

Micro-Lie: многовиди, SO(3), SE(3), Якобіани

Українська прикладна математика

2026-06-02

1 Micro-Lie: групи Лі, збурення і Якобіани для оцінювання

Джерельний блок: Solà, Deray, Atchuthan, *A micro Lie theory for state estimation in robotics*, файли manifolds.tex, S03.tex, SE3.tex.

1.1 Навіщо потрібна групова нотація

У навігації й робототехніці стан часто лежить не в плоскому просторі \mathbb{R}^n , а на многовиді: орієнтація в SO(3), поза в SE(3), комбінація швидкостей, зміщень і калібрувань у добутку груп і векторних просторів. Якщо переплутати евклідову різницю з груповою похибкою, лінеаризація стає залежною від координат і може псувати коваріацію.

Група Лі \mathcal{M} має групову операцію \circ , одиницю e і обернений елемент X^{-1} . Її дотичний простір в одиниці - алгебра Лі \mathfrak{m} , яку для обчислень ототожнюють із \mathbb{R}^m через оператори `hat/vee`:

$$\tau \in \mathbb{R}^m, \quad \tau^\wedge \in \mathfrak{m}, \quad (\tau^\wedge)^\vee = \tau. \quad (1)$$

1.2 Exp, Log, plus, minus

Експоненціальна мапа переносить малий вектор з дотичного простору на групу:

$$X = \text{Exp}(\tau), \quad \tau = \text{Log}(X). \quad (2)$$

Правий плюс і правий мінус часто визначають так:

$$X \oplus \tau = X \circ \text{Exp}(\tau), \quad (3)$$

$$Y \ominus X = \text{Log}(X^{-1} \circ Y). \quad (4)$$

Лівий плюс/мінус мають інший порядок множення. У перекладі й коді це треба фіксувати явно, бо ліві та праві Якобіани відрізняються знаком і adjoint-перенесенням.

1.3 SO(3)

Для $\phi \in \mathbb{R}^3$ позначимо $\theta = \|\phi\|$. Hat-оператор:

$$\phi^\wedge = [\phi]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Експонента Rodrigues:

$$\text{Exp}(\phi) = I + \frac{\sin \theta}{\theta} \phi^\wedge + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} (\phi^\wedge)^2. \quad (6)$$

Логарифм, для $R \in \text{SO}(3)$:

$$\text{Log}(R) = \frac{\theta}{2 \sin \theta} (R - R^\top)^\vee, \quad \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \right). \quad (7)$$

Поблизу нуля треба застосовувати розклади Тейлора, а не наївне ділення на θ .

Правий Якобіан $\text{SO}(3)$:

$$J_r(\phi) = I - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \phi^\wedge + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} (\phi^\wedge)^2. \quad (8)$$

Лівий Якобіан:

$$J_l(\phi) = J_r(-\phi). \quad (9)$$

Ці матриці потрібні для коректної лінеаризації збурень, інтеграції кутових швидкостей і перенесення коваріацій на многовиді.

1.4 SE(3)

Елемент $T \in \text{SE}(3)$ записують як

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R \in \text{SO}(3), \quad t \in \mathbb{R}^3. \quad (10)$$

Для $\xi = (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^6$ маємо

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Експонента:

$$\text{Exp}(\xi) = \begin{bmatrix} \text{Exp}(\phi) & V(\phi)\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де $V(\phi)$ збігається з лівим Якобіаном $\text{SO}(3)$ у поширеній конвенції:

$$V(\phi) = I + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \phi^\wedge + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} (\phi^\wedge)^2. \quad (13)$$

Adjoint для $T = (R, t)$:

$$\text{Ad}_T = \begin{bmatrix} R & [t]_\times R \\ 0 & R \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Його головна роль - переносити мале збурення між системами координат:

$$T \text{Exp}(\xi) = \text{Exp}(\text{Ad}_T \xi) T. \quad (15)$$

1.5 Похибки, коваріації, композиція

Якщо X має праве мале збурення $X = \bar{X} \text{Exp}(\epsilon)$, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, P)$, і $Y = f(X)$, тоді локально

$$\delta y \approx J \epsilon, \quad P_Y \approx J P J^\top. \quad (16)$$

Для композиції $Z = XY$ похибка часто має вигляд

$$\delta z \approx \text{Ad}_{Y^{-1}} \delta x + \delta y, \quad (17)$$

залежно від правої/лівої конвенції. Саме тут автоматичні переклади часто стають небезпечними: вони можуть правильно перекласти слова, але залишити неоднозначним, чи похибка множиться зліва, чи справа.

1.6 Фактор-графова форма

Для фактору $r_i(x)$ задача найменших квадратів:

$$\min_{\delta x} \sum_i \|r_i(x \oplus \delta x)\|_{\Sigma_i^{-1}}^2. \quad (18)$$

Лінеаризація:

$$r_i(x \oplus \delta x) \approx r_i(x) + J_i \delta x. \quad (19)$$

Нормальні рівняння:

$$\left(\sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} J_i \right) \delta x = - \sum_i J_i^T \Sigma_i^{-1} r_i. \quad (20)$$

Оновлення:

$$x \leftarrow x \oplus \delta x. \quad (21)$$

Це є спільна мова для ESKF, VIO, SLAM, bundle adjustment і калібрування.