

# Точна керованість і стабілізація хвильового рівняння: розділи 1–3

1 червня 2026 р.

# Зміст

<b>1</b>	<b>Постановка та формулювання задач керованості і стабілізації</b>	<b>2</b>
1.1	Задача точної керованості . . . . .	2
1.1.1	Локалізоване внутрішнє керування . . