відповідні шуми входять у модель похибки.

8.6. Лінеаризована модель стану похибки

Для локальної похибки орієнтації стандартна перша лінеаризація дає структуру

$$\delta\dot{p} = \delta v, \quad (8.6a)$$

$$\delta\dot{v} \approx -R(q)[a_m - a_b]_{\times} \delta\theta - R(q) \delta a_b - R(q) a_n + \delta g, \quad (8.6b)$$

$$\delta\dot{\theta} \approx -[\omega_m - \omega_b]_{\times} \delta\theta - \delta\omega_b - \omega_n, \quad (8.6c)$$

$$\delta\dot{a}_b = a_w, \quad (8.6d)$$

$$\delta\dot{\omega}_b = \omega_w, \quad (8.6e)$$

$$\delta\dot{g} = 0. \quad (8.6f)$$

Тут $[\cdot]_{\times}$ - кососиметрична матриця векторного добутку, a_n і ω_n - шуми вимірювання, а a_w і ω_w - шуми випадкового блукання зміщень.

8.7. Чому гравітацію іноді включають у стан

Якщо початкова орієнтація не є достовірно вирівняною з горизонтом, зручно оцінювати g як частину стану. Тоді початкова невизначеність орієнтації частково переноситься у невизначеність напрямку гравітації, а рівняння швидкості лишається лінійним за g . Після оцінювання напрямку гравітації траєкторію можна переорієнтувати до горизонтальної системи координат.

Це не є єдиним правильним способом. В іншій постановці можна взяти $g = (0, 0, -9.81) \text{ m/s}^2$ і тримати невизначеність у початковій орієнтації. Важливо лише, щоб модель, якобіани і коваріація були узгоджені.

8.8. Мінімальний машинний шаблон

Listing 8.1: Псевдокод ESKF-прогнозу. Це не прив'язано до конкретного пакета.

```
# input: nominal x=(p,v,q,a_b,w_b,g), covariance P, IMU a_m, w_m, dt
# 1. propagate nominal state with nonlinear integration
p = p + v*dt + 0.5*(R(q) @ (a_m - a_b) + g)*dt**2
v = v + (R(q) @ (a_m - a_b) + g)*dt
q = normalize(q * Exp_quat((w_m - w_b)*dt))

# 2. build continuous A, B, C around the nominal state
# 3. discretize: F = expm(A*dt), Qd from continuous noise
# 4. propagate covariance
P = F @ P @ F.T + Qd
```

Такий псевдокод демонструє математичну структуру оцінювання, перевірку одиниць і місця, де повна інженерна реалізація мусить мати власну калібрацію, тестування і валідацію.

9. Неперервний шум і дискретний фільтр

Джерело / статус. Джерело для цього модуля: Joan Solà, arXiv:1711.02508, файл Noise.tex. Тут перекладено практичне ядро про інтегрування шумів і коваріацій у неперервно-дискретних системах.

9.1. Постановка

Багато фізичних моделей природно задаються у неперервному часі, але реалізуються дискретним фільтром. Тому не можна просто переписати шум з неперервного рівняння в дискретне без масштабування. Треба інтегрувати не невідомі реалізації випадкового процесу, а їхні дисперсії та коваріації.

Розглянемо неперервну систему

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad (9.1)$$

де x - стан, u - керування або вимірний вхід, а w - випадкове збурення. Вимірний вхід має шум

$$u_m = u + \tilde{u}. \quad (9.2)$$

У неперервній специфікації часто пишуть

$$\tilde{u} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{U}^c), \quad w^c \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W}^c), \quad (9.3)$$

де верхній індекс c означає неперервну часову специфікацію.

9.2. Два різні типи шуму

Є принципова різниця між шумом виміряного входу \tilde{u} і неперервним збуренням w .

1. Вхід u_m дискретизується в моменти $n\Delta t$. На інтервалі інтегрування зазвичай вважають

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(n\Delta t) = \tilde{u}_n, \quad n\Delta t < t < (n+1)\Delta t. \quad (9.4)$$

Тобто після вибірки цей шум поводить себе як стала на інтервалі величина.

2. Збурення w не вибирається як стала величина. Воно описує неперервний білий шум або випадкову дію всередині всього інтервалу.

Через це їхні внески в дискретну коваріацію мають різні степені Δt .

9.3. Лінеаризація стану похибки

Лінеаризована неперервна модель стану похибки:

$$\dot{\delta x} = \mathbf{A}\delta x + \mathbf{B}\tilde{u} + \mathbf{C}w, \quad (9.5)$$

де

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \delta x}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}}, \quad \mathbf{C} = \frac{\partial f}{\partial w}. \quad (9.6)$$

Інтегруючи (9.5) на інтервалі Δt , маємо три внески:

$$\delta x_{n+1} = \delta x_n + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (\mathbf{A}\delta x(\tau) + \mathbf{B}\tilde{u}(\tau) + \mathbf{C}w^c(\tau)) d\tau. \quad (9.7)$$

9.4. Дискретизована модель

Динамічна частина дає матрицю переходу

$$\mathbf{F}_x = \Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t}. \quad (9.8)$$

Для шуму вимірюваного входу, який зафіксовано на інтервалі,

$$\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}(\tau) d\tau = \mathbf{B}\Delta t \tilde{\mathbf{u}}_n. \quad (9.9)$$

Для неперервного білого шуму

$$\mathbf{w}_n = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbf{w}^c(\tau) d\tau, \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}), \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t. \quad (9.10)$$

Отже дискретна модель стану похибки має вигляд

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u \tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w \mathbf{w}_n, \quad (9.11)$$

де

$$\mathbf{F}_x = e^{\mathbf{A}\Delta t}, \quad \mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t, \quad \mathbf{F}_w = \mathbf{C}. \quad (9.12)$$

9.5. Коваріаційне оновлення

Якщо

$$\tilde{\mathbf{u}}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{U}), \quad \mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}), \quad (9.13)$$

з

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t, \quad (9.14)$$

то прогноз коваріації

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{F}_u \mathbf{U} \mathbf{F}_u^\top + \mathbf{F}_w \mathbf{W} \mathbf{F}_w^\top \quad (9.15)$$

$$= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{P}_n (e^{\mathbf{A}\Delta t})^\top + \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top. \quad (9.16)$$

Важливий висновок: динамічна похибка входить через експоненту, шум вибраного входу масштабується як Δt^2 , а неперервне збурення - як Δt . Це одна з найчастіших причин некоректно налаштованих фільтрів.

Опис	Неперервний час	Дискретний час
Стан	$\dot{\mathbf{x}} = f^c(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$	$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{w}_n)$
Стан похибки	$\delta \mathbf{x} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \mathbf{w}$	$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}_x \delta \mathbf{x}_n + \mathbf{F}_u \tilde{\mathbf{u}}_n + \mathbf{F}_w \mathbf{w}_n$
Матриця системи	\mathbf{A}	$\mathbf{F}_x = e^{\mathbf{A}\Delta t}$
Матриця входу	\mathbf{B}	$\mathbf{F}_u = \mathbf{B}\Delta t$
Матриця збурення	\mathbf{C}	$\mathbf{F}_w = \mathbf{C}$
Коваріація входу	\mathbf{U}^c	$\mathbf{U} = \mathbf{U}^c$
Коваріація збурення	\mathbf{W}^c	$\mathbf{W} = \mathbf{W}^c \Delta t$

9.6. Імпульсна форма Q

У багатьох реалізаціях прогноз записано коротше:

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_n \mathbf{F}_x^\top + \mathbf{Q}. \quad (9.17)$$

Це означає, що всі випадкові внески вже зібрані в одну дискретну коваріацію імпульсу:

$$\mathbf{Q} = \Delta t^2 \mathbf{B} \mathbf{U}^c \mathbf{B}^\top + \Delta t \mathbf{C} \mathbf{W}^c \mathbf{C}^\top. \quad (9.18)$$

Якщо \mathbf{Q} підібрано емпірично, формула (9.18) все одно корисна як перевірка одиниць виміру та залежності від частоти дискретизації.

9.7. Перевірки перед перекладом у код

1. З'ясувати, чи коваріації в джерелі задані як неперервні спектральні густини, дискретні дисперсії на відлік або емпіричні параметри.
2. Перевірити степінь Δt для кожного шумового внеску.
3. Не змішувати шум виміряного входу і випадкове блукання зміщення.
4. Перевірити симетрію \mathbf{P} після кожного оновлення: чисельно використовувати $(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)/2$ лише як аварійний захист, не як заміну правильної моделі.
5. Перевірити додатну напіввизначеність \mathbf{Q} .

10. Групи Лі для оцінювання стану: мінімальний практичний шар

Джерело / статус. Джерельний напрям: Solà, Deray, Atchuthan, *A micro Lie theory for state estimation in robotics*, arXiv:1812.01537. Цей модуль не є повним перекладом статті; це компільований український шар позначень, потрібний перед повним batch-перекладом.

10.1. Чому звичайне додавання не завжди правильне

У фільтрах стану часто хочеться написати

$$x \leftarrow x + \delta x. \quad (10.1)$$

Для позиції або швидкості це нормально. Для орієнтації або пози у просторі це некоректно: орієнтація живе не у векторному просторі, а на многовиді. Правильна операція має вигляд

$$x \leftarrow x \oplus \delta x, \quad (10.2)$$

де \oplus означає додавання у відповідній геометрії. Зворотна операція

$$\delta x = y \ominus x \quad (10.3)$$

дає малу різницю в дотичному просторі.

10.2. Оператор “дах” і векторний добуток

Для $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T \in \mathbb{R}^3$ визначимо

$$[\omega]_{\times} = [\omega]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

Тоді

$$[\omega]_{\times} v = \omega \times v. \quad (10.5)$$

Обернена операція \vee повертає вектор з косиметричної матриці:

$$([\omega]_{\times})^{\vee} = \omega. \quad (10.6)$$

10.3. SO(3): група обертань

Група тривимірних обертань

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1\}. \quad (10.7)$$

Її дотичний простір в одиниці можна ототожнити з \mathbb{R}^3 . Експоненціальне відображення

$$\text{Exp}(\phi) = \text{extexp}([\phi]_{\times}) \quad (10.8)$$

дає матрицю повороту з вектора обертання ϕ . За формулою Родрігеса, якщо $\theta = \|\phi\|$,

$$\text{Exp}(\phi) = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} [\phi]_{\times} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\phi]_{\times}^2. \quad (10.9)$$

Для малих θ використовують стабільні розклади:

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \approx 1 - \frac{\theta^2}{6} + \frac{\theta^4}{120}, \quad (10.10)$$

$$\frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{\theta^2}{24} + \frac{\theta^4}{720}. \quad (10.11)$$

10.4. Ліві і праві збурення

Є дві поширені угоди:

$$\mathbf{R}_t = \text{Exp}(\delta\theta)\mathbf{R} \quad \text{ліве, або глобальне, збурення,} \quad (10.12)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R} \text{Exp}(\delta\theta) \quad \text{праве, або локальне, збурення.} \quad (10.13)$$

Обидві математично законні. Небезпечна не сама угода, а змішування угод у різних частинах одного фільтра. Якщо джерело говорить, що кутові швидкості визначені локально щодо номінальної орієнтації, це має прямий вплив на знак і місце якобіанів.

10.5. SE(3): пози у просторі

Елемент SE(3) записують як однорідну матрицю

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3. \quad (10.14)$$

Мала похибка пози

$$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (10.15)$$

має матричне представлення

$$[\xi]_\times = \begin{bmatrix} [\phi]_\times & \rho \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

Експонента $\text{Exp}(\xi) \in \text{SE}(3)$ дає малий приріст пози. Для практичного ESKF часто достатньо знати, чи похибка додається ліворуч чи праворуч, і в якій системі координат заданий вектор ρ .

10.6. Аджойнт

Аджойнт переносить збурення між системами координат. Для $\mathbf{T} = (\mathbf{R}, \mathbf{t}) \in \text{SE}(3)$

$$\text{Ad}_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & [\mathbf{t}]_\times \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}. \quad (10.17)$$

Він з'являється у формулах виду

$$\mathbf{T} \text{Exp}(\xi) \mathbf{T}^{-1} = \text{Exp}(\text{Ad}_{\mathbf{T}} \xi). \quad (10.18)$$

У перекладі треба тримати *adjoint* як “аджойнт” або “приєднане відображення” залежно від стилю документа, але символ *Ad* краще не міняти.

10.7. Якобіани $SO(3)$

Лівий якобіан $SO(3)$:

$$\mathbf{J}_l(\phi) = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [\phi]_{\times} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} [\phi]_{\times}^2, \quad \theta = \|\phi\|. \quad (10.19)$$

Правий якобіан:

$$\mathbf{J}_r(\phi) = \mathbf{J}_l(-\phi). \quad (10.20)$$

Для малих кутів

$$\mathbf{J}_l(\phi) \approx \mathbf{I} + \frac{1}{2} [\phi]_{\times} + \frac{1}{6} [\phi]_{\times}^2, \quad (10.21)$$

$$\mathbf{J}_r(\phi) \approx \mathbf{I} - \frac{1}{2} [\phi]_{\times} + \frac{1}{6} [\phi]_{\times}^2. \quad (10.22)$$

10.8. Машинна нормалізація позначень

У всьому корпусі бажано фіксувати такі правила:

Поняття	Символ	Коментар
Експонента групи	$\text{Exp}(\cdot)$	Не змішувати з елементною експонентою вектора.
Логарифм групи	$\text{Log}(\cdot)$	Повертає в дотичний простір.
Nat	$[\omega]_{\times}$ або $[\omega]_{\times}$	Обрати один стиль на документ.
Vee	$(\cdot)^{\vee}$	Обернено до hat.
Плюс на многовиді	\oplus	Ін'єкція малої похибки.
Мінус на многовиді	\ominus	Різниця як вектор у дотичному просторі.
Адджойнт	$\text{Ad}_{\mathbf{T}}$	Переносить збурення між фреймами.

11. Фільтр Калмана та ESKF: формули, які треба зберегти без пошкоджень

Джерело / статус. Цей модуль є власним TeX-шаром інтеграції для корпусу: він зводить формули з R0-джерел у короткий QA-орієнтований формат. Його призначення - допомогти локальним агентам і людям перевіряти перекладені розділи.

11.1. Лінійна гаусова модель

Базова дискретна модель:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k), \quad (11.1a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k). \quad (11.1b)$$

Прогноз:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \quad (11.2a)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{G}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{G}_{k-1}^\top. \quad (11.2b)$$

Оновлення:

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad (11.3a)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k, \quad (11.3b)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1}, \quad (11.3c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{r}_k. \quad (11.3d)$$

Для коваріації краще використовувати форму Джозефа:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^\top. \quad (11.4)$$

Вона чисельно стабільніша і краще зберігає додатну напіввизначеність.

11.2. EKF і ESKF

Для нелінійної моделі

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \quad (11.5)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k), \quad (11.6)$$

EKF використовує якобіани навколо поточної оцінки:

$$\mathbf{F}_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k}, \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k}. \quad (11.7)$$

У ESKF якобіани будуються не за повним станом, а за станом похибки:

$$\mathbf{F}_{\delta x} = \left. \frac{\partial f_{\delta}}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{\delta \mathbf{x}=0}, \quad \mathbf{H}_{\delta x} = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x} \oplus \delta \mathbf{x})}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{\delta \mathbf{x}=0}. \quad (11.8)$$

Це ключова відмінність. Якщо переклад або переписування коду випадково замінить δx на x , формула може виглядати правдоподібно, але буде іншою математичною моделлю.

11.3. Ін'єкція і скидання

Після корекції ESKF має оцінку малої похибки $\widehat{\delta x}$. Номінальний стан оновлюється:

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}^- \oplus \widehat{\delta x}. \quad (11.9)$$

Після цього середнє похибки скидається:

$$\widehat{\delta x}^+ = \mathbf{0}. \quad (11.10)$$

Коваріація має бути перенесена через якобіан скидання:

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{G}\mathbf{P}^-\mathbf{G}^\top, \quad (11.11)$$

де \mathbf{G} - якобіан перетворення старої похибки у нову після ін'єкції. У простих наближеннях $\mathbf{G} \approx \mathbf{I}$, але для орієнтації точніша форма може мати додаткові члени.

11.4. Нев'язки і перевірка узгодженості

Нормалізована інновація:

$$\epsilon_k = \mathbf{r}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k. \quad (11.12)$$

Для коректної гаусової моделі ϵ_k має приблизно відповідати χ^2 -розподілу з кількістю ступенів вільності, рівною розмірності вимірювання. Це не польова інструкція, а базова статистична перевірка: якщо невязки систематично завеликі або замалі, коваріації \mathbf{Q} і \mathbf{R} або модель h не узгоджені з даними.

11.5. Перевірки коду і TeX

Перевірка	Що вона ловить
$\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top$ $\lambda_i(\mathbf{P}) \geq 0$	Втрата симетрії через чисельну або формульну помилку. Неможлива коваріація, неправильний знак шуму або некоректне оновлення.
Розмірності матриць Одиниці виміру \mathbf{Q} Малі кути	Переплутаний повний стан і стан похибки. Помилка у масштабуванні через Δt або Δt^2 . Нестабільність формул $\sin \theta / \theta$ при $\theta \rightarrow 0$.
Нормалізація кватерніона	Дрейф норми під час інтегрування.

11.6. Стабільний обчислювальний шаблон

Listing 11.1: Математичний псевдокод корекції.

```
# residual
r = y - h(x_nominal)
H = jacobian_wrt_error_state(h, x_nominal)
S = H @ P @ H.T + R
K = solve(S.T, (H @ P.T)).T # equivalent to P @ H.T @ inv(S), but stabler

# estimated small error
dx = K @ r

# inject into nominal state
```

```

x_nominal = boxplus(x_nominal, dx)

# Joseph covariance update
I = eye(P.shape[0])
P = (I - K @ H) @ P @ (I - K @ H).T + K @ R @ K.T

# optional reset Jacobian for ESKF
P = G_reset @ P @ G_reset.T
P = 0.5*(P + P.T)

```

У перекладеному корпусі цей блок має лишатися саме псевдокодом для навчання і перевірки формул. Він не повинен перетворюватися на інструкцію для конкретної апаратної системи.

