

Solà ESKF: шум, IMU-модель, ін'єкція і reset

Українська прикладна математика

2026-06-02

1 Solà ESKF: щільне українське ядро для IMU-стану

Джерельний блок: Joan Solà, *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*, файли `ErrorState.tex`, `Noise.tex`, `Quaternion.tex`.

1.1 Три стани: істинний, номінальний і похибковий

ESKF не оцінює повний нелінійний стан безпосередньо. Він поширює номінальний стан x нелінійною моделлю, а малу похибку δx - лінійною моделлю в дотичному просторі. Для IMU-завдання природний стан має вигляд

$$x = \begin{bmatrix} p \\ v \\ q \\ a_b \\ \omega_b \\ g \end{bmatrix}, \quad \delta x = \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta v \\ \delta \theta \\ \delta a_b \\ \delta \omega_b \\ \delta g \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Тут p - положення, v - швидкість, q - одиничний кватерніон орієнтації, a_b і ω_b - зміщення акселерометра й гіроскопа, g - вектор гравітації. Орієнтаційна похибка не є чотиривимірним збуренням кватерніона; вона є тривимірним малим кутом $\delta \theta \in \mathbb{R}^3$.

Виміряні IMU-сигнали записуються як

$$a_m = a + a_b + a_n, \quad \omega_m = \omega + \omega_b + \omega_n, \quad (2)$$

де a_n, ω_n - білий вимірювальний шум. Для випадкового блукання зміщень використовують

$$\dot{a}_b = a_w, \quad \dot{\omega}_b = \omega_w, \quad (3)$$

де a_w, ω_w - неперервні випадкові збурення.

1.2 Номінальна IMU-модель

Номінальна модель інтегрується за виміряними сигналами після віднімання поточних оцінок зміщень:

$$\dot{p} = v, \quad (4)$$

$$\dot{v} = R(q)(a_m - a_b) + g, \quad (5)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m - \omega_b \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\dot{a}_b = 0, \quad \dot{\omega}_b = 0, \quad \dot{g} = 0. \quad (7)$$

Це рівняння читається так: номінальний стан рухається так, ніби шуму немає, а невизначеність цього припущення переноситься в коваріацію P через похибкову систему.

Для дискретного кроку Δt один простий варіант інтегрування:

$$p_{k+1} = p_k + v_k \Delta t + \frac{1}{2} (R_k(a_{m,k} - a_{b,k}) + g_k) \Delta t^2, \quad (8)$$

$$v_{k+1} = v_k + (R_k(a_{m,k} - a_{b,k}) + g_k) \Delta t, \quad (9)$$

$$q_{k+1} = q_k \otimes \text{Exp}((\omega_{m,k} - \omega_{b,k}) \Delta t). \quad (10)$$

У чистому перекладі треба залишити порядок множення $q \otimes \text{Exp}(\cdot)$ незмінним, бо він фіксує прийняту конвенцію.

1.3 Похибкова IMU-модель

Для локальної похибки орієнтації $\delta\theta$ лінеаризована динаміка має типовий вигляд

$$\delta\dot{p} = \delta v, \quad (11)$$

$$\delta\dot{v} = -R[a_m - a_b]_{\times} \delta\theta - R\delta a_b + \delta g - Ra_n, \quad (12)$$

$$\delta\dot{\theta} = -[\omega_m - \omega_b]_{\times} \delta\theta - \delta\omega_b - \omega_n, \quad (13)$$

$$\delta\dot{a}_b = a_w, \quad (14)$$

$$\delta\dot{\omega}_b = \omega_w, \quad (15)$$

$$\delta\dot{g} = 0. \quad (16)$$

Це є головний блок для VIO, INS і SLAM-інтеграції: він показує, як помилки акселерометра, гіроскопа, зміщень та гравітації входять у похибку положення, швидкості й орієнтації.

У матричній формі:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\tilde{u} + Cw, \quad (17)$$

де $\tilde{u} = (a_n, \omega_n)$ - шум вимірюваного керування, а $w = (a_w, \omega_w)$ - неперервне збурення зміщень. У блоці Solà важливо не змішувати ці два типи випадковості: після дискретизації вони масштабуються по-різному.