12. Дискретизація, частотна область та I/Q: TeX-модуль з уже українського PySDR

Джерело / статус. Джерело: локально знайдений український lane PySDR, файли `frequency_domain.rst`, `sampling.rst`, `iq_files.rst`. Ці RST-файли були скопійовані як наявне українське джерело; тут подано стислий TeX-рівень, придатний для включення в книгу.

12.1. Часова і частотна області

Сигнал зазвичай спостерігається у часовій області: є функція $x(t)$ або послідовність відліків $x[n]$. Частотна область відповідає питанню: з яких частотних складових складається сигнал і з якою амплітудою та фазою входить кожна складова.

Перетворення Фур'є для неперервного сигналу:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (12.1)$$

Обернене перетворення:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df. \quad (12.2)$$

У різних книжках масштабні коефіцієнти можуть стояти інакше. Для перекладу це означає: не “уніфікувати” формулу без позначення конвенції.

12.2. Дискретизація

Нехай $S(t)$ - неперервний сигнал. Дискретизація з періодом T_s дає послідовність

$$S[n] = S(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.3)$$

Частота дискретизації

$$f_s = \frac{1}{T_s}. \quad (12.4)$$

У DSP краще перекладати *sample* як “відлік”, а не як “зразок”, якщо йдеться про числове значення сигналу.

12.3. Критерій Найквіста

Якщо сигнал має скінченну смугу і максимальна частота корисної складової дорівнює f_{\max} , то для однозначного подання потрібно

$$f_s > 2f_{\max}. \quad (12.5)$$

Мінімальна частота дискретизації за цією умовою називається частотою Найквіста. Якщо дискретизація повільніша, спектральні копії накладаються, і виникає аліасинг.

У машинному перекладі важливо розрізняти:

Nyquist rate мінімальна частота дискретизації, приблизно $2f_{\max}$;

Nyquist frequency половина частоти дискретизації, $f_s/2$;

bandwidth смуга пропускання або ширина смуги, залежно від контексту.

12.4. Дискретне перетворення Фур'є

Для N відліків $x[0], \dots, x[N-1]$ DFT задається формулою

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (12.6)$$

Обернене DFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}. \quad (12.7)$$

FFT - це алгоритм швидкого обчислення DFT, а не інше математичне перетворення.

12.5. Віконування і спектральне витікання

Скінченний фрагмент сигналу еквівалентний множенню нескінченного сигналу на вікно. У частотній області множення переходить у згортку, тому різкі краї прямокутного вікна створюють бічні пелюстки. Це називається спектральним витіканням.

Якщо $w[n]$ - віконна функція, то аналізований сигнал

$$x_w[n] = w[n]x[n]. \quad (12.8)$$

Вибір вікна - це компроміс між шириною головної пелюстки та рівнем бічних пелюсток. У перекладах не варто замінювати назви стандартних вікон довільно: Hann, Hamming, Blackman, Kaiser мають бути стабільними термінами.

12.6. I/Q-представлення

У SDR і DSP часто використовують комплексну базову смугу. Сигнал записують як

$$z(t) = I(t) + jQ(t), \quad (12.9)$$

де I - синфазна компонента, Q - квадратурна компонента. Реальний радіочастотний сигнал можна подати як

$$x(t) = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t), \quad (12.10)$$

залежно від угоди щодо знака. Інша поширена форма має знак плюс перед $Q \sin(\cdot)$. Як і з кватерніонами, знакова угода має бути зафіксована.

Амплітуда і фаза комплексного відліку:

$$A(t) = |z(t)| = \sqrt{I(t)^2 + Q(t)^2}, \quad \phi(t) = \text{atan2}(Q(t), I(t)). \quad (12.11)$$

Це дає зручну мову для модуляції, фільтрації, оцінювання частоти, синхронізації та спектрального аналізу без прив'язки до конкретної апаратури.

12.7. Безпечна межа модуля

Цей розділ є математичною основою: дискретизація, спектри, комплексні відліки, вікна, DFT/FFT. Він не містить інструкцій з обходу, придушення або експлуатації конкретних систем зв'язку. Для публічної бібліотеки це правильний рівень: навчальна інженерна математика, придатна для університетського і промислового контексту.

13. Джерельний старт: кватерніони, обертання і ESKF

Джерело / статус. Джерельна лінія: J. Solà, “Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter”, arXiv:1711.02508. Цей розділ не є повним перекладом статті. Він є українським TeX-стартом для практично потрібних частин: мотивація ESKF, домовленості щодо кватерніонів, похибковий стан, шум і ін’єкція поправки.

13.1. Сенс статті для цього корпусу

Це одне з найважливіших одиничних джерел у черзі, бо воно з’єднує три речі, які часто плутають у прикладній роботі:

1. кватерніон як зручне представлення орієнтації;
2. групову геометрію обертань, тобто $SO(3)$ і S^3 ;
3. похибковий фільтр Калмана, де орієнтаційна похибка живе у тривимірному дотичному просторі, а не як ще один повний кватерніон.

Практична мета перекладу: дати читачеві змогу відрізнити номінальний стан від істинного стану і похибкового стану, не губити знак у кватерніонно-му добутку, правильно переносити неперервний шум у дискретну коваріацію і перевіряти, чи не зруйнована симетрія матриці P .

13.2. Мотивація похибкового стану

Нехай істинний стан позначено x_t , номінальний стан — x , а похибковий стан — δx . Для лінійних компонентів зв’язок має вигляд

$$p_t = p + \delta p, \quad v_t = v + \delta v.$$

Для орієнтації звичайна сума неправильна. Якщо орієнтацію подано одиничним кватерніоном q , то мала орієнтаційна похибка $\delta\theta \in \mathbb{R}^3$ вводиться через малий кватерніон

$$\delta q \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\delta\theta \end{bmatrix},$$

і тоді, для локальної домовленості,

$$q_t = q \otimes \delta q.$$

Тут $\delta\theta$ має лише три компоненти, тобто відповідає трьом ступеням вільності обертання. Це головна причина, чому ESKF зручніший за фільтр, який намагається напряму оцінювати чотири компоненти кватерніона як незалежні величини.

13.3. Номінальний стан ІМУ-системи

Мінімальний номінальний стан для інерціальної навігації має вигляд

$$x = [p, v, q, b_a, b_\omega, g],$$

де $p \in \mathbb{R}^3$ — положення, $v \in \mathbb{R}^3$ — швидкість, $q \in S^3$ — орієнтація, b_a — зміщення акселерометра, b_ω — зміщення гіроскопа, g — вектор гравітації в глобальній системі координат. Вимірювання ІМУ позначимо

$$a_m = a + b_a + a_n, \quad \omega_m = \omega + b_\omega + \omega_n.$$

Після віднімання оцінених зміщень:

$$\hat{a} = a_m - b_a, \quad \hat{\omega} = \omega_m - b_\omega.$$

Тоді неперервна номінальна модель:

$$\dot{p} = v, \tag{13.1}$$

$$\dot{v} = R(q)\hat{a} + g, \tag{13.2}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \hat{\omega}, \tag{13.3}$$

$$\dot{b}_a = 0, \quad \dot{b}_\omega = 0, \quad \dot{g} = 0. \tag{13.4}$$

У дискретному кроці з періодом Δt найпростіший предиктор:

$$p_{k+1} = p_k + v_k \Delta t + \frac{1}{2}(R(q_k)\hat{a}_k + g_k)\Delta t^2, \tag{13.5}$$

$$v_{k+1} = v_k + (R(q_k)\hat{a}_k + g_k)\Delta t, \tag{13.6}$$

$$q_{k+1} = q_k \otimes \text{Exp}(\hat{\omega}_k \Delta t), \tag{13.7}$$

$$b_{a,k+1} = b_{a,k}, \quad b_{\omega,k+1} = b_{\omega,k}. \tag{13.8}$$

13.4. Похибковий стан

Похибковий стан:

$$\delta x = [\delta p, \delta v, \delta \theta, \delta b_a, \delta b_\omega, \delta g] \in \mathbb{R}^{18}.$$

Лінійна модель похибки має канонічний вигляд

$$\dot{\delta x} = F\delta x + Gn,$$

де n збирає шум акселерометра, шум гіроскопа і випадкові блукання зміщень. Для локальної орієнтаційної похибки типові блоки:

$$\dot{\delta p} = \delta v, \tag{13.9}$$

$$\dot{\delta v} = -R[\hat{a}]_\times \delta \theta - R\delta b_a + \delta g - Ra_n, \tag{13.10}$$

$$\dot{\delta \theta} = -[\hat{\omega}]_\times \delta \theta - \delta b_\omega - \omega_n, \tag{13.11}$$

$$\delta \dot{b}_a = a_w, \tag{13.12}$$

$$\delta \dot{b}_\omega = \omega_w, \tag{13.13}$$

$$\dot{\delta g} = 0. \tag{13.14}$$

Ці рівняння корисні саме як структура. Для конкретної реалізації треба звірити домовленість: локальна чи глобальна похибка кута, лівий чи правий добуток, порядок кватерніонних компонентів $[w, x, y, z]$ чи $[x, y, z, w]$.

13.5. Ін'єкція похибки

Після вимірювального оновлення фільтр має оцінку $\widehat{\delta x}$. Її не треба накопичувати як окремий стан. Її вводять у номінальний стан:

$$p \leftarrow p + \widehat{\delta p}, \quad (13.15)$$

$$v \leftarrow v + \widehat{\delta v}, \quad (13.16)$$

$$q \leftarrow q \otimes \text{Exp}(\widehat{\delta \theta}), \quad (13.17)$$

$$b_a \leftarrow b_a + \widehat{\delta b_a}, \quad (13.18)$$

$$b_\omega \leftarrow b_\omega + \widehat{\delta b_\omega}, \quad (13.19)$$

$$g \leftarrow g + \widehat{\delta g}. \quad (13.20)$$

Після цього середнє похибкового стану скидають до нуля:

$$\widehat{\delta x} \leftarrow 0.$$

Коваріацію треба перетворити reset-Якобіаном:

$$P \leftarrow G_{\text{reset}} P G_{\text{reset}}^\top.$$

Для дуже малих поправок часто $G_{\text{reset}} \approx I$, але це наближення не можна ховати. Якщо воно використане, це має бути вказано в коді й у документації.

13.6. Контрольні запитання для перекладу цієї статті

1. Чи всюди однаковий порядок кватерніона?
2. Чи позначено, де похибка локальна, а де глобальна?
3. Чи не перекладено *bias* як фізичний “нахил” замість “зміщення”?
4. Чи не змішано *noise* і *random walk*?
5. Чи збережено різницю між *sampled input noise* і *continuous perturbation noise*?
6. Чи всі матриці коваріації мають правильні розмірності?

14. Вимірювальне оновлення, ін'єкція і reset у ESKF

14.1. Уніфікована модель вимірювання

Нехай вимірювання має вигляд

$$z = h(x_t) + r, \quad r \sim \mathcal{N}(0, R).$$

У ESKF лінеаризацію роблять не обов'язково за повним станом, а за похибковим станом:

$$h(x_t) \simeq h(x \oplus \delta x) \simeq h(x) + H\delta x.$$

Тоді інновація

$$y = z - h(x)$$

має наближений розподіл

$$y \sim \mathcal{N}(H\delta x, S), \quad S = HPH^T + R.$$

Крок Калмана:

$$K = PH^T S^{-1}, \quad (14.1)$$

$$\widehat{\delta x}^+ = \widehat{\delta x}^- + K(y - H\widehat{\delta x}^-), \quad (14.2)$$

$$P^+ = (I - KH)P^-(I - KH)^T + K RK^T. \quad (14.3)$$

Остання формула — форма Джозефа. Вона довша, але краще зберігає симетрію і додатну напіввизначеність P у чисельній арифметиці.

14.2. NIS як перший sanity check

Нормована інноваційна квадратична форма:

$$\epsilon_{\text{NIS}} = y^T S^{-1} y.$$

Якщо модель шуму адекватна і вимірювання має розмірність m , то ϵ_{NIS} має приблизно χ_m^2 -поведінку. Практична користь: якщо ϵ_{NIS} систематично занадто велика, фільтр переоцінює власну точність або вимірювання має невраховану похибку. Якщо систематично занадто мала, шум, можливо, завищений або вимірювання надмірно згладжене.

14.3. Узагальнене оновлення для залишку на багатовиді

Якщо саме вимірювання живе на групі Лі, різниця " $z - h(x)$ " може бути некоректною. Тоді залишок будують через \ominus :

$$y = z \ominus h(x) = \text{Log}(h(x)^{-1} z)$$

або, залежно від домовленості,

$$y = h(x)^{-1} \ominus z = \text{Log}(z h(x)^{-1}).$$

Ці два рядки не є взаємозамінними. Вони відповідають різним сторонам збурення і дають різні Якобіани. Для перекладу й коду треба фіксувати домовленість у заголовку модуля.

14.4. Ін'єкція не є вимірювальним оновленням

Після оновлення ESKF має оцінену похибку $\widehat{\delta x}^+$. Ін'єкція переносить її в номінальний стан:

$$x \leftarrow x \oplus \widehat{\delta x}^+.$$

Після ін'єкції означення похибки змінилося: нова похибка вимірюється від нового номінального стану. Тому коваріація повинна бути перерахована:

$$P \leftarrow J_{\text{reset}} P J_{\text{reset}}^T.$$

Для лінійних компонентів J_{reset} часто є одиничним. Для орієнтаційної частини при локальній похибці першого порядку типовий блок має вигляд

$$J_{\theta, \text{reset}} \simeq I - \frac{1}{2} \left[\widehat{\delta \theta} \right]_{\times}.$$

Знак залежить від обраної сторони композиції. Якщо у двох джерелах цей знак різний, це не обов'язково помилка; часто це різні домовленості.

14.5. Розмірності як захист від помилок

Для стану

$$\delta x = [\delta p, \delta v, \delta \theta, \delta b_a, \delta b_{\omega}, \delta g] \in \mathbb{R}^{18}$$

маємо:

$$P \in \mathbb{R}^{18 \times 18}.$$

Якщо вимірювання тривимірне, тоді

$$H \in \mathbb{R}^{3 \times 18}, \quad R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad K \in \mathbb{R}^{18 \times 3}.$$

Ці розмірності треба перевіряти в кожному перекладеному прикладі. Дуже багато помилок у фільтрах є не "складними математичними" помилками, а переплутаними транспонуваннями.

14.6. Псевдокод оновлення

```
Input: nominal state x, covariance P, measurement z, model h, noise R
Predict measurement:
    z_hat = h(x)
Build residual:
    y = residual(z, z_hat)          # Euclidean minus or Lie Log residual
Build Jacobian:
    H = dh_d_error_state(x)
Innovation covariance:
    S = H P H.T + R
Kalman gain:
    K = P H.T solve(S)
Error-state correction:
    dx = K y
Joseph covariance update:
    P = (I - K H) P (I - K H).T + K R K.T
Inject correction:
    x = inject(x, dx)
```

```
Reset error-state:  
    J = reset_jacobian(dx)  
    P = J P J.T  
Symmetrize:  
    P = 0.5 * (P + P.T)
```

Останній рядок не замінює правильної математики, але є корисним чисельним запобіжником. Якщо після симетризації власні значення P від'ємні далеко за межами машинної похибки, реалізація зламана.

15. Сенсорні моделі, калібрування і часові зсуви

15.1. Навіщо цей розділ

Фільтр стану не може бути кращим за свої сенсорні моделі. Для практичного застосування переклад має давати не лише формулу Калмана, а й мову для опису похибок сенсорів: зміщення, масштаб, шум, кореляції, затримки, часові мітки, невідомі параметри калібрування.

15.2. Абстрактна модель сенсора

Загальний сенсор:

$$z_k = h(x(t_k), c) + r_k,$$

де $x(t_k)$ — стан у момент вимірювання, c — калібрувальні параметри, r_k — шум. Якщо часова мітка має зсув Δt_s , то фактично

$$z_k = h(x(t_k + \Delta t_s), c) + r_k.$$

Для швидкого руху навіть малий часовий зсув дає систематичну похибку:

$$x(t_k + \Delta t_s) \simeq x(t_k) + \dot{x}(t_k)\Delta t_s.$$

Тому часова синхронізація є не адміністративною деталлю, а частиною математичної моделі.

15.3. IMU: шум, зміщення, випадкове блукання

Типова IMU-модель:

$$a_m = a + b_a + S_a a + a_n, \quad (15.1)$$

$$\omega_m = \omega + b_\omega + S_\omega \omega + \omega_n, \quad (15.2)$$

де S_a, S_ω — малі матриці масштабів і перехресних осей. Для першого ядра часто лишають простішу модель без S :

$$a_m = a + b_a + a_n, \quad \omega_m = \omega + b_\omega + \omega_n.$$

Зміщення моделюють як випадкове блукання:

$$\dot{b}_a = a_w, \quad \dot{b}_\omega = \omega_w.$$

Це означає, що невизначеність зміщення зростає з часом, якщо її не спостерігати іншими вимірюваннями.

15.4. Вимірювання положення

Для абстрактного вимірювання положення:

$$z_p = p + r_p, \quad r_p \sim \mathcal{N}(0, R_p).$$

Залишок:

$$y = z_p - p.$$

Якоб'іан за похибковим станом:

$$H_p = [I_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Це найпростіший випадок і добра перевірка реалізації фільтра.

15.5. Вимірювання швидкості

Для вимірювання швидкості в глобальній системі:

$$z_v = v + r_v, \quad H_v = [0 \ I_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Якщо сенсор вимірює швидкість у корпусній системі, модель інша:

$$z_{v_B} = R(q)^T v + r.$$

Тоді мала орієнтаційна похибка входить у Якоб'іан:

$$\delta(R^T v) \simeq R^T \delta v + [R^T v]_{\times} \delta \theta$$

для однієї з поширених локальних домовленостей. Знак треба звіряти з прийнятим означенням δq .

15.6. Візуальний напрямок або bearing-only модель

Якщо сенсор дає лише напрямок на точку, то модель не вимірює відстань на пряму. Нехай точка P у глобальних координатах, а сенсор має положення p і орієнтацію R . Напрямок у сенсорній системі:

$$u = \frac{R^T(P - p)}{\|P - p\|}.$$

Залишок не варто будувати просто як різницю одиничних векторів без перевірки. Один варіант — проекція на дотичну площину:

$$y = (I - uu^T)(z - u).$$

Ця модель корисна як навчальна, бо показує різницю між вимірюванням напрямку і вимірюванням повної позиції.

15.7. Калібрувальні параметри як частина стану

Якщо параметр c невідомий і повільно змінюється, його можна додати до стану:

$$x_{\text{aug}} = [x, \ c].$$

Тоді коваріація стає блочною:

$$P_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xc} \\ P_{cx} & P_{cc} \end{bmatrix}.$$

Блок P_{xc} важливий: він показує, як невизначеність калібрування корелює з невизначеністю стану. Якщо переклад або код ігнорує цей блок, отримані оцінки можуть бути надмірно впевненими.

15.8. Термінологічні рішення

Англійський термін	Український термін	Примітка
bias	зміщення	Не “нахил”. Для IMU це систематична адитивна похибка.
scale factor	масштабний коефіцієнт	Часто частина калібрування.
misalignment	неузгодженість осей	Не обов’язково механічне “зміщення”.
timestamp	часова мітка	Критично для злиття сенсорів.
latency	затримка	Не плутати з періодом дискретизації.
extrinsics	зовнішні параметри калібрування	Відносна поза сенсора до базової системи.
intrinsics	внутрішні параметри калібрування	Параметри самого сенсора/камери.

16. Байєсівська фільтрація, згладжування і факторні графи

Джерело / статус. Джерельна лінія: огляд неперервно-часового оцінювання стану, Labbe Kalman book, Probabilistic Robotics-подібна нотація, факторні графи в сучасній робототехніці. Розділ є зведеним практичним містком, не повним перекладом одного джерела.

16.1. Фільтрація

Фільтрація оцінює поточний стан за минулими і поточними вимірюваннями:

$$p(x_k \mid z_{1:k}, u_{1:k}).$$

Байєсівський фільтр має два кроки.

16.1.1. Прогноз

$$p(x_k \mid z_{1:k-1}, u_{1:k}) = \int p(x_k \mid x_{k-1}, u_k) p(x_{k-1} \mid z_{1:k-1}, u_{1:k-1}) dx_{k-1}.$$

16.1.2. Оновлення

$$p(x_k \mid z_{1:k}, u_{1:k}) = \eta p(z_k \mid x_k) p(x_k \mid z_{1:k-1}, u_{1:k}),$$

де η — нормувальна константа.

Фільтр Калмана є спеціальним випадком, коли моделі лінійні, а розподіли гаусівські:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k), \quad (16.1)$$

$$z_k = H_k x_k + r_k, \quad r_k \sim \mathcal{N}(0, R_k). \quad (16.2)$$

16.2. ЕКФ як локально лінійний Байєсівський фільтр

Для нелінійних моделей:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_k), \quad z_k = h(x_k, r_k).$$

ЕКФ замінює їх локальними лінеаризаціями:

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}, u_k}, \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k}.$$

У ESKF похідні беруть не за повним станом, а за похибкою:

$$H_k = \left. \frac{\partial h(x \oplus \delta x)}{\partial \delta x} \right|_{\delta x=0}.$$

16.3. Згладжування

Згладжування оцінює не лише поточний стан, а траєкторію або вікно траєкторії:

$$p(x_{0:N} \mid z_{1:N}, u_{1:N}).$$

Це часто перетворюється на задачу оптимізації:

$$x_{0:N}^* = \arg \min_{x_{0:N}} \left(\sum_k \|r_k^{\text{motion}}(x_{k-1}, x_k, u_k)\|_{Q_k^{-1}}^2 + \sum_k \|r_k^{\text{meas}}(x_k, z_k)\|_{R_k^{-1}}^2 \right).$$

Тут

$$\|r\|_{\Sigma^{-1}}^2 = r^T \Sigma^{-1} r.$$

Фільтр придатний для низької затримки. Згладжування часто точніше і стабільніше, бо переоцінює попередні стани після приходу нових вимірювань.

16.4. Факторний граф

Факторний граф розбиває цільову функцію на локальні фактори:

$$p(x \mid z) \propto \prod_i \phi_i(x_i).$$

У логарифмічній формі:

$$-\log p(x \mid z) = \sum_i \|r_i(x_i)\|_{\Sigma_i^{-1}}^2 + \text{const.}$$

Після лінеаризації:

$$r_i(x \oplus \delta x) \simeq r_i(x) + J_i \delta x.$$

Нормальні рівняння:

$$\left(\sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i \right) \delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} r_i.$$

На практиці цю систему розв'язують не явним оберненням, а факторизаціями QR/Cholesky або ітераційними методами.

16.5. Фільтр проти згладжувача

Критерій	Фільтрація	Згладжування
Стан	Поточний x_k	Траєкторія або вікно $x_{i:j}$
Затримка	Низька	Вища, залежить від вікна
Обчислення	Рекурсивні матриці	Розріджена оптимізація
Корекція минулого	Зазвичай ні	Так
Типовий інструмент	KF/EKF/ESKF/UKF/PF	factor graph, bundle adjustment, fixed-lag smoother

16.6. Практичне правило

Для вбудованого оцінювання стану в реальному часі першим перекладати треба фільтри: KF, EKF, ESKF, інновації, коваріації, шум. Для високоточних офлайн або віконних задач треба додати згладжування, факторні графи і розріджену лінійну алгебру.

17. Керування: простір станів, PID, LQR, спостережуваність

17.1. Навіщо керування в цьому ядрі

Оцінювання стану без керування дає лише кращу картину ситуації. Інженерна система також має приймати входи u і стабілізувати динаміку. Тому поруч із фільтрами потрібна мінімальна мова керування: простір станів, стійкість, спостережуваність, керованість, PID, LQR, обмеження й насичення.

17.2. Лінійна модель у просторі станів

Неперервна модель:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

Дискретна модель:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k, \quad y_k = Hx_k + Du_k.$$

Якщо A стало на інтервалі Δt , то

$$F = e^{A\Delta t}, \quad G = \int_0^{\Delta t} e^{A\tau} B d\tau.$$

Для малих Δt :

$$F \simeq I + A\Delta t, \quad G \simeq B\Delta t.$$

17.3. Стійкість

Для неперервної системи $\dot{x} = Ax$ локальна асимптотична стійкість вимагає, щоб усі власні значення A мали від'ємні дійсні частини:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0.$$

Для дискретної системи $x_{k+1} = Fx_k$ потрібно:

$$|\lambda_i(F)| < 1.$$

Це простий, але важливий перекладацький пункт: *negative real part* для неперервного часу не є тим самим, що *magnitude less than one* для дискретного часу.

17.4. Керованість

Матриця керованості:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Система керована, якщо

$$\operatorname{rank} \mathcal{C} = n.$$

Практичний зміст: входи u можуть впливати на всі напрямки стану. Якщо ранг менший, частина станів не може бути доведена керуванням до бажаних значень.

17.5. Спостережуваність

Матриця спостережуваності:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Система спостережувана, якщо

$$\text{rank } \mathcal{O} = n.$$

Практичний зміст: вимірювання y несуть достатньо інформації, щоб відновити стан. Це напряду пов'язано з фільтрами: не можна стабільно оцінювати те, що не спостерігається.

17.6. PID-регулятор

Для скалярної похибки $e(t) = r(t) - y(t)$:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \dot{e}(t).$$

Дискретна форма:

$$u_k = K_P e_k + K_I s_k + K_D \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t}, \quad s_k = s_{k-1} + e_k \Delta t.$$

Ключові слова:

- K_P зменшує поточну похибку, але може викликати коливання;
- K_I прибирає сталу похибку, але може накопичувати насичення;
- K_D демпфує швидку зміну, але підсилює шум.

17.7. Насичення і anti-windup

Якщо привід має межі:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max},$$

то інтегральний член PID може продовжувати рости, хоча реальний вхід уже насичений. Це називається windup. Один простий захист:

$$s_k = \begin{cases} s_{k-1} + e_k \Delta t, & \text{якщо вхід не насичений або інтеграл зменшує насичення,} \\ s_{k-1}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

У перекладі *windup* краще передавати як “накопичення інтегратора при насиченні” при першому введенні, а далі можна вживати “windup інтегратора” або “перенакопичення інтегратора”.

17.8. LQR

Для лінійної системи

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

LQR мінімізує

$$J = \int_0^\infty (x^\top Q x + u^\top R u) dt,$$

де $Q \succeq 0$, $R \succ 0$. Оптимальний закон:

$$u = -Kx, \quad K = R^{-1}B^\top P,$$

де P розв'язує алгебраїчне рівняння Ріккаті:

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0.$$

Для дискретного часу формули подібні, але використовується дискретне рівняння Ріккаті. Не можна механічно переносити неперервний K у дискретну реалізацію без дискретизації.

17.9. Зв'язок з оцінюванням

Коли стан x невідомий, використовують оцінку \hat{x} :

$$u = -K\hat{x}.$$

Це поєднує фільтр і регулятор. У лінійно-гаусівському випадку працює принцип розділення: LQR і KF можна проектувати окремо. У нелінійних системах це є корисним наближенням, але не гарантією.

18. Проектування цифрових фільтрів: FIR, IIR, вікна, перевірки

18.1. Роль цього розділу

Попередні розділи дали Fourier/DFT-основу. Тепер потрібна практична TeX-основа для фільтрів: як описати фільтр, як читати амплітудно-частотну характеристику, як пов'язати імпульсну відповідь і згортку, як уникнути помилок на межах дискретизації.

18.2. LTI-фільтр

Для лінійної стаціонарної дискретної системи:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Це згортка:

$$y = h * x.$$

Частотна характеристика:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}.$$

Якщо $x[n] = e^{j\omega n}$, тоді

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Тобто комплексна експонента є власною функцією LTI-системи.

18.3. FIR-фільтр

FIR-фільтр має скінченну імпульсну відповідь:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

Його передавальна функція:

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}.$$

Переваги: стабільність при скінченних коефіцієнтах, можливість точної лінійної фази, простота перевірки. Недолік: для вузьких переходів може знадобитися великий порядок.

18.4. IIR-фільтр

IIR-фільтр використовує зворотний зв'язок:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k].$$

Передавальна функція:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

Стійкість вимагає, щоб полюси були всередині одиничного кола:

$$|z_i| < 1.$$

IIR часто дає менший порядок, але потребує уважної чисельної реалізації.

18.5. Віконний sinc для low-pass FIR

Ідеальний low-pass у частоті має прямокутну характеристику. Його нескінченна імпульсна відповідь:

$$h_{\text{ideal}}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0, \\ \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Щоб отримати FIR, її обрізають і множать на вікно:

$$h[n] = h_{\text{ideal}}[n - M/2] w[n], \quad n = 0, \dots, M.$$

Вікно зменшує побічні пелюстки, але розширює перехідну смугу. Це типовий компроміс.

18.6. Нормована частота

У DSP дуже часто губляться одиниці. Нехай частота дискретизації f_s . Тоді:

$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s}.$$

Частота Найквіста:

$$f_N = \frac{f_s}{2}, \quad \omega_N = \pi.$$

Якщо фільтр-проектор очікує нормовану частоту в інтервалі $[0, 1]$, треба знати, чи 1 означає f_s або $f_s/2$. Це не універсально.

18.7. Перевірки фільтра

1. Побудувати $|H(e^{j\omega})|$ і фазу.
2. Перевірити DC-підсилення:

$$H(1) = \sum_k h[k].$$

Для low-pass часто очікується $H(1) \approx 1$.

3. Перевірити відповідь на синус відомої частоти.
4. Перевірити імпульсну відповідь і step-response.
5. Для IIR перевірити полюси.
6. Для fixed-point реалізації перевірити переповнення й масштабування.

18.8. Різниця між фільтрацією і згладжуванням

Ковзне середнє:

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k].$$

Це фільтр, але з фазовою затримкою. Якщо використовувати симетричне вікно:

$$y[n] = \sum_{k=-K}^K h[k]x[n-k],$$

то воно некаузальне: потребує майбутніх зразків. Для офлайн обробки це нормально; для реального часу — ні. У перекладах треба відрізнати *filtering* від *smoothing*, бо в оцінюванні стану ці слова мають ще й окреме байєсівське значення.

18.9. Комплексний базовий сигнал

Для I/Q-сигналу:

$$x[n] = I[n] + jQ[n].$$

Зсув частоти на f_0 :

$$x_{\text{shift}}[n] = x[n]e^{j2\pi f_0 n/f_s}.$$

Це базова операція цифрової обробки сигналів. У публічному довіднику її треба подавати як загальну математику комплексної огинаючої, а не як інструкцію для конкретного середовища застосування.

19. Матричні похідні, найменші квадрати і перевірка Якобіанів

19.1. Чому це входить до першого ядра

Фільтри, факторні графи, калібрування, SLAM, оцінювання параметрів і керування всі зводяться до Якобіанів. Якщо переклад не дає читачеві стабільної мови матричних похідних, то пізніші розділи будуть виглядати як набір магічних формул.

19.2. Лінеаризація

Для функції

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

поблизу x :

$$f(x + \delta x) \simeq f(x) + J\delta x, \quad J = \frac{\partial f}{\partial x} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Розмірність J завжди “вихід на вхід”. Якщо f має m компонент, а x має n компонент, то J має m рядків і n стовпців.

19.3. Скалярна квадратична форма

Нехай

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2} (Ax - b)^\top (Ax - b).$$

Тоді

$$\nabla \phi(x) = A^\top (Ax - b).$$

Якщо є вагова матриця $W \succ 0$:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} (Ax - b)^\top W (Ax - b),$$

то

$$\nabla \phi(x) = A^\top W (Ax - b).$$

19.4. Нормальні рівняння

Мінімум

$$\min_x \|Ax - b\|^2$$

задовольняє

$$A^\top A x = A^\top b.$$

Якщо $A^\top A$ погано обумовлена, явне розв’язання нормальних рівнянь може погіршити точність. Краще використовувати QR або SVD. Для зваженої задачі:

$$A^\top W A x = A^\top W b.$$

19.5. Гаус-Ньютон

Для нелінійного залишку $r(x)$:

$$\min_x \frac{1}{2} \|r(x)\|^2.$$

Лінеаризація:

$$r(x + \delta x) \simeq r(x) + J\delta x.$$

Крок Гауса-Ньютона:

$$(J^T J)\delta x = -J^T r.$$

Оновлення:

$$x \leftarrow x + \delta x.$$

На многовидах:

$$X \leftarrow X \oplus \delta x.$$

19.6. Левенберг-Марквардт

Демпфований крок:

$$(J^T J + \lambda I)\delta x = -J^T r.$$

Або масштабований варіант:

$$(J^T J + \lambda \text{diag}(J^T J))\delta x = -J^T r.$$

Велике λ робить крок обережнішим; мале λ наближає метод до Гауса-Ньютона.

19.7. Скінченно-різницева перевірка Якобіана

Для кожного базисного напрямку e_i :

$$J_{:,i}^{\text{num}} \simeq \frac{f(x + \epsilon e_i) - f(x - \epsilon e_i)}{2\epsilon}.$$

Порівняння:

$$\frac{\|J - J^{\text{num}}\|}{1 + \|J^{\text{num}}\|}$$

має бути малим. Типові значення ϵ для double precision лежать приблизно між 10^{-6} і 10^{-4} , але це залежить від масштабу змінної.

19.8. Перевірка Якобіана на групі Лі

Якщо стан $X \in \text{SE}(3)$, не можна тестувати $X + \epsilon e_i$. Треба тестувати через \oplus :

$$J_{:,i}^{\text{num}} \simeq \frac{f(X \oplus \epsilon e_i) - f(X \oplus (-\epsilon e_i))}{2\epsilon}.$$

Якщо вихід також на многовиді, різницю виходів треба брати через \ominus :

$$J_{:,i}^{\text{num}} \simeq \frac{(f(X \oplus \epsilon e_i) \ominus f(X \oplus (-\epsilon e_i)))}{2\epsilon}.$$

Це один з найважливіших практичних моментів для перекладу мікро Lie матеріалу.

19.9. Ознаки неправильної похідної

- Фільтр працює лише при дуже великому R .
- P швидко втрачає симетрію або додатну напіввизначеність.
- NIS систематично зашкалює.
- Оптимізатор зменшує cost на першій ітерації, але далі розбігається.
- Зміна знаку однієї орієнтаційної похибки “виправляє” усе. Це часто означає змішування лівої і правої домовленості.

20. SDR та RF-передній край: архітектурна математика

Джерело / статус. Основні джерела для цієї доріжки: переклад translation system для Akeela-Dezfouli, *Software-defined Radios: Architecture, State-of-the-art, and Challenges*, arXiv:1804.06564; раніше staged PySDR Ukrainian RST; базовий DSP-розділ цього довідника. Цей розділ є інтегрованою навчальною нормалізацією, а не дослівним перекладом survey.

20.1. Сигнальний шлях SDR

Програмно-визначене радіо (SDR) треба читати не як окрему плату або конкретний набір інструментів, а як архітектурний принцип: частину радіосистеми, яку раніше фіксували апаратно, переносять у цифрову обробку сигналів. Типовий шлях сигналу з боку приймання:

антена \rightarrow RF-передній край \rightarrow змішувач/локальний осцилятор \rightarrow IF або базова смуга \rightarrow ADC \rightarrow цифровий передній край \rightarrow DSP/FPGA/GPU/GPP.

У зворотному напрямку для передавання з'являються DAC, цифрове перетворення догори, підсилення і фільтрація. Математично найзручніше працювати з комплексною базовою смугою. Якщо $x_{BB}(t) = I(t) + jQ(t)$, то дійсний RF-сигнал з несною f_c можна записати як

$$x_{RF}(t) = \Re\{x_{BB}(t)e^{j2\pi f_c t}\} = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (20.1)$$

Ця формула є ключем до I/Q-представлення: дві дійсні послідовності $I[n]$ і $Q[n]$ описують амплітуду та фазу вузькосмугового сигналу без явного моделювання швидкої несної.

20.2. Дискретизація і цифрове перетворення донизу

Нехай неперервний сигнал $x(t)$ дискретизується з частотою $f_s = 1/T_s$:

$$x[n] = x(nT_s). \quad (20.2)$$

Для смугообмеженого сигналу потрібна частота дискретизації, достатня для уникнення аліасингу після антиаліасингової фільтрації. У реальній системі важливо відрізнити три твердження:

- теорема Найквіста-Шеннона описує ідеальний математичний випадок;
- реальний ADC має скінченну розрядність, джитер, нелінійність і обмежений SFDR;
- decimation допустиме тільки після низькочастотної фільтрації, яка пригнічує спектральні копії.