1.4 Дискретизація шуму: де найчастіше ламається переклад

Нехай

$$\tilde{u} \sim \mathcal{N}(0, U^c), \quad w^c \sim \mathcal{N}(0, W^c). \quad (18)$$

Шум вимірювання \tilde{u} після вибірки вважається сталим протягом інтервалу інтегрування, тоді як неперервне біле збурення w^c не вибирається, а інтегрується стохастично. Тому

$$F_x = \Phi = e^{A\Delta t}, \quad F_u = B\Delta t, \quad F_w = C, \quad (19)$$

а коваріації дають

$$U = U^c, \quad W = W^c \Delta t. \quad (20)$$

Звідси прогноз коваріації:

$$\hat{\delta x}_{k+1} = F_x \hat{\delta x}_k, \quad (21)$$

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + F_u U F_u^\top + F_w W F_w^\top \quad (22)$$

$$= e^{A\Delta t} P_k (e^{A\Delta t})^\top + \Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top. \quad (23)$$

Це один із найцінніших фрагментів для технічного перекладу: множники Δt^2 і Δt не є стилістичною деталлю. Вони визначають реальну величину шуму в дискретному фільтрі.

1.5 Імпульсна форма Q

Багато реалізацій EKF пишуть коротше:

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + Q. \quad (24)$$

У цьому записі

$$Q = \Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top. \quad (25)$$

Якщо імпульси не діють на весь стан, зручніше ввести матрицю вкладення F_i :

$$\delta x_{k+1} = F_x \delta x_k + F_i i, \quad (26)$$

$$i \sim \mathcal{N}(0, Q_i), \quad (27)$$

$$P_{k+1} = F_x P_k F_x^\top + F_i Q_i F_i^\top. \quad (28)$$

Ці форми еквівалентні, якщо

$$F_i Q_i F_i^\top = Q. \quad (29)$$

1.6 IMU-приклад: ізотропні шуми

Для акселерометра і гіроскопа з однаковими характеристиками по трьох осях часто задають скалярні стандартні відхилення

$$\sigma_{a_n} [m/s^2], \quad \sigma_{\omega_n} [rad/s], \quad \sigma_{a_w} [m/s^2 \sqrt{s}], \quad \sigma_{\omega_w} [rad/s \sqrt{s}]. \quad (30)$$

Тоді

$$U^c = \begin{bmatrix} \sigma_{a_n}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_n}^2 I \end{bmatrix}, \quad W^c = \begin{bmatrix} \sigma_{a_w}^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_{\omega_w}^2 I \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Для імпульсної форми:

$$Q_i = \text{diag}(\sigma_{a_n}^2 \Delta t^2 I, \sigma_{\omega_n}^2 \Delta t^2 I, \sigma_{a_w}^2 \Delta t I, \sigma_{\omega_w}^2 \Delta t I). \quad (32)$$

1.7 Корекція, ін'єкція і скидання похибки

Після вимірювання z з моделлю $h(x)$ стандартний крок:

$$r = z - h(x), \quad (33)$$

$$S = H P H^\top + R, \quad (34)$$

$$K = P H^\top S^{-1}, \quad (35)$$

$$\widehat{\delta x} = K r, \quad (36)$$

$$P^+ = (I - K H) P (I - K H)^\top + K R K^\top. \quad (37)$$

Останній рядок - форма Джозефа. Вона дорожча, але краще зберігає симетрію і додатну напіввизначеність P .

Ін'єкція переносить оцінену похибку у номінальний стан:

$$p \leftarrow p + \widehat{\delta p}, \quad v \leftarrow v + \widehat{\delta v}, \quad (38)$$

$$q \leftarrow q \otimes \text{Exp}(\widehat{\delta\theta}), \quad a_b \leftarrow a_b + \widehat{\delta a_b}, \quad (39)$$

$$\omega_b \leftarrow \omega_b + \widehat{\delta\omega_b}, \quad g \leftarrow g + \widehat{\delta g}. \quad (40)$$

Після ін'єкції похибковий стан повертають до нуля, але коваріацію треба перенести через яacobіан скидання:

$$P \leftarrow GPG^\top. \quad (41)$$

Переклад не має “спростити” цей крок. Якщо пропустити reset-jacobian, фільтр може виглядати працездатним на коротких траєкторіях і бути неконсистентним на довших.