Цифровий перетворювач донизу (DDC) зазвичай виконує множення на цифрову комплексну експоненту, фільтрацію і зменшення частоти дискретизації:

$$y[n] = x[n]e^{-j2\pi f_0 n/f_s}, \quad (20.3)$$

$$z[m] = \sum_k h[k]y[mM - k], \quad (20.4)$$

де M - коефіцієнт децимації, а $h[k]$ - імпульсна характеристика низькочастотного фільтра.

20.3. ADC/DAC як математичні обмеження

Ідеалізований N -бітовий рівномірний квантувач має крок

$$\Delta = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2^N}. \quad (20.5)$$

Якщо похибка квантування моделюється рівномірним шумом на $[-\Delta/2, \Delta/2]$, то її дисперсія дорівнює

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (20.6)$$

Для ідеального синусоїдального сигналу часто використовують оцінку

$$\text{SNR}_{\text{dB}} \approx 6.02N + 1.76. \quad (20.7)$$

Це не паспортний опис конкретного пристрою, а sanity check: якщо розрахункові вимоги до динамічного діапазону набагато перевищують можливості ADC, проблема не розв'язується перекладом або програмуванням.

20.4. Вибір обчислювальної платформи як задача компромісу

У SDR-архітектурі одна й та сама математична операція може бути реалізована на різних рівнях. Наприклад, FIR-фільтр

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} b_k x[n-k] \quad (20.8)$$

можна виконувати на CPU, GPU, DSP або FPGA. Вибір залежить не від назви платформи, а від латентності, пропускну здатності, енергії, гнучкості та складності верифікації.

Платформа	Сильна сторона	Типове обмеження	Коли розглядати першою
GPP/CPU	простота розробки, Python/C++ екосистема	латентність і пропускну здатність	прототип, контрольні алгоритми, offline аналіз.
GPU	висока паралельність для великих блоків	передавання даних і latency overhead	батчова обробка, ML/CV, великі FFT.
DSP	спеціалізовані MAC-операції	менша гнучкість екосистеми	поточкова DSP-обробка з помірною латентністю.
FPGA	детермінована latency, pipeline, паралельність	складність розробки і верифікації	DDC/DUC, фільтри, синхронізація, високошвидкісні тракти.
ASIC	ефективність, площа, потужність	майже нульова гнучкість після виготовлення	масове виробництво стабільного дизайну.

20.5. Що перевіряти у перекладі SDR-матеріалу

Для SDR-текстів найбільш руйнівні не стилістичні помилки, а зсуви одиниць і частотних позначень. Мінімальний QA-набір:

1. **Hz, rad/s, cycles/sample.** Перевірити, чи 2π не зник і не з'явився зайвий раз.
2. **Baseband vs RF.** Не перекладати baseband як “основна смуга” в одному місці і “базова смуга” в іншому без рішення словника.
3. **Sample, sample rate, sampling.** У DSP sample = відлік; sampling = дискретизація; sample rate = частота дискретизації.
4. **Decimation/interpolation.** Децимація - це не просто викидання відліків; перед нею потрібна фільтрація.
5. **Power vs amplitude.** Для потужності $10 \log_{10}$, для амплітуди $20 \log_{10}$.

Цей розділ достатній як міст між базовим Fourier/DSP-ядром і більш спеціальними SDR-перекладами. Повний survey треба тримати окремо, бо його цінність - у термінології та архітектурній карті, а не у dated переліках апаратних платформ.

21. Рівняння Максвелла та антенно-RF основа

Джерело / статус. Основні джерела: переклад translation system трьох TeX-модулів Peeter Joot ECE1229 Advanced Antenna Theory: `MaxwellsFieldAndSourceDescription`, `MaxwellsStatement`, `MaxwellsTimeHarmonic`. Тут подано самодостатню нормалізацію без залежності від макросів оригінального репозиторію.

21.1. Поля, джерела і одиниці

Для RF та антенної теорії треба стабілізувати терміни до початку будь-яких задач про хвилі, випромінювання або передавальні лінії.

Позначення	Назва українською	Типова одиниця SI	Коментар
E	напруженість електричного поля	V/m	електричне поле, що діє на заряд.
H	напруженість магнітного поля	A/m	зручна для матеріальних середовищ.
D	електрична індукція, вектор зміщення	C/m ²	пов'язана з E через матеріальне рівняння.
B	магнітна індукція	T	пов'язана з H через проникність.
J	густина електричного струму	A/m ²	джерело у рівнянні Ампера-Максвелла.
ρ_e M, ρ_m	густина електричного заряду магнітний струм і магнітний заряд	C/m ³ формальні	джерело для $\nabla \cdot D$. корисні в еквівалентних задачах і апертурних інтегралах.

21.2. Часова форма рівнянь Максвелла

У симетризованій формі, з формальними магнітними джерелами, рівняння записуються як

$$\nabla \times E = -M - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (21.1a)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (21.1b)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_e, \quad (21.1c)$$

$$\nabla \cdot B = \rho_m. \quad (21.1d)$$

У звичайній електромагнітній моделі без магнітних монополів беруть $\rho_m = 0$ і $M = 0$. Формальні магнітні джерела часто залишають у антенно-теоретичних викладах, бо вони спрощують принцип еквівалентності і формулювання через поверхневі струми.

Для лінійного ізотропного середовища використовують матеріальні рівняння

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad J = \sigma E. \quad (21.2)$$

У вакуумі $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, а швидкість хвилі

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (21.3)$$

21.3. Часо-гармонічна форма

Якщо поля мають гармонічну залежність $e^{j\omega t}$, тобто

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}, \quad (21.4)$$

то похідна за часом переходить у множення на $j\omega$. Тоді

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - j\omega \mathbf{B}, \quad (21.5a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}, \quad (21.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (21.5c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m. \quad (21.5d)$$

Це phasor-форма. В українському тексті можна писати “фазор” після першого пояснення, але треба не плутати його з фазою: фазор - комплексна амплітуда гармонічного поля.

21.4. Плоска хвиля як мінімальна перевірка

У однорідному середовищі без джерел плоска хвиля має вигляд

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (21.6)$$

де \mathbf{k} - хвильовий вектор. Для lossless середовища

$$\|\mathbf{k}\| = \omega \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (21.7)$$

Магнітне поле пов’язане з електричним через хвильовий імпеданс

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (21.8)$$

Ці формули дають дуже швидку перевірку знаків, $j\omega$ -угоди і орієнтації векторного добутку.

21.5. Антена як крайова задача, не як набір рецептів

Для публічного навчального корпусу антени краще вводити як крайові задачі для рівнянь Максвелла. Практична лінія така:

1. визначити геометрію провідників і діелектриків;
2. задати джерела або порти;
3. розв’язати поля з крайовими умовами;
4. обчислити потужність, імпеданс, діаграму спрямованості та узгодження;
5. перевірити розмірності, енергетичний баланс і граничні випадки.

Це корисна інженерна математика. У перекладах треба берегти різницю між “radiation”, “propagation”, “scattering”, “aperture”, “gain”, “directivity”, “efficiency” і “impedance matching”.

22. Багатосенсорне злиття: карта понять і математичне ядро

Джерело / статус. Основне джерело: повний переклад translation system для arXiv:2506.19769, *A Survey of Multi-sensor Fusion Perception for Embodied AI*. Тут подано не повний survey, а практичну математичну карту для спільного довідника. Повний TeX-проект збережено як окремий модуль у incoming_claude_output/ i patched standalone targets.

22.1. Навіщо потрібне злиття

Один сенсор майже завжди має сліпі зони. Камера має багату текстуру, але залежить від освітлення. LiDAR дає геометрію, але має розрідженість і деградацію в частині погодних умов. IMU має високу частоту і локальну динаміку, але дрейфує через зміщення. Радар може бути стійкішим до частини умов, але має нижчу кутову роздільну здатність. Багатосенсорне злиття означає не “змішати все”, а побудувати узгоджену модель стану, вимірювань, часу, координат і невизначеності.

У спільній нотації можна писати

$$x_k \sim p(x_k | x_{k-1}, u_k), \quad z_k^{(i)} \sim p_i(z_k^{(i)} | x_k, \theta_i), \quad (22.1)$$

де x_k - стан системи, $z_k^{(i)}$ - вимір i -го сенсора, а θ_i - параметри калібрування цього сенсора.

22.2. Координатні системи і калібрування

Для сенсорного злиття критичним є не тільки алгоритм фільтрації, а й геометрія. Нехай $T_{AB} \in \text{SE}(3)$ переводить координати з системи B у систему A :

$$\begin{bmatrix} p_A \\ 1 \end{bmatrix} = T_{AB} \begin{bmatrix} p_B \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T_{AB} = \begin{bmatrix} R_{AB} & t_{AB} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22.2)$$

Тоді типова модель вимірювання має вигляд

$$z_k^{(i)} = h_i(T_{WB,k}, T_{BS_i}, \theta_i, m) + n_k^{(i)}, \quad (22.3)$$

де $T_{WB,k}$ - поза корпусу у світовій системі, T_{BS_i} - екстринсики сенсора відносно корпусу, m - карта або об’єктна сцена, $n_k^{(i)}$ - шум вимірювання.

Помилка у T_{BS_i} часто поводить як систематична похибка. Її не можна виправити “кращим нейромережевим блоком”, якщо в навчанні або фільтрі не враховано калібрування.

22.3. Синхронізація часу

Асинхронність між сенсорами створює помилку, яка росте зі швидкістю руху і кутовою швидкістю. Якщо сенсор має часовий offset τ_i , то модель стає

$$z_k^{(i)} \approx h_i(x(t_k + \tau_i)) + n_k^{(i)}. \quad (22.4)$$

Для малого τ_i можна лінеаризувати

$$h_i(x(t_k + \tau_i)) \approx h_i(x(t_k)) + H_i \dot{x}(t_k) \tau_i. \quad (22.5)$$

Ця формула пояснює, чому time offset має ставати частиною калібрувального або state-estimation апарату в системах з швидкою динамікою.

22.4. Рівні злиття

У survey-літературі часто розрізняють кілька рівнів злиття. Для інженерного читача корисно тримати таку карту:

Рівень	Що зливається	Математичний ризик
Raw/point-level	відліки, пікселі, точки, хмари точок	різні одиниці, частоти, геометрії, затримки.
Feature-level	ознаки CNN/transformer, BEV-ознаки, voxel features	ознаки можуть бути не калібровані як фізичні величини.
Object/region-level	bounding boxes, tracks, сегменти, об'єкти	data association і кореляція похибок.
Decision-level	класи, гіпотези, ймовірності, треки	подвійний облік evidence, погано калібровані ймовірності.
Temporal fusion	послідовність кадрів/станів	drift, затримки, motion compensation.
Multi-agent fusion	інформація від кількох агентів або вузлів	невідомі координатні системи, затримки, ненадійні канали.

22.5. Коваріаційне злиття як мінімальна модель

Якщо два незалежні оцінювачі дають \hat{x}_1, P_1 та \hat{x}_2, P_2 , то у найпростішому випадку оптимальне лінійне злиття за гаусових похибок:

$$P^{-1} = P_1^{-1} + P_2^{-1}, \quad (22.6)$$

$$\hat{x} = P(P_1^{-1}\hat{x}_1 + P_2^{-1}\hat{x}_2). \quad (22.7)$$

Ця формула небезпечна, якщо оцінки корельовані. Тоді треба або явно моделювати крос-коваріації, або використовувати консервативніші методи. Для порівняння це важливо: “independent” не можна пропускати як стилістичну дрібницю.

22.6. Data association i gating

Для об'єктного злиття треба вирішити, які виміри відповідають одному об'єкту. Нехай прогнозований вимір \hat{z} має інноваційну коваріацію S . Тоді Mahalanobis distance

$$d^2 = (z - \hat{z})^T S^{-1} (z - \hat{z}) \quad (22.8)$$

використовується для gating: вимір приймається як кандидат, якщо d^2 нижче порога, узгодженого з χ^2 -розподілом. Це та сама математика, що NIS у фільтрі Калмана, тому термінологію треба робити однаковою.

22.7. Мінімальна QA-карта для sensor-fusion перекладів

1. **Frame labels.** Перевірити всі T_{AB} : з якої системи в яку переводить матриця.
2. **Time indices.** Не губити k , $k - 1$, t_k , τ .
3. **Covariance vs correlation.** Коваріація - матриця розмірних величин; correlation - нормована безрозмірна.
4. **Fusion vs filtering vs smoothing.** Злиття даних - ширше; фільтрація оцінює поточний стан; згладжування використовує також майбутні виміри.
5. **Detection vs estimation.** Detection = детектування/виявлення; estimation = оцінювання.
6. **Robustness.** Не перекладати як загальне "міцність"; у технічному тексті зазвичай "робастність" або "стійкість до ...".

22.8. Позиція в черзі

Повний survey translation system вже має цінність як глосарний і оглядовий документ. Для подальшої роботи більш корисно не повторно перекладати його, а витягнути з нього словник і пов'язати з ESKF/SLAM/robotics модулями. Наступним після цього має бути event-based sensor fusion / odometry або practical robotics localization, але тільки після стабілізації позначень SE(3), IMU, time offset і covariance gating.

23. Хвильове рівняння, енергія, керованість і стабілізація

Джерело / статус. Основне джерело: переклад translation system для розділу 1 монографії Enrique Zuazua, *Exact Controllability and Stabilization of the Wave Equation*, arXiv:2402.17894. Тут подано інтегрований PDE/control-міст для основного довідника. Повний переклад розділу збережено як окремий джерельний модуль.

23.1. Базова задача

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - обмежена область, а $y = y(x, t)$ - невідома функція. Базове хвильове рівняння з умовою Діріхле:

$$y_{tt} - \Delta y = h \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \quad (23.1a)$$

$$y = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \times (0, T), \quad (23.1b)$$

$$y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1 \quad \text{в } \Omega. \quad (23.1c)$$

Тут h - джерело або керування. Природний енергетичний простір для початкових даних:

$$(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (23.2)$$

23.2. Енергія і збереження

Для однорідного рівняння без джерела енергія

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y_t(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2) dx \quad (23.3)$$

зберігається:

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (23.4)$$

Це перший sanity check для будь-якого чисельного або перекладного матеріалу про хвилі. Якщо виведення дисипації або стабілізації не пояснює, куди йде енергія, формула підозріла.

23.3. Точна керованість

У формі exact controllability задача ставиться так: для заданих початкового і кінцевого станів знайти керування h таке, що розв'язок досягає цілі в момент T :

$$y(T) = z^0, \quad y_t(T) = z^1. \quad (23.5)$$

Нетривіальність задачі залежить від трьох речей:

1. часу T ;
2. того, де саме дозволене керування: у всій області, у підобласті $\omega \subset \Omega$, або на границі;
3. функціональних просторів для даних і керувань.

Коли керування локалізоване, часто пишуть

$$y_{tt} - \Delta y = \chi_\omega h, \quad (23.6)$$

де χ_ω - характеристична функція підобласті керування. Це вже не тривіальна задача інтерполяції в часі: геометрія області та час T мають значення.

23.4. Стабілізація через демпфування

Стабілізація питає не “як потрапити в точний стан”, а “як зробити так, щоб енергія спадала”. Базова модель із демпфуванням:

$$y_{tt} - \Delta y + a(x)y_t = 0, \quad (23.7)$$

де $a(x) \geq 0$. Тоді

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\Omega} y_t (y_{tt} - \Delta y) dx \quad (23.8)$$

$$= - \int_{\Omega} a(x) |y_t|^2 dx \leq 0. \quad (23.9)$$

Отже, енергія не зростає. Для експоненційного затухання потрібні сильніші умови, часто сформульовані через геометрію променів, observability inequality або унікальне продовження.

23.5. Спостережуваність як двоїста форма

У Hilbert Uniqueness Method (HUM) керованість пов’язується з нерівністю спостережуваності для adjoint або однорідного рівняння. У спрощеному вигляді:

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi_t(x, t)|^2 dx dt, \quad (23.10)$$

де ϕ - розв’язок однорідного хвильового рівняння. Зміст: вся початкова енергія має бути “видима” через спостереження на ω протягом часу T .

Для перекладу важливо не змішувати:

- controllability = керованість;
- observability = спостережуваність;
- stabilization = стабілізація;
- damping = демпфування;
- dissipation = дисипація.

23.6. Чисельні перевірки

Для FDM/FEM-перекладів цього матеріалу мінімальні перевірки:

1. **Energy check.** Без демпфування дискретна енергія не має системно рости.
2. **CFL.** Для явних схем часовий крок має задовольняти умову стійкості.

3. **Boundary conditions.** Dirichlet і Neumann не можна міняти місцями у тексті або коді.
4. **Control support.** ω - підобласть, Γ - частина границі; це різні типи керування.
5. **Units.** У хвильовому рівнянні з фізичною швидкістю c записують $y_{tt} - c^2 \Delta y = 0$; нормалізований випадок $c = 1$ треба явно зазначати.

23.7. Позиція в корпусі

Цей блок важливий не через одну конкретну application story, а тому що він зв'язує PDE, енергетичні методи, оптимальне керування, стабільність, чисельні схеми і функціональний аналіз. Після FDM/FEM-основи і state-space control він має стати одним із головних мостів до математичного моделювання фізичних систем.

24. Цифрова модуляція: практичне ядро для SDR/DSP

Джерело / статус. Основа: вже наявна українська доріжка PySDR content-ukraine, з нормалізацією у TeX і додаванням формульної рамки. Це навчальний модуль про символи, сузір'я, I/Q-представлення і базову смугу.

24.1. Символи, біти і спектральна ефективність

Цифрова модуляція передає інформацію не безпосередньо як “текст”, а як послідовність *символів*. Символ - це один елемент скінченного набору сигналів. Якщо сузір'я має M можливих символів, то один символ несе

$$b = \log_2 M$$

бітів, якщо M є степенем двійки і всі символи використовуються рівноймовірно. Якщо символи передаються з швидкістю R_s symbols/s, то ідеальна бітова швидкість до кодування дорівнює

$$R_b = R_s \log_2 M.$$

Практичний компроміс: збільшення M підвищує spectral efficiency, але зменшує відстань між точками сузір'я при фіксованій потужності. Тому сигнал стає чутливішим до шуму, phase error, frequency offset і нелінійностей підсилювача.

24.2. Baseband та passband

У SDR найзручніше мислити у комплексній базовій смузі. Нехай комплексний baseband-сигнал

$$x(t) = I(t) + jQ(t).$$

Реальний passband-сигнал з несучою частотою f_c можна записати як

$$s(t) = \Re\{x(t)e^{j2\pi f_c t}\} = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t).$$

Ця формула є головним мостом між математикою DSP і фізичним RF-ланцюгом: I/Q-дані живуть у цифровому baseband, а антена випромінює реальний passband-сигнал.

24.3. ASK, PSK, FSK, QAM

24.3.1. ASK

Amplitude-shift keying змінює амплітуду символу. Для M -ASK множина символів може бути

$$\mathcal{S}_{ASK} = \{a_1, a_2, \dots, a_M\} \subset \mathbb{R}.$$

Перевага - простота. Недолік - висока чутливість до amplitude fading і gain error.

24.3.2. PSK

Phase-shift keying тримає амплітуду сталою і змінює фазу:

$$s_k = e^{j2\pi k/M}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Для BPSK маємо дві точки $\{+1, -1\}$. Для QPSK - чотири фази; типово один символ несе 2 bits.

24.3.3. QAM

Quadrature amplitude modulation змінює і I , і Q . Для квадратного M -QAM точки лежать на ґратці в комплексній площині:

$$s_{m,n} = a_m + ja_n.$$

QAM ефективний за спектром, але потребує кращого SNR і акуратнішої синхронізації. Для normalized constellation середню енергію символу часто приводять до

$$E_s = \mathbb{E}[|s|^2] = 1.$$

24.3.4. FSK

Frequency-shift keying кодує символи різними частотами. Для ортогонального FSK різницю частот обирають так, щоб інтеграл взаємного добутку символів за інтервал символу був нульовий. На практиці FSK може бути робастним, але зазвичай менш spectral-efficient.

24.4. Сузір'я та мінімальна відстань

Constellation diagram показує множину можливих I/Q -символів. Для AWGN-каналу груба помилка часто визначається мінімальною евклідовою відстанню

$$d_{\min} = \min_{i \neq k} |s_i - s_k|.$$

Більший d_{\min} при тій самій енергії означає меншу ймовірність помилки. Тому modulation design постійно балансує між $\log_2 M$, bandwidth, transmit power, robustness і hardware limits.

24.5. Імпульсне формування

Символи не можна просто передавати як прямокутні імпульси без спектральної ціни: різкі фронти мають широкий спектр. Тому вводять shaping pulse $p(t)$:

$$x(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s),$$

де a_k - комплексні символи, T_s - symbol period. Класична умова відсутності між-символьної інтерференції у моменти sampling:

$$p(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Raised-cosine і root-raised-cosine filters використовуються саме для керування смугою та ISI.

24.6. Практичні перевірки для перекладача

1. Не перекладати I/Q як “я/питання”. Це in-phase/quadrature, тобто синфазна і квадратурна компоненти.
2. *Symbol* у цьому контексті - *символ*, не “знак” у типографському сенсі.
3. *Constellation* - *сузір'я*; перше вживання бажано пояснити як діаграму можливих I/Q-точок.
4. *Baseband* у цьому корпусі фіксуємо як *базова смуга*; *passband* - *смуга перенесення* або *смуговий сигнал* залежно від речення.
5. Формули з $2\pi f_c t$ не міняти на $\omega_c t$, якщо source цього не робить; якщо source має ω_c , тоді $\omega_c = 2\pi f_c$ треба явно вказати.

25. Інформація, канали і кодування: мінімальне прикладне ядро

Джерело / статус. Цей розділ закриває прогалину між DSP/SDR і practical communication systems. Він не є інструкцією для конкретного радіоканалу; це математична основа: entropy, mutual information, channel capacity, coding rate, BER/FER і interleaving.

25.1. Ентропія

Для дискретної випадкової величини X з імовірностями $p(x)$ ентропія Шеннона дорівнює

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log_2 p(x).$$

Вона вимірює середню кількість bits of uncertainty. Якщо X рівномірно набуває M значень, то

$$H(X) = \log_2 M.$$

У модуляції це пов'язано з формулою $\log_2 M$ bits/symbol, але entropy враховує також нерівномірні ймовірності символів.

25.2. Умовна ентропія і взаємна інформація

Якщо Y - спостереження на виході каналу, то умовна ентропія

$$H(X | Y)$$

описує невизначеність про переданий символ після отримання Y . Взаємна інформація

$$I(X; Y) = H(X) - H(X | Y)$$

вимірює, скільки інформації про X реально принесло Y . Також

$$I(X; Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log_2 \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}.$$

25.3. Пропускна здатність каналу

Capacity - це максимум взаємної інформації за розподілами входу:

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y).$$

Для ідеалізованого AWGN-каналу зі смугою B і відношенням сигнал/шум SNR:

$$C = B \log_2(1 + \text{SNR}) \text{ bits/s}.$$

Це не рецепт для конкретної системи, а межа: якщо raw data rate вимагає більше, ніж дозволяють bandwidth і SNR, то жодна магія coding не зробить канал надійним без зміни умов.

25.4. Coding rate

Код перетворює k інформаційних bits на n transmitted bits. Швидкість коду:

$$R = \frac{k}{n}.$$

Нижча R додає redundancy і потенційно зменшує error rate, але збільшує overhead. У practical systems дивляться не лише BER, а й frame error rate:

$$\text{BER} = \frac{N_{\text{bit,error}}}{N_{\text{bit,total}}}, \quad \text{FER} = \frac{N_{\text{frame,error}}}{N_{\text{frame,total}}}.$$

25.5. Hard i soft decisions

Hard-decision decoder отримує вже квантований біт: 0 або 1. Soft-decision decoder отримує reliability. Типовий log-likelihood ratio:

$$L(b) = \log \frac{P(b = 1 | y)}{P(b = 0 | y)}.$$

Знак L дає рішення, а модуль $|L|$ дає впевненість. Soft information часто дає значний виграш, але вимагає акуратнішої реалізації і кращого обліку noise variance.

25.6. Interleaving

Interleaver переставляє bits або symbols перед передачею, щоб burst errors після deinterleaving стали більш розсіяними. Математично interleaver - перестановка

$$\pi : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}.$$

Він не створює інформацію і сам по собі не виправляє помилки; він робить помилки більш придатними для error-correcting code.

25.7. Що віддати local TeX worker

Цей розділ добре підходить для local TeX worker-extension: пройти PySDR channel_coding.rst, витягнути definitions, перетворити exercises/HTML details у TeX enumerate, і додати glossary diff. local TeX worker не має сам змінювати coding formulas; він має конвертувати структуру і позначати `[[CHECK: math]]`, якщо джерело містить неоднозначну формулу.

26. Гаусівський байєсівський фільтр як міст до Kalman filter

Джерело / статус. Основа: source-backed material з Labbe, *Kalman and Bayesian Filters in Python*, staged як notebook Markdown. Тут подано стислий український TeX-модуль: не повний переклад глави, а формульний міст від discrete Bayes до Kalman.

26.1. Чому гаусіани замінюють гістограми

Discrete Bayes filter може зберігати belief як гістограму: кожна комірка відповідає можливому положенню, а її значення - імовірності. Це інтуїтивно, але дорого за пам'яттю і обчисленнями. Якщо невизначеність добре апроксимується нормальним розподілом, belief можна подати двома числами:

$$x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

У прикладних задачах це часто не просто зручність. Це робить фільтр рекурсивним, компактним і придатним для реального часу.

26.2. Prediction: сума гаусіанів

Нехай попереднє положення

$$x_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2),$$

а модель руху за один крок дає приріст

$$f_x \sim \mathcal{N}(\mu_f, \sigma_f^2).$$

Якщо похибки незалежні, prior після prediction:

$$\bar{x}_k = x_{k-1} + f_x,$$

тобто

$$\bar{x}_k \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_f, \sigma_x^2 + \sigma_f^2).$$

Сенс variance update: prediction додає невизначеність. Навіть якщо середнє рухається правильно, модель руху не є точною.

26.3. Update: добуток гаусіанів

Нехай prior

$$\bar{x} \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2),$$

а measurement likelihood

$$z \sim \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2).$$

Добуток двох гаусіанів, після нормування, знову є гаусіаном:

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}^2 \mu_z + \sigma_z^2 \bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2},$$

$$\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2 \sigma_z^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}.$$

Еквівалентна форма через Kalman gain:

$$K = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2},$$

$$\mu = \bar{\mu} + K(\mu_z - \bar{\mu}), \quad \sigma^2 = (1 - K)\bar{\sigma}^2.$$

26.4. Скалярний алгоритм

```
# scalar Gaussian Bayes / one-dimensional Kalman skeleton
# x: mean, P: variance, Q: process variance, R: measurement variance
# u: predicted motion increment, z: measurement

# predict
x = x + u
P = P + Q

# update
K = P / (P + R)
y = z - x
x = x + K*y
P = (1 - K)*P
```

Це не “toy” у поганому сенсі. Це мінімальний випадок тієї самої логіки, яка в багатовимірному фільтрі стає

$$\bar{x}_k = Fx_{k-1} + Bu_k, \quad \bar{P}_k = FP_{k-1}F^T + Q,$$

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k H^T + R)^{-1}.$$

26.5. Термінологія

English	Ukrainian
belief	переконання / імовірнісна оцінка
prior	апріорна оцінка
posterior	апостеріорна оцінка
likelihood	правдоподібність
process noise	шум процесу
measurement noise	шум вимірювання
variance	дисперсія
standard deviation	стандартне відхилення
Kalman gain	коефіцієнт Калмана
innovation / residual	інновація / залишок

26.6. Перевірки

1. Variance не має ставати від'ємною.
2. Prediction збільшує або не зменшує uncertainty, якщо $Q \succeq 0$.
3. Update зменшує uncertainty у скалярному випадку, якщо $R > 0$.

4. Якщо measurement noise дуже великий, $K \rightarrow 0$ і measurement майже ігнорується.
5. Якщо prior variance дуже великий, $K \rightarrow 1$ і measurement домінує.

27. State-space моделі і дискретизація для фільтрів та керування

Джерело / статус. Основа: Labbe Kalman math material + стандартна state-space нотація з control/estim. corpus. Мета - дати перекладачам і локальним агентам стабільний український TeX-шаблон для $\dot{x} = Ax + Bu + w$ та $x_k = Fx_{k-1} + B_k u_k + w_k$.

27.1. Неперервна модель

Для лінійної системи стан $x(t) \in \mathbb{R}^n$ часто описують як

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t),$$

де A - matrix of system dynamics, B - input matrix, u - control/input vector, w - process disturbance/noise.

Вимірювання:

$$z(t) = Hx(t) + v(t),$$

де H проектує стан у простір вимірювань, а v - measurement noise.

27.2. Дискретна модель

Kalman filter у цифровій реалізації працює з дискретними ероч:

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k,$$

$$z_k = H_k x_k + v_k.$$

Для time-invariant continuous model без зміни A на інтервалі Δt :

$$F = e^{A\Delta t}.$$

Якщо $A^2 = 0$ для простої constant-velocity моделі, тоді

$$e^{A\Delta t} = I + A\Delta t.$$

27.3. Constant velocity model

Для стану

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix},$$

маємо

$$\dot{p} = v, \quad \dot{v} = 0.$$

Отже

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prediction:

$$\begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix}.$$

27.4. Constant acceleration input

Якщо acceleration a є входом, то

$$p_k = p_{k-1} + v_{k-1}\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2, \quad v_k = v_{k-1} + a\Delta t.$$

Тому

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix}.$$

27.5. Process noise covariance

Найнебезпечніша помилка у перекладах Kalman material - плутати “шум датчика” і “шум моделі”. Measurement noise R описує неточність z_k . Process noise Q описує невірність моделі переходу. Для white acceleration noise з spectral density q у constant-velocity model часто отримують

$$Q = q \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^3}{3} & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \frac{\Delta t^2}{2} & \Delta t \end{bmatrix}.$$

Якщо натомість acceleration noise моделюється як дискретний sample з variance σ_a^2 , тоді інша типова форма:

$$Q = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4} & \frac{\Delta t^3}{2} \\ \frac{\Delta t^3}{2} & \Delta t^2 \end{bmatrix}.$$

Ці дві формули не можна бездумно змішувати: вони відповідають різним моделям шуму.

27.6. Перевірки розмірностей

Якщо p має одиниці meters, а v має meters/second, то елементи Q мають відповідати covariance одиницям:

$$Q_{11} : m^2, \quad Q_{12} : \frac{m^2}{s}, \quad Q_{22} : \frac{m^2}{s^2}.$$

Ця перевірка часто ловить неправильні степені Δt .

27.7. Що має робити local TeX worker

local TeX worker-доріжка може автоматично проходити source-файли і шукати небезпечні патерни:

```
grep -R "dt\^4\|dt\^3\|Delta_t\^4\|Delta_t\^3" source_uk/
grep -R "process_noise\|measurement_noisешум\|_процесушум\|_вимір" source_uk/
```

Потім вона має створювати маленькі CHECK_REPORT.md з рядками, а не самовільно переписувати формули.

28. Хвильове рівняння: boundary та interior controllability як практичний міст

Джерело / статус. Bridge-розділ. Це не повний source-preserved переклад розділів 2–3 Zuazua; відповідні chapter02_uk.tex і chapter03_uk.tex не були в завантаженому ZIP.

Базова модель — хвильове рівняння в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з границею Γ :

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y = 0, & (x, t) \in \Gamma \times (0, T), \\ y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1. \end{cases} \quad (28.1)$$

Енергія природного розв’язку дорівнює

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y_t|^2 + |\nabla y|^2) \, dx. \quad (28.2)$$

Для однорідної граничної умови Діріхле маємо збереження $E(t) = E(0)$. Це перший тест на правильність знаків, граничних умов і часової дискретизації.

28.1. Граничне керування

У boundary-control постановці керування діє на частині границі $\Gamma_0 \subset \Gamma$:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0, & Q = \Omega \times (0, T), \\ y = v, & \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T), \\ y = 0, & \Sigma_1 = (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T), \\ y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1. \end{cases} \quad (28.3)$$

Точна керованість до нуля означає: для кожної пари початкових даних існує v таке, що

$$y(T) = 0, \quad y_t(T) = 0. \quad (28.4)$$

Через оборотність хвильового рівняння це еквівалентно можливості перейти між двома довільними допустимими станами за час T .

28.2. HUM як операторна схема

HUM-побудова замінює пошук керування на задачу спостережуваності для спряженої однорідної задачі. Нерівність спостережуваності має форму

$$\|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\partial_\nu \phi|^2 \, d\Gamma \, dt. \quad (28.5)$$

Інженерна інтерпретація: щоб керувати всіма модами системи, дія на Γ_0 за час T має бачити всю енергію спряженої хвилі.

28.3. Внутрішнє локалізоване керування

Для internal control керування діє в підобласті $\omega \subset \Omega$:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = \chi_\omega u, & (x, t) \in Q, \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1. \end{cases} \quad (28.6)$$

Тоді спостережуваність для спряженої задачі має внутрішній вигляд:

$$\|\phi(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi_t(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_T \int_0^T \int_\omega |\phi(x, t)|^2 \, dx \, dt. \quad (28.7)$$

28.4. Практичні перевірки

1. Для некерованого рівняння енергія має зберігатися до чисельної похибки.
2. Boundary control живе на $\Gamma_0 \times (0, T)$, internal control — на $\omega \times (0, T)$.
3. Через скінченну швидкість поширення не можна вимагати керованості за довільно малий час.
4. Невидимі моди або промені руйнують observability inequality.

29. РЧ та антени: від Максвелла до решіток і вимірюваних величин

Джерело / статус. Bridge-розділ. Фактичний ZIP має лише три Maxwell-модулі. Заявлені Lecture 1, polarization, reciprocity, Chebyshev arrays, wire antennas, RCS/EIRP і duality не були в архіві.

Антенна теорія починається з рівнянь Максвелла. У частотній області при часовій залежності $e^{j\omega t}$ маємо фазорну форму

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (29.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}, \quad (29.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (29.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m. \quad (29.4)$$

Для лінійного ізотропного середовища

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (29.5)$$

29.1. Плоска хвиля і хвильовий імпеданс

Для плоскої хвилі з напрямом поширення $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (29.6)$$

де $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — хвильовий імпеданс середовища.

29.2. Поляризація

Якщо

$$\mathbf{E}(t) = \Re\{(E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y e^{j\delta} \hat{\mathbf{y}}) e^{j\omega t}\}, \quad (29.7)$$

то $\delta = 0$ або π дає лінійну поляризацію; рівні амплітуди і $\delta = \pm\pi/2$ дають кругову поляризацію; загальний випадок — еліптична поляризація.

29.3. Діаграма спрямованості, підсилення, EIRP

Нехай $U(\theta, \varphi)$ — інтенсивність випромінювання. Спрямованість

$$D(\theta, \varphi) = \frac{4\pi U(\theta, \varphi)}{P_{\text{rad}}}. \quad (29.8)$$

Підсилення G враховує також ефективність η_a :

$$G(\theta, \varphi) = \eta_a D(\theta, \varphi), \quad \text{EIRP} = P_t G_t. \quad (29.9)$$

29.4. Решітки і множник решітки

Для лінійної решітки з N однакових елементів на відстані d і фазовим кроком β множник решітки

$$AF(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{jn(kd \cos \theta + \beta)}. \quad (29.10)$$

Ваги w_n задають компроміс між шириною головної пелюстки та рівнем бокових пелюсток.

29.5. Радарний переріз

Радарний переріз σ визначає еквівалентну площу розсіювання в дальньому полі. Для ідеалізованої моностатичної формули

$$P_r \propto \frac{P_t G_t G_r \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}. \quad (29.11)$$

У цьому довіднику ця формула потрібна для dimensional literacy: які величини входять, які одиниці мають, чому дальність входить як R^{-4} у простій моделі.

29.6. Перевірки перекладу

1. **D** має одиниці C/m^2 , не C/m^3 .
2. **J** має одиниці A/m^2 .
3. **E** — V/m , **H** — A/m .

30. Event-based sensor fusion та одометрія: стислий TeX-рівень

Джерело / статус. Bridge-розділ. Заявлений повний переклад sensor_fusion_2410.15480 у фактичному ZIP відсутній.

Event camera не видає кадри з фіксованою частотою. Вона видає події

$$e_k = (x_k, y_k, t_k, p_k), \quad p_k \in \{-1, +1\}, \quad (30.1)$$

коли зміна логарифмічної яскравості перевищує поріг:

$$\Delta L(x_k, y_k, t_k) \approx p_k C. \quad (30.2)$$

Це дає високу часову роздільність і малу затримку, але ускладнює фільтрацію: дані асинхронні, шумові і не мають природного кадру.

30.1. Стан і вимірювання

Типовий стан платформи для одометрії:

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{R}_{WB}, \mathbf{p}_{WB}, \mathbf{v}_{WB}, \mathbf{b}_g, \mathbf{b}_a, \dots\}. \quad (30.3)$$

IMU дає вимірювання

$$\tilde{\omega} = \omega + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g, \quad (30.4)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{R}_{BW}(\mathbf{a}_W - \mathbf{g}) + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a. \quad (30.5)$$

Event camera дає часово щільні edge-like constraints; кадрована камера дає photometric або feature constraints; LiDAR дає geometry constraints.

30.2. Time surface

Один спосіб перетворити події на диференційовний об'єкт — time surface:

$$S(x, y, t) = \exp\left(-\frac{t - t_{\text{last}}(x, y)}{\tau}\right). \quad (30.6)$$

30.3. Optimization view

У sliding-window оцінюванні стан визначають як мінімізатор суми факторів:

$$\min_{\mathbf{x}_{0:K}} \left(\sum_i \|\mathbf{r}_i^{\text{imu}}\|_{\mathbf{P}_i^{-1}}^2 + \sum_j \rho(\|\mathbf{r}_j^{\text{event}}\|_{\mathbf{R}_j^{-1}}^2) + \sum_\ell \rho(\|\mathbf{r}_\ell^{\text{geom}}\|_{\mathbf{S}_\ell^{-1}}^2) \right). \quad (30.7)$$

30.4. Часова синхронізація

Якщо сенсори мають часовий зсув Δt_s , вимірювання фактично відповідає стану $\mathbf{x}(t + \Delta t_s)$. Неврахований time offset створює систематичні residuals, тому Δt_s часто оцінюють як калібрувальний параметр.

31. Робастне фільтрування, gating та outlier rejection

Джерело / статус. Bridge-розділ. Заявлений roth_robust_filter_1703.02428 у фактичному ZIP відсутній.

Класичний Kalman update припускає гаусівський шум і коректну асоціацію вимірювань. У реальних даних з'являються outliers: помилкові відповідності, втрати калібрування, тимчасова несинхронність, насичення сенсора, пропуски та важкі хвости шуму.

Для інновації

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \quad (31.1)$$

та innovation covariance

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k, \quad (31.2)$$

нормалізована квадратична інновація дорівнює

$$\epsilon_k = \mathbf{r}_k^\top \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{r}_k. \quad (31.3)$$

31.1. Gating

Просте правило відсікання:

$$\epsilon_k \leq \gamma_m(\alpha), \quad (31.4)$$

де $\gamma_m(\alpha)$ — квантиль χ_m^2 для рівня довіри α .

31.2. М-оцінювання

Замість квадратичної функції втрат $\rho(s) = s^2$ використовують robust loss:

$$\min_{\delta \mathbf{x}} \sum_i \rho(\|\mathbf{r}_i + \mathbf{J}_i \delta \mathbf{x}\|_{\mathbf{W}_i}^2). \quad (31.5)$$

Huber loss поводить ся квадратично для малих residuals і лінійно для великих:

$$\rho(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}a^2, & |a| \leq c, \\ c(|a| - \frac{1}{2}c), & |a| > c. \end{cases} \quad (31.6)$$

31.3. H_∞ -інтуїція

У H_∞ -фільтруванні питання ставлять не як мінімізацію середнього квадрата, а як обмеження найгіршої дії збурення на похибку:

$$\frac{\sum_k \|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{Q}}^2}{\sum_k \|\mathbf{w}_k\|^2 + \sum_k \|\mathbf{v}_k\|^2} < \gamma^2. \quad (31.7)$$

Outlier — викид; gating — відсікання за порогом; robust loss — робастна функція втрат; heavy-tailed noise — шум з важкими хвостами; innovation — інновація; residual — залишок.

32. Autonomous robots: сенсори, бачення, локалізація, карти, SLAM і планування

Джерело / статус. Bridge-розділ. Заявлені 6 розділів autonomous_robots_correll у фактичному ZIP відсутні.

Робототехнічна автономія розкладається на стек:

$$\text{сенсори} \rightarrow \text{оцінювання стану} \rightarrow \text{карта} \rightarrow \text{план} \rightarrow \text{керування}. \quad (32.1)$$

Це не одна модель, а набір зв'язаних математичних задач із різними часовими масштабами.

32.1. Сенсори

Сенсорна модель має форму

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}) + \mathbf{v}_k, \quad (32.2)$$

де \mathbf{x}_k — стан, \mathbf{m} — карта або параметри середовища, \mathbf{v}_k — шум.

32.2. Комп'ютерний зір

Пінхол-модель камери:

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} [\mathbf{R} \quad \mathbf{t}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (32.3)$$

Для двох зображень епіполярне обмеження

$$\mathbf{x}_2^T \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = 0 \quad (32.4)$$

дає базовий constraint для matching, pose estimation і visual odometry.

32.3. Локалізація

У probabilistic robotics локалізація підтримує belief

$$\text{bel}(\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{z}_{1:k}, \mathbf{u}_{1:k}). \quad (32.5)$$

Bayes filter має prediction/update структури:

$$\overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_k) = \int p(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \text{bel}(\mathbf{x}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (32.6)$$

$$\text{bel}(\mathbf{x}_k) = \eta p(\mathbf{z}_k \mid \mathbf{x}_k) \overline{\text{bel}}(\mathbf{x}_k). \quad (32.7)$$

32.4. Карти і SLAM

SLAM оцінює і траєкторію, і карту:

$$p(\mathbf{x}_{0:K}, \mathbf{m} \mid \mathbf{z}_{1:K}, \mathbf{u}_{1:K}). \quad (32.8)$$

Graph-SLAM записує це як задачу найменших квадратів:

$$\min_{\mathbf{x}_{0:K}, \mathbf{m}} \sum_i \|\mathbf{r}_i^{\text{motion}}\|_{\mathbf{Q}_i^{-1}}^2 + \sum_j \|\mathbf{r}_j^{\text{obs}}\|_{\mathbf{R}_j^{-1}}^2. \quad (32.9)$$

32.5. Планування шляху

У дискретному графі $G = (V, E)$ базова задача:

$$\min_{\pi=(v_0, \dots, v_N)} \sum_{i=0}^{N-1} c(v_i, v_{i+1}). \quad (32.10)$$

Dijkstra гарантує оптимальність для невід’ємних вартостей. A^* додає евристику $h(v)$:

$$f(v) = g(v) + h(v). \quad (32.11)$$

Якщо h admissible, A^* зберігає оптимальність і часто зменшує кількість розглянутих вузлів.

Localization — локалізація; mapping — побудова карти; path planning — планування шляху; occupancy grid — сітка зайнятості; loop closure — замикання циклу; pose graph — граф поз.

33. Zuazua 1-3: лінійна керованість хвильового рівняння

Джерело / статус. Source-preserved модуль: paper_modules/zuazua_wave_ch01_03_ua/. У модулі зібрано розділи 1-3 з translation system source package і скомпільовано wrapper PDF з placeholder-блоками для відсутніх рисунків.

Цей блок потрібний не як “теорія заради теорії”, а як чистий міст між PDE, енергією, спостережуваністю і керуванням. Для прикладної математики це один із найкращих способів навчити читача мислити про хвилі як про динамічну систему.

33.1. Мінімальна модель

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з достатньо гладкою межею Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Базова система:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = h(x, t), & (x, t) \in Q, \\ y = 0, & (x, t) \in \Sigma, \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (33.1)$$

Енергетичний простір для задачі Діріхле:

$$(y, y') \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (33.2)$$

а природна енергія

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y'(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2) dx. \quad (33.3)$$

33.2. Точна керованість як інженерна структура

Точна керованість означає: для заданих початкових і кінцевих станів потрібно знайти керування, яке переводить систему між ними за час T . Для нульового кінцевого стану:

$$y(T) = 0, \quad y'(T) = 0. \quad (33.4)$$

Важливо, що це не чисельний “трюк”, а твердження про оператор: відображення від керування до кінцевого стану має бути сюр’єктивним у потрібному просторі.

33.3. HUM: головний шаблон

Hilbert Uniqueness Method зводить керованість до нерівності спостережуваності для спряженої однорідної хвильової системи. Типовий вигляд:

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt, \quad (33.5)$$

де $\Gamma_0 \subset \Gamma$ — частина межі, на якій доступне спостереження або граничне керування, а ϕ — розв’язок спряженої задачі. Для внутрішнього керування аналогічна форма має інтеграл по $\omega \times (0, T)$:

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi(x, t)|^2 dx dt. \quad (33.6)$$

33.4. Гранична проти внутрішньої керованості

Гранична керованість діє через значення на частині межі. Внутрішня керованість діє через джерело на підобласті $\omega \subset \Omega$:

$$y'' - \Delta y = h\chi_{\omega}. \quad (33.7)$$

Обидва випадки мають однакову логіку: знайти геометричні умови, за яких кожна релевантна хвиля “видима” за час T . Якщо є невидимі промені або занадто малий час, нерівність спостережуваності руйнується.

33.5. Що перекладати далі

Для практичного корпусу достатньо мати розділи 1–3 як повний перший том “лінійної теорії”. Наступний корисний шар: чисельні схеми для хвильового рівняння, дискретна енергія, CFL, absorbing boundary conditions, inverse/observer problems. Це з’єднає Zuazua з FDM/FEM матеріалами і зробить блок корисним для симуляцій та перевірки алгоритмів.

34. Антени, Максвелл, поляризація, масиви

Джерело / статус. translation system source package: antenna_peeterjoot/. Raw TeX збережено як source-preserved модуль. Повний Joot build потребує оригінальних custom style/macros; тому raw-файли не переписувались, а інтегровано практичний теоретичний шар і статус-коментар.

Антенний блок потрібний як RF-грамотність: поля, хвилі, поляризація, взаємність, апертури, діаграми спрямованості, масиви, одиниці, вимірювання і зв'язок між моделями та фізичними величинами.

34.1. Рівняння Максвелла і гармонічний режим

У часовій області базова структура:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (34.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (34.2)$$

Для лінійного ізотропного середовища:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (34.3)$$

У фазорній конвенції $e^{j\omega t}$ маємо

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (34.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}. \quad (34.5)$$

34.2. Поляризація

Поляризація описує траєкторію вектора електричного поля у площині, перпендикулярній напрямку поширення. Для двох ортогональних компонент

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\mathbf{x}}E_x \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}E_y \cos(\omega t + \phi) \quad (34.6)$$

отримуємо лінійну, кругову або еліптичну поляризацію залежно від E_x, E_y і фазового зсуву ϕ .

34.3. Взаємність і дуальність

Теорема взаємності дозволяє переносити інтуїцію між передаванням і прийманням для лінійних пасивних середовищ. У навчальному корпусі це потрібно для того, щоб одна й та сама математика покривала дві задачі: як антена випромінює і як вона реагує на падаючу хвилю.

Дуальність у рівняннях Максвелла дає формальну заміну електричних і магнітних величин. Вона корисна для порівняння електричних і магнітних диполів, граничних умов та симетрій.

34.4. Масиви і ваги Чебишова

Для лінійного масиву з N елементів, відстанню d і комплексними вагами w_n фактор масиву має форму

$$AF(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n e^{jnk d \cos \theta}. \quad (34.7)$$

Ваги Чебишова вибирають так, щоб контролювати компроміс між шириною головної пелюстки і рівнем бокових пелюсток. Це важливий математичний приклад: поліноми, оптимізація, спектральне мислення і просторове фільтрування зустрічаються в одному місці.

34.5. Що перевіряти в перекладі

Одиниці мають бути безпомилкові: **D** вимірюється в C/m^2 , **B** у tesla, **H** в A/m, густина потоку потужності у W/m^2 . Усі dB, dBi, EIRP, RCS, gain, directivity треба тримати в окремому глосарії, бо буквальный переклад легко ламає зміст.

35. Два огляди сенсорного злиття: embodied AI і event odometry

Джерело / статус. Source-preserved модулі: sensor_fusion_2506.19769/ і sensor_fusion_2410.15480/. Другий модуль у цьому проході скомпільовано як окремий IEEE-style PDF.

Після останнього translation system source package сенсорне злиття стало окремою сильною віссю корпусу. Є два різні, але взаємодоповнювальні матеріали.

35.1. Fusion taxonomy

Для прикладної математики корисно розділяти рівні злиття:

- **data-level fusion:** об'єднання сирих або майже сирих вимірювань;
- **feature-level fusion:** об'єднання ознак, embeddings, keypoints, point/voxel/BEV representations;
- **decision-level fusion:** об'єднання уже готових рішень або гіпотез;
- **temporal fusion:** послідовне накопичення інформації в часі;
- **multi-agent fusion:** об'єднання інформації між агентами або платформами.

Ключова математична тема: усе це є різними способами апроксимації умовного розподілу

$$p(x_t \mid z_{1:t}^{(1)}, z_{1:t}^{(2)}, \dots, z_{1:t}^{(m)}), \quad (35.1)$$

де x_t — стан, а $z^{(i)}$ — потік вимірювань i -го сенсора.

35.2. Калібрування і синхронізація

Більшість помилок у fusion-системах не є “помилками нейромережі”. Вони походять з невідомих або змінних параметрів:

$$T_{ab} \in SE(3), \quad \Delta t_{ab} \in \mathbb{R}, \quad K, D, b, \sigma. \quad (35.2)$$

Тут T_{ab} — extrinsic transform між сенсорами, Δt_{ab} — часовий offset, K, D — camera intrinsics/distortion, b — bias, σ — noise scale. Український корпус має підкреслювати: без калібрування злиття сенсорів створює впевнені, але хибні оцінки.

35.3. Подієві камери

Event camera не повертає стандартний кадр $I(x, y, t)$, а події

$$e_k = (x_k, y_k, t_k, p_k), \quad (35.3)$$

коли лог-інтенсивність у пікселі змінюється на поріг. Це створює асинхронний потік з дуже високою часовою роздільністю і високим динамічним діапазоном. Математично це змушує перейти від “кадрів” до подій, потоків, часових поверхоень, накопичувальних вікон і неперервно-часового оцінювання.

35.4. Практичний міст до ESKF і factor graphs

Event/Vision/IMU odometry природно зводиться до вже наявних модулів:

- кватерніони та $SE(3)$ для орієнтації й пози;
- ESKF для швидкого рекурсивного оцінювання;
- factor graphs для batch/smoothing задач;
- робастні залишки для outliers;
- NIS/NEES для статистичної перевірки.

Отже, цей блок не витісняє Kalman/Lie матеріал, а замикає його на сучасні perception stack задачі.

36. Roth et al.: робастне фільтрування зі Student's t -розподілом

Джерело / статус. Source-preserved модуль: `paper_modules/roth_student_t_robust_filter_ua/`. translation system переклав практичні секції: abstract, introduction, алгоритм t -filter, приклад валідації, conclusion.

Класичний Kalman filter оптимальний для лінійної гаусівської моделі. Але в реальних даних бувають outliers, heavy tails, misdetections, burst noise, некоректні асоціації вимірювань. Робастний фільтр потрібний для того, щоб один поганий вимір не зруйнував оцінку.

36.1. Гаусівський update і проблема outlier

Стандартний update:

$$\nu_k = z_k - Hx_{k|k-1}, \quad (36.1)$$

$$S_k = HP_{k|k-1}H^T + R, \quad (36.2)$$

$$K_k = P_{k|k-1}H^TS_k^{-1}, \quad (36.3)$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k\nu_k. \quad (36.4)$$

Якщо ν_k великий через outlier, гаусівська модель усе одно трактує його як малоймовірний, але чинний вимір. Це може дати надмірну корекцію.

36.2. Student's t як heavy-tailed модель

t -розподіл має товстіші хвости. Інтуїтивно він каже: великі залишки трапляються частіше, ніж вважає гаусівська модель, тому їм не слід дозволяти надто сильно керувати станом. Одна з форм щільності:

$$p(r) \propto \left(1 + \frac{1}{\nu}r^T\Sigma^{-1}r\right)^{-(\nu+d)/2}, \quad (36.5)$$

де ν — degrees of freedom, d — розмірність залишку. Коли $\nu \rightarrow \infty$, модель наближається до Gaussian.

36.3. Зв'язок з gating

Навіть якщо повний t -filter не впроваджується, ідея відразу дає практичний контроль:

$$\text{NIS}_k = \nu_k^T S_k^{-1} \nu_k. \quad (36.6)$$

Занадто великий NIS означає або outlier, або неправильну R , або помилку моделі. Робастний блок має бути поруч з Kalman/ESKF, а не окремо: це статистична безпека для рекурсивного оцінювання.

36.4. Стан прикладу валідації

У source-пакеті є приклад валідації на послідовних вимірюваннях. Математично корисні частини: алгоритм, залишки, метрики, перевірка стійкості та порівняння з Gaussian/KF/RTS. Це треба звірити з оригіналом перед фінальною публікацією.

37. Correll: автономні роботи як навчальний perception-navigation stack

Джерело / статус. Source-preserved модуль: `paper_modules/autonomous_robots_correll_6chapters_ua/`. Зібрано шість розділів: `sensors`, `vision`, `localization`, `mapping`, `SLAM`, `path planning`.

Це один із найпрактичніших блоків у корпусі, бо він зв'язує математику з архітектурою автономного робота. Він не замінює ESKF, micro Lie або sensor fusion; він пояснює, де ці речі живуть у повній системі.

37.1. Мінімальна архітектура

сенсори → ознаки → локалізація → карта → SLAM → планування → керування. (37.1)

Для навчального корпусу кожна стрілка має стати окремим набором понять:

- сенсорна похибка, resolution, precision, accuracy;
- camera geometry, features, optical flow;
- Bayes localization, Markov localization, particle filters;
- occupancy grids, point clouds, ICP/RANSAC;
- EKF-SLAM, graph-SLAM, loop closure;
- Dijkstra, A*, RRT/PRM, configuration space.

37.2. Локалізація як Bayes update

Базова форма:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \int p(x_t | x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}. \quad (37.2)$$

Вона є спільним предком Kalman filter, particle filter і grid localization. Тому Correll має стояти після probability/Kalman bridge, але до SLAM/factor-graph матеріалу.

37.3. SLAM як одночасна оцінка стану і карти

У SLAM стан включає позу робота і карту:

$$X = (x_0, x_1, \dots, x_T, m_1, \dots, m_N). \quad (37.3)$$

Фільтровий підхід підтримує апостеріорний розподіл онлайн, а графовий підхід мінімізує суму зважених залишків:

$$\min_X \sum_i \|r_i(X)\|_{\Omega_i}^2. \quad (37.4)$$

Саме тут сходяться Lie groups, robust residuals, least squares і sensor fusion.

37.4. Планування шляхів

Планування тут є математичним модулем про графи, евристики, конфігураційні простори, sampling-based search і перевірку зіткнень. Мінімальні алгоритми: Dijkstra, A*, RRT, PRM. Мінімальні поняття: admissible heuristic, completeness, optimality, discretization, collision checking.

37.5. Що `local TeX worker/local organizer` мають робити далі

Correll-розділи вже перекладені, але потребують mechanical cleanup: локальні `\cref`, missing figures, exercises, captions, and source labels. Це ідеальна робота для code-agent: не новий переклад, а чистка TeX до стабільного module build.

38. PySDR Ukrainian RST-to-TeX: практичне SDR/DSP ядро

У fetched-корпусі вже є українська доріжка PySDR у форматі RST. Це означає, що для частини SDR/DSP-матеріалу вузьким місцем більше не є переклад англійської прози, а нормалізація у машинозчитуваний TeX, перевірка коду і вирівнювання термінології. Цей розділ фіксує ядро, яке треба винести з RST у clean TeX першої хвили.

38.1. SDR, DSP та комплексна базова смуга

Програмно-визначене радіо переносить частину обробки, яка історично виконувалася аналоговими RF-блоками, у цифрове програмне середовище. Для перекладу й TeX-обробки важливо розрізнити три рівні:

1. фізичний RF-сигнал на носійній частоті;
2. комплексний сигнал базової смуги;
3. масив відліків у Python/NumPy або іншому середовищі.

Комплексний дискретний сигнал записуємо як

$$x[n] = I[n] + jQ[n], \quad (38.1)$$

де I – синфазна компонента, а Q – квадратурна компонента. Типова дійсна RF-форма, що відповідає комплексній оригінальній, має вигляд

$$s(t) = I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t). \quad (38.2)$$

У TeX-модулі треба зберегти різницю між I/Q , real/imaginary, baseband/passband та carrier/baseband frequency. Переклад цих слів не повинен міняти математичну роль символів.

38.2. Дискретизація

Якщо неперервний сигнал позначено $S(t)$, а період дискретизації дорівнює T , то відліки мають вигляд

$$S_n = S(nT), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (38.3)$$

Частота дискретизації

$$F_s = \frac{1}{T}. \quad (38.4)$$

Правило Найквіста в навчальному формулюванні: щоб уникнути накладання спектра для сигналу з максимальною істотною частотою f_{\max} , потрібно

$$F_s \geq 2f_{\max}. \quad (38.5)$$

Для практичного перекладу важливо не плутати *sample rate*, *symbol rate*, *bandwidth* і *carrier frequency*. Це різні величини з різними одиницями.

38.3. Частотна область і DFT

Дискретне перетворення Фур'є для N відліків:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp\left(-j \frac{2\pi kn}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (38.6)$$

Обернена форма:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp\left(j \frac{2\pi kn}{N}\right). \quad (38.7)$$

FFT – це алгоритм для обчислення DFT, а не інше математичне перетворення. У перекладі потрібно стабільно тримати пару: DFT = дискретне перетворення Фур'є; FFT = швидке перетворення Фур'є.

Для спектрального аналізу реальні сигнали часто множать на вікно $w[n]$:

$$x_w[n] = x[n]w[n]. \quad (38.8)$$

Це зменшує деякі види спектрального витікання, але змінює амплітудні властивості. Тому в QA потрібно перевіряти, чи переклад не перетворив “window” на побутове “вікно” без контексту.

38.4. Фільтри

FIR-фільтр задається згорткою

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]. \quad (38.9)$$

IIR-фільтр має рекурсивну різницеву форму

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{\ell=1}^P a_\ell y[n-\ell]. \quad (38.10)$$

У TeX варто тримати FIR, IIR, tap, impulse response та frequency response як контрольовані терміни. Рекомендовані українські відповідники: *нерекурсивний FIR-фільтр, рекурсивний IIR-фільтр, коефіцієнт фільтра / tap, імпульсна характеристика, частотна характеристика*.

38.5. Шум, SNR і децибели

Гауссівський шум у простій дійсній моделі:

$$n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2). \quad (38.11)$$

Для комплексного baseband-шуму часто використовують

$$n_c = n_I + jn_Q, \quad n_I, n_Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2), \quad (38.12)$$

щоб сумарна комплексна потужність мала потрібну нормалізацію.

Для величини потужності x у лінійній шкалі запис у децибелах:

$$x_{dB} = 10 \log_{10} x. \quad (38.13)$$

Для амплітудної величини, коли квадрат амплітуди пропорційний потужності, часто з'являється

$$A_{dB} = 20 \log_{10} A. \quad (38.14)$$

Це місце потрібно чітко коментувати в перекладі, бо плутанина між 10 і 20 у dB-перетвореннях є типовою помилкою.

38.6. Модуляція, символи, імпульсне формування

Базовий комплексний символ можна розглядати як точку сузір'я. Для BPSK типово

$$a_k \in \{-1, +1\}, \quad (38.15)$$

для QPSK – чотири комплексні точки, наприклад

$$a_k \in \left\{ \frac{1+j}{\sqrt{2}}, \frac{-1+j}{\sqrt{2}}, \frac{-1-j}{\sqrt{2}}, \frac{1-j}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (38.16)$$

Після вставляння нульових відліків між символами застосовується pulse-shaping фільтр. У простій навчальній формі смугу raised-cosine family можна контролювати roll-off параметром β ; груба оцінка смуги:

$$BW = R_S(1 + \beta), \quad (38.17)$$

де R_S – symbol rate. У перекладі потрібно не плутати *символьну швидкість* і *бітову швидкість*.

38.7. IQ-файли і SigMF

IQ-запис – це послідовність пар I, Q :

$$[I_0, Q_0, I_1, Q_1, I_2, Q_2, \dots]. \quad (38.18)$$

Якщо використано 16-бітні цілі для I і Q , то один комплексний відлік займає 4 байти. Для частоти дискретизації F_s приблизний необроблений потік даних:

$$R_{\text{bytes/s}} = 4F_s. \quad (38.19)$$

Для 32-бітних float-компонент один комплексний відлік займає 8 байтів.

38.8. Висновок для pipeline

PySDR Ukrainian RST треба не перекладати заново, а нормалізувати:

1. RST headings \rightarrow TeX chapters/sections;
2. `:math:`...`` \rightarrow inline math;
3. `.. math::` \rightarrow display math;
4. `.. code-block:: python` \rightarrow `lstlisting`, без перекладу Python keywords;
5. images \rightarrow placeholders або copied assets з підписом;
6. raw HTML blocks \rightarrow коментар або note environment.

39. GNSS-denied navigation: VIO, SLAM і бортова оцінка стану

Джерело / статус. Практичний міст між ESKF/micro-Lie, Correll robotics, event-sensor fusion та актуальними preprint targets 2025-2026.

Задача

У GNSS-denied режимі позиція не приходить як зовнішній абсолютний сигнал. Система має інтегрувати інерціальні вимірювання, візуальні ознаки, висоту/рельєф, LiDAR/depth або інші сенсори, а потім контролювати дрейф. Математично це задача оцінювання стану з неповними, асинхронними й шумними вимірюваннями.

Типовий мінімальний стан для visual-inertial navigation:

$$x = (R, v, p, b_g, b_a), \quad R \in \text{SO}(3), \quad v, p, b_g, b_a \in \mathbb{R}^3,$$

де R — орієнтація тіла в навігаційній системі координат, v — швидкість, p — положення, b_g, b_a — зміщення гіроскопа й акселерометра.

Номінальна IMU-модель:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R[\omega_m - b_g - n_g]_{\times}, \\ \dot{v} &= g + R(a_m - b_a - n_a), \\ \dot{p} &= v, \\ \dot{b}_g &= n_{wg}, \quad \dot{b}_a = n_{wa}. \end{aligned}$$

Для дискретної реалізації це не просто чисельне інтегрування. Треба зберігати структуру групи обертань, масштаб шуму, одиниці і часові мітки.

VIO як фактор-граф

У backend-формі VIO часто записують як нелінійну задачу найменших квадратів:

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i \|r_i^{\text{imu}}(x_i, x_{i+1})\|_{\Sigma_i^{-1}}^2 + \sum_{(i,j) \in \mathcal{O}} \|r_{ij}^{\text{cam}}(x_i, \ell_j)\|_{\Lambda_{ij}^{-1}}^2 + \sum_k \|r_k^{\text{prior}}\|^2.$$

Тут r^{imu} — IMU preintegration residual, r^{cam} — reprojection residual, ℓ_j — landmark або inverse-depth параметр ознаки. Для машинного перекладу ці формули треба залишати незмінними; перекладається пояснювальний текст, а не позначення.

VIO як фільтр

Фільтрова форма зручна для бортових систем з малими ресурсами:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}^+, u_k), \\ P_k^- &= F_k P_{k-1}^+ F_k^\top + G_k Q_k G_k^\top, \\ r_k &= z_k - h(\hat{x}_k^-), \\ S_k &= H_k P_k^- H_k^\top + R_k, \\ K_k &= P_k^- H_k^\top S_k^{-1}, \\ \delta x_k &= K_k r_k.\end{aligned}$$

На многовидах он має виконувати injection:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- \oplus \delta x_k,$$

а не просте додавання до всіх компонентів. Для орієнтацій похибка живе в дотичному просторі, а не в самій матриці R .

Джерела дрейфу й корекції

Проблема	Математична причина	Перекладний/TeX модуль
IMU bias drift	Інтегрування малих систематичних похибок дає зростаючу похибку v, p .	ESKF, bias random walk, covariance propagation.
Scale ambiguity	Монокулярна камера сама не дає метричного масштабу.	VIO, stereo/depth, IMU constraints.
Low texture / blur / dust	Feature residuals стають нестійкими або outlier-heavy.	Robust residuals, gating, visual SLAM comparison.
Asynchronous events	Event camera не дає кадрів, а потік подій (x, y, t, p) .	Asynchronous filtering and contrast/event residuals.
No loop closure	Далека траєкторія без повторного огляду не має класичного SLAM correction.	Geodata/heightmap correction; map-relative residual.
Compute limit	Оптимізація має вкладатися в embedded budget.	Filter/optimization tradeoff, cost-aware VIO.

Порядок перекладу

Найкорисніша послідовність для цієї доріжки:

1. Завершити повний Solà ESKF і micro-Lie, бо вони дають мову для $SO(3)$, $SE(3)$, perturbation, Jacobian, reset.
2. Довести event-sensor fusion/odometry до source-preserved standalone, не тільки summary.
3. Додати 2025-2026 VIO/GNSS-denied preprints як короткі TeX modules з формулами і failure-mode tables.
4. Лише після цього розширювати CV/SLAM на великі surveys.

40. Event-based sensor fusion і odometry: що треба довести до кінця

Джерело / статус. Поглиблення на базі вже наявного standalone-модуля arXiv:2410.15480 і sensor-fusion survey arXiv:2506.19769.

Event camera не є “швидкою звичайною камерою”. Вона повертає асинхронні події

$$e_k = (u_k, v_k, t_k, p_k),$$

де (u_k, v_k) — координата пікселя, t_k — час, $p_k \in \{-1, +1\}$ — полярність зміни лог-інтенсивності. Тому звичайна frame-based VO модель не переноситься без змін.

Мінімальні математичні блоки

1. **Часова модель.** Усі сенсори мають свої часові мітки. Для fusion потрібні time offset, interpolation і covariance inflation, якщо синхронізація невизначена.
2. **Просторова модель.** Для кожної пари сенсорів потрібна зовнішня калібровка $T_{ab} \in SE(3)$.
3. **Event representation.** Події можна агрегувати у time surface, voxel grid, event frame або напряду використовувати у contrast objective.
4. **Backend.** Оцінювання стану може бути EKF/UKF/ESKF або factor graph. Вибір залежить від частоти подій, доступної пам’яті й latency budget.

Універсальна residual-форма

Більшість модулів можна привести до однієї форми:

$$r_k = z_k - h_k(x_{\tau(k)}, \theta), \quad J_k = \left. \frac{\partial r_k}{\partial \delta x} \right|_{\delta x=0},$$

де $\tau(k)$ вказує, який стан або інтерпольований стан відповідає часовій мітці t_k , а θ містить калібровку сенсорів. Після лінеаризації:

$$\min_{\delta x} \sum_k \rho \left(\|r_k + J_k \delta x\|_{\Sigma_k^{-1}}^2 \right).$$

Функція ρ потрібна через outliers: погана подія, пил, blur, неправильна асоціація або рухомий об’єкт не повинні зруйнувати оцінку.

Checklist для перекладу event-fusion paper

Секція	Що зберегти без втрат
Sensor model	Всі визначення подій, часових поверхонь, polarity, camera model.
Fusion pipeline	Де саме відбувається fusion: raw data, feature, state, decision.

IMU integration
Odometry backend
Evaluation
Terminology

Preintegration, covariance, bias update, gravity convention.
Objective, residuals, Jacobians, outlier handling, marginalization.
Метрики АТЕ/RPE, latency, compute, dataset, failure cases.
Не плутати “подія”, “кадр”, “ознака”, “воксель”, “часова по-
верхня”.

Негайна задача для агентів

Для translation system/local TeX worker/local local organizer треба подавати не весь survey одразу, а одну секцію:

Process exactly one section of the event-based sensor-fusion/odometry source.
Translate prose into Ukrainian. Preserve formulas, variables, labels, refs, citations.
For each sensor model, add a Ukrainian glossary note for: timestamp, polarity, extrinsics, covariance, residual, Jacobian, calibration, synchronization.
Do not add unrelated implementation claims; preserve source notation and formula status.
Compile under XeLaTeX and write build_status.csv.

41. FHSS, SDR і multi-agent resilience: математична доріжка

Джерело / статус. Research radar: frequency hopping, SDR, channel access, DQN/MARL, multi-agent communications under jamming.

Ця доріжка потрібна як теорія зв'язку, статистичне оцінювання, POMDP/RL і симуляційні моделі. Корисні саме математичні об'єкти: стани, спостереження, політики, функції винагороди, втрати пакетів, BER/SNR, обмеження енергії, latency і перевірка збіжності.

FHSS як стохастичний процес

Нехай доступні канали $\mathcal{C} = \{1, \dots, N\}$. Передавач вибирає канал

$$c_t \sim \pi(c_t | h_t),$$

де h_t — історія спостережень: ACK/NACK, оцінка SNR, спектральні ознаки, packet loss, latency. Реактивний завадник моделюється не як фіксований шум, а як адаптивний процес:

$$j_t \sim \mu(j_t | h_t^{(J)}),$$

де $h_t^{(J)}$ може містити попередні канали. Навіть якщо справжній механізм невідомий, навчальний модуль може працювати з belief state:

$$b_t(s) = P(s_t = s | o_{1:t}, a_{1:t-1}).$$

Channel access як MDP/POMDP

У математичній формі задача:

$$\max_{\pi} \mathbb{E}_{\pi} \sum_{t=0}^T \gamma^t r(s_t, a_t),$$

де дія a_t може містити канал, потужність у симуляції, кодову швидкість або retransmission decision, а reward штрафує втрату пакетів, latency, energy і collision. Для DQN:

$$Q_{\theta}(s_t, a_t) \leftarrow r_t + \gamma \max_{a'} Q_{\theta-}(s_{t+1}, a').$$

Для POMDP краще явно показувати, які змінні спостерігаються, а які є латентними. Це корисніше для перекладу, ніж "рецепт", бо показує, яку математику треба розуміти.

MARL для swarm networks

У multi-agent випадку M передавачів мають локальні спостереження o_t^i і дії a_t^i . Centralized training / decentralized execution часто записується як

$$Q_{\text{tot}}(\tau, a_1, \dots, a_M) = f(Q_1(\tau_1, a_1), \dots, Q_M(\tau_M, a_M), s),$$

де f обмежують монотонністю, щоб кожен агент міг виконувати локальний argmax. Це математичний міст до QMIX-подібних моделей.

Що перекладати як P0/P1

Тема	Чому корисно	Обмеження публічного релізу
Agent-based anti-jamming survey	Дає taxonomy: perception-decision-action, game theory, RL.	Перекладати як survey/математичну таксономію.
DQN/FHSS channel selection	Дає просту формулу MDP/DQN і тестову симуляцію.	Без конкретних частот, ключів, firmware або процедур.
Fast adaptive channel access	Пояснює проблему "learning faster than jammer".	Тільки model-level і benchmark-level.
MARL swarm resilience	Дає multi-agent formulation і QMIX-like vocabulary.	Без tactics, formation recipes, adversary-specific configuration.
Multichannel aided cancellation	Корисно для SDR/RF математики: preamble, synchronization, cancellation.	Перекладати з фокусом на моделі сигналів і перевірку формул.

Зв'язок з уже наявним корпусом

Ця доріжка не замінює PySDR. Вона стоїть поверх PySDR, SDR survey, modulation/coding, RF/antenna і Kalman/statistics. Перед перекладом RL anti-jamming papers треба мати українською:

1. sampling, FFT, IQ, filters, SNR, modulation;
2. probability, Markov chains, MDP/POMDP, Q-learning;
3. coding/FEC basics;
4. RF front-end, synchronization, channel estimation.

42. Хвильове рівняння: завершення глав 1-3 і що йде після

Джерело / статус. Source-preserved модуль Zuazua arXiv:2402.17894, глави 1-3; тут подано інтеграційний шар і QA-мар.

Важливе уточнення: це не “радіохвилі”, а загальна математика хвильового рівняння, керованості й стабілізації. Вона корисна як мова для PDE, energy estimates, observability і boundary/interior control.

Модель

Базова форма:

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = 0, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ y = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ y(0) = y^0, \quad y_t(0) = y^1. \end{cases}$$

Енергія:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|y_t(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2) dx.$$

Для консервативного рівняння без damping $E(t)$ є сталою. Це перша формульна sanity check у перекладі.

Exact controllability і observability

У boundary або interior control задача exact controllability полягає в тому, щоб знайти керування u таке, що

$$(y(T), y_t(T)) = (0, 0)$$

або інша задана кінцева конфігурація. Метод HUM зводить це до нерівності спостережуваності для спряженого/вільного рівняння:

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} |\partial_\nu \varphi|^2 d\Gamma dt$$

у boundary-версії або до інтеграла по підобласті у interior-версії. У перекладі треба не втратити різницю між control region, observation region, boundary trace і normal derivative.

Stabilization

Damped wave:

$$y_{tt} - \Delta y + a(x)y_t = 0$$

має energy dissipation:

$$\frac{d}{dt}E(t) = - \int_{\Omega} a(x)|y_t|^2 dx \leq 0.$$

Наступний high-utility translation step після глав 1-3: знайти й перекласти частини про stabilization, damping, decay rate і geometric control condition. Це не замінює чисельні PDE; це теорема-рівень, який дає гарантії.

QA-мар для глав 1-3

Об'єкт	Що перевіряти	Типова помилка machine translation
$H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$	Функціональні простори й dual spaces.	Перекладати H або L як слова; втрачати індекс 0.
∂_ν	Нормальна похідна на межі.	Плутати з часовою похідною або divergence.
Γ_0	Частина межі для control/observation.	Плутати з усією $\partial\Omega$.
HUM	Hilbert Uniqueness Method.	Перекладати як casual acronym без визначення.
Observability	Нерівність, що оцінює енергію через спостереження.	Плутати з observability у Kalman/control state-space.
Interior control	Керування всередині області.	Плутати з boundary control.

Практичне рішення по цій доріжці

Глави 1-3 вже достатньо важливі, щоб вважати їх P0-complete для першого пакета, якщо вони проходять formula/render QA. Не треба далі витрачати перші токени на повторний переклад того самого. Наступні токени краще дати sensor fusion/odometry і Solà/micro-Lie. До Zuazua треба повернутися для stabilization/damping після того, як state-estimation блок стане повнішим.

43. Поточний research radar 2025-2026: що тягнути з arXiv наступним

Джерело / статус. Web-scouting: GNSS-denied navigation, VIO/SLAM, event/sensor fusion, anti-jamming channel access, FHSS, multi-agent swarm resilience.

Цей розділ є не перекладом однієї статті, а списком пріоритетів для наступного source-first fetch. Він потрібний тому, що ці напрями швидко рухаються, і старі підручники не закривають frontier.

Пріоритет	Target	Доріжка	Чому тягнути
P0	2510.01348, kilometer-scale GNSS-denied UAV navigation via heightmap gradients	GNSS-denied / onboard autonomy	Дає системний приклад: onboard mapping, planning, localization, drift correction, embedded constraints.
P0	2605.03678, robust visual SLAM for UAV navigation in GPS-denied degraded environments	V-SLAM / onboard CV	Порівнює ORB-SLAM3, DPVO, DROID-SLAM, DUST3R, MAST3R під degradation.
P0	2502.00575, DeepUKF-VIN	VIO / Kalman / deep adaptive covariance	Міст між UKF, quaternion navigation, camera+IMU, GPS-denied navigation.
P0	2410.15480, event-based sensor fusion and odometry	Event camera / odometry	Уже є в корпусі; треба довести до повного source-preserved TeX.
P0	2506.19769, multi-sensor fusion survey	Fusion taxonomy	Уже є в корпусі; треба зробити applied map, glossary, QA.
P0	2508.11687, agent-based anti-jamming UAV communications survey	SDR/FHSS/RL	Дає taxonomy P-D-A, game theory, RL, engineering challenges.
P1	2601.06095, DQN-based resilient FHSS communication	FHSS / DQN	Корисно як простий MDP/DQN/FEC math module; публічний release-review.
P1	2502.04963, fast adaptive anti-jamming channel access	DQN / spectrum prediction	Дає "learning faster than jammer" formulation.
P1	2512.16813, coordinated anti-jamming resilience in swarm networks via MARL	Swarm / MARL	Дає QMIX-like multi-agent formulation; корисно для theory module.
P1	2507.14945, jamming-resistant UAV communications multichannel-aided approach	SDR/RF synchronization	Корисно для preamble, синхронізації та cancellation-math.
P1	2511.21083, dual-agent RL for adaptive cost-aware VIO	VIO / compute budget	Прямо відповідає embedded compute vs accuracy tradeoff.
P1	2507.16600, robust 5G terrestrial positioning with VO+IMU fusion	Sensor fusion / positioning	Корисно як приклад EKF fusion при втраті зовнішнього positioning link.

Fetch script policy

Для кожного arXiv target спершу пробувати source tarball:

```
mkdir -p fetched_current/<id>
curl -L https://arxiv.org/e-print/<id> -o fetched_current/<id>/source
file fetched_current/<id>/source
tar -tf fetched_current/<id>/source | head -80
```

Якщо e-print містить TeX, перекладати source-first. Якщо є тільки PDF, робити extraction/OCR audit і вирішувати, чи потрібен public source replacement.

A. Початковий словник термінів

Цей словник не є остаточним. Його задача - запобігти роз'їзду термінів у перших batch-перекладах.

English	Українською	Примітка
state	стан	У state estimation, control, Kalman.
state estimation	оцінювання стану	Не «оцінка стану» як назва галузі, хоча estimate = оцінка.
estimate	оцінка	Дієслово: оцінювати.
uncertainty	невизначеність	Не «непевність» у формальному технічному тексті.
covariance	коваріація	covariance matrix = матриця коваріації.
innovation	інновація / нев'язка вимірювання	Для фільтра Калмана бажано фіксувати в межах документа.
residual	нев'язка	В оптимізації та estimation.
prior	апріорний розподіл / апріорна модель	Не «попередній» без математичного контексту.
posterior	апостеріорний розподіл	Bayesian context.
process noise	шум процесу	У моделях стану.
measurement noise	шум вимірювання	Sensor/observation model.
state-space model	модель у просторі станів	Control/estimation.
Kalman gain	підсилення Калмана	Не «коефіцієнт Калмана» для матриці.
Jacobian	якобіан / матриця Якобі	Обидва варіанти; у формулах - якобіан.
Lie group	група Лі	Не перекладати Lie як «брехня».
manifold	многовид	Стандартний математичний термін.
tangent space	дотичний простір	Lie theory.
exponential map	експоненціальне відображення	Також «експонента групи» у контексті.
logarithmic map	логарифмічне відображення	У групах Лі.
pose	поза / просторова поза	Положення плюс орієнтація.
orientation	орієнтація	attitude в навігації також часто «орієнтація».
attitude	орієнтація	У навігації; не «ставлення».
quaternion	кватерніон	Одиничний кватерніон = unit quaternion.
error-state	стан похибки	ESKF = фільтр Калмана зі станом похибки.
bias	зміщення / систематична похибка	Sensor bias: зміщення сенсора.
sampling	дискретизація / вибірка	sample = відлік; sample rate = частота дискретизації.
sample	відлік	У DSP; «зразок» лише поза signal-processing контекстом.
sample rate	частота дискретизації	Hz.
Nyquist rate	частота Найквіста	Або мінімальна частота дискретизації за Найквістом.
aliasing	аліасинг	Можна пояснити як накладання спектральних копій.
windowing	віконування	window function = віконна функція.
spectral leakage	спектральне витікання	DSP.
Fourier transform	перетворення Фур'є	Apostrophe in Ukrainian: Фур'є.
frequency domain	частотна область	time domain = часова область.
baseband	базова смуга	Complex baseband = комплексна базова смуга.
I/Q samples	I/Q-відліки	In-phase/quadrature.
finite difference	скінченна різниця	finite-difference method = метод скінченних різниць.
finite element method	метод скінченних елементів	FEM.
stability	стійкість	Numerical stability/control stability.
convergence	збіжність	Numerical methods.
conditioning	обумовленість	ill-conditioned = погано обумовлений.
least squares	найменші квадрати	Метод найменших квадратів.
regularization	регуляризація	Optimization/inverse problems.
outlier	викид	Statistics/robust estimation.
robust	робастний / стійкий	У цьому пакеті: робастний для robust statistics.

constraint	обмеження	Optimization.
objective function	цільова функція	Optimization.
sparse matrix	розріджена матриця	Not «рідка».
quaternion product	добуток кватерніонів	У формулах зберігати порядок множників; не комутативний.
Hamilton convention	гамільтонова угода	$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
scalar-first	скалярна частина перша	Кватерніон (w, x, y, z) .
scalar-last	скалярна частина остання	Кватерніон (x, y, z, w) ; не змішувати з scalar-first.
conjugate quaternion	спряжений кватерніон	q^* ; для одиничного кватерніона дорівнює оберненому.
body frame	корпусна система координат	Також body-fixed frame.
world frame	світова система координат	Іноді global/navigation frame.
IMU	інерціальний вимірювальний блок	Акселерометр + гірометр, іноді магнітометр.
gyrometer / gyroscope	гірометр / гіроскоп	У сенсорному контексті гірометричний вимір кутової швидкості.
random walk	випадкове блукання	Bias random walk = випадкове блукання зміщення.
white noise	білий шум	Перевіряти одиниці неперервної спектральної густини.
Joseph form	форма Джозефа	Чисельно стабільне оновлення коваріації.
normalized innovation squared	нормалізована квадратична інновація	NIS, статистична перевірка нев'язки.
I/Q samples	I/Q-відліки	Синфазна і квадратурна компоненти комплексного відліку.
Nyquist frequency	частота Найквіста як $f_s/2$	Не плутати з Nyquist rate.
Nyquist rate	мінімальна частота дискретизації	Приблизно $2f_{max}$ для смугообмеженого сигналу.

В. Додаток до словника: SDR/RF, fusion, хвильове керування

English	Українською	Примітка
Software-defined Radio	програмно-визначене радіо	SDR зберігати як латинську аббревіатуру.
transceiver	трансивер / приймач-передавач	На першому входженні бажано обидва.
RF front end	РЧ-передній край	Можлива альтернатива: RF-фронтенд; у цьому корпусі РЧ-передній край.
analog front end	аналоговий передній край	SDR/RF.
digital front end	цифровий передній край	SDR/RF.
low-noise amplifier	малощумний підсилювач	LNA.
local oscillator	локальний осцилятор	LO.
ADC	аналого-цифровий перетворювач	Можна додати АЦП на першому входженні.
DAC	цифро-аналоговий перетворювач	Можна додати ЦАП.
downconversion	перетворення донизу	Частотне перетворення до нижчої смуги.
upconversion	перетворення догори	Частотне перетворення до вищої смуги.
decimation	децимація	Не просто викидання відліків; після фільтрації.
interpolation	інтерполяція	DSP sample-rate conversion.
spurious-free dynamic range	динамічний діапазон без побічних спектральних компонент	SFDR.
field intensity	напруженість поля	Для E і H .
electric flux density	електрична індукція / вектор зміщення	D .
magnetic flux density	магнітна індукція	B .
current density	густина струму	J .
time-harmonic	часо-гармонічний	Phasor context.
phasor	фазор	Комплексна амплітуда гармонічного сигналу/поля.
wave impedance	хвильовий імпеданс	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$.
Poynting vector	вектор Пойнтінга	Перевірити написання у native QA.
exact controllability	точна керованість	Zuazua/control.
stabilization	стабілізація	Control/PDE.
observability inequality	нерівність спостережуваності	HUM/control.
damping	демпфування	Не завжди те саме, що "затухання".
dissipation	дисипація	Energy decay context.
semilinear	напівлінійний	PDE.
support of a function	носіїв функції	Не "підтримка".
finite speed of propagation	скінченна швидкість поширення	Wave equation.
multi-sensor fusion	багатосенсорне злиття	Загальний термін.
multi-sensor fusion perception	багатосенсорне сприйняття на основі злиття даних	MSFP, за translation system output.
embodied AI	втілений ШІ	Robotics/AI.
point cloud	хмара точок	CV/LiDAR.
voxel	воксель	CV/3D.
bounding box	обмежувальна рамка	CV detection.
bird's-eye view	вид з висоти пташиного польоту	BEV.
occupancy prediction	передбачення зайнятості	CV/robotics.
ego-motion	его-рух / власний рух	Обрати залежно від реєстру.
self-attention	самоувага	Transformer.
cross-attention	перехресна увага	Transformer/fusion.
data association	асоціація даних	Tracking/fusion.
gating	відсікання за порогом / gating	У першому входженні пояснити; термін ще перевірити.
Mahalanobis distance	відстань Махаланобіса	Statistics/filtering.

С. Термінологічні додатки: модуляція, кодування, фільтрація

English	Ukrainian	Domain
symbol rate	символьна швидкість	DSP/comm.
bit rate	бітова швидкість	communications
spectral efficiency	спектральна ефективність	communications
baseband	базова смуга	SDR/RF
passband	смуга перенесення / смуговий сигнал	SDR/RF
constellation	сузір'я	digital modulation
pulse shaping	імпульсне формування	DSP
inter-symbol interference (ISI)	міжсимвольна інтерференція (ISI)	DSP/comm.
raised-cosine filter	фільтр raised-cosine / фільтр з піднятим косинусом	DSP
channel capacity	пропускна здатність каналу	information theory
mutual information	взаємна інформація	information theory
coding rate	швидкість коду	coding theory
soft decision	м'яке рішення	coding theory
log-likelihood ratio (LLR)	логарифмічне відношення правдоподібностей (LLR)	coding theory
interleaving	чергування	coding theory
deinterleaving	розчергування	coding theory
belief	переконавання / імовірнісна оцінка	Bayesian filtering
prior	апріорна оцінка	estimation
posterior	апостеріорна оцінка	estimation
likelihood	правдоподібність	probability
state transition matrix	матриця переходу стану	control/estim.
system dynamics matrix	матриця динаміки системи	control
process noise covariance	коваріація шуму процесу	Kalman filtering
measurement noise covariance	коваріація шуму вимірювання	Kalman filtering

D. Додатки до термінології: робототехніка, fusion, робастна фільтрація

English	Українською	Примітка
boundary controllability	гранична керованість	PDE/control
internal controllability	внутрішня керованість	PDE/control
observability inequality	нерівність спостережуваності	HUM/control
normal derivative	нормальна похідна	boundary PDE
array factor	множник решітки	antenna arrays
side lobe	бокова пелюстка	radiation pattern
beamwidth	ширина променя	antenna/RF
polarization mismatch	неузгодження поляризації	RF/antenna
radar cross section	радарний переріз	RCS
EIRP	EIRP; еквівалентна ізотропно випромінювана потужність	acronym retained
event camera	подієва камера	event-based vision
time surface	часова поверхня	event vision
timestamp	часова мітка	sensor fusion
time offset	часовий зсув	calibration
outlier	викид	robust statistics
gating	відсікання за порогом; gating	tracking/filtering
robust loss	робастна функція втрат	optimization
loop closure	замикання циклу	SLAM
occupancy grid	сітка зайнятості	mapping
pose graph	граф поз	graph-SLAM

Е. Термінологічні додатки: source-модулі і локальні чернетки

English	Український термін	Коментар
observability inequality	нерівність спостережуваності	Центральна для HUM і керованості хвильового рівняння.
boundary controllability	гранична керованість	Керування через частину межі.
interior controllability	внутрішня керованість	Керування через джерело в підобласті.
reciprocity	взаємність	У теорії антен: зв'язок transmit/receive поведінки.
duality	дуальність	Електромагнітна симетрія між полями/джерелами.
array factor	фактор масиву	Просторовий аналог frequency response.
Chebyshev array	масив Чебишова	Ваги для контролю бокових пелюсток.
event camera	подієва камера	Сенсор, що видає асинхронні події зміни інтенсивності.
time offset	часовий зсув	Критичний параметр між сенсорами.
Student's t filter	фільтр Стюдента t	Робастне рекурсивне оцінювання з heavy-tailed моделлю.
outlier	викид / аномальний вимір	Обрати один термін у фінальному глосарії; зараз допустимі обидва.
occupancy grid	сітка зайнятості	Стандартне подання карти в робототехніці.
configuration space	конфігураційний простір	Простір станів/поз для планування.

F. Термінологічні додатки: GNSS-denied, VIO/SLAM, FHSS/SDR

English	Український варіант	Примітка
GNSS-denied visual-inertial odometry, VIO event camera	без GNSS; GNSS-недоступний візуально-інерціальна одометрія подієва камера	Не тільки GPS; GNSS ширше. Не перекладати як “візуальна інерційна” без дефісу, якщо зміщується зміст. Сенсор асинхронних подій, не frame camera.
time surface extrinsic calibration intrinsic calibration frequency hopping spread spectrum, FHSS	часова поверхня зовнішнє калібрування внутрішнє калібрування розширення спектра зі стрибкоподібною перебудовою частоти	Event-based representation. Відносна поза сенсорів. Параметри камери/сенсора. У коротких таблицях можна лишати FHSS.
reactive jammer	реактивний завадник	У public docs тримати як модель завад, не інструкцію.
channel access coarse-grained spectrum prediction multi-agent reinforcement learning, MARL	доступ до каналу грубе прогнозування спектра багатоагентне навчання з підкріпленням	Communication/RL context. Auxiliary task у DQN/RL papers.
centralized training, decentralized execution observability inequality	централізоване навчання, децентралізоване виконання нерівність спостережуваності	Swarm coordination theory. CTDE.
Hilbert Uniqueness Method	метод єдиності Гільберта	PDE control; не плутати з state-space observability. HUM.
boundary controllability interior controllability	керованість через межу внутрішня керованість	PDE boundary control. PDE distributed/interior control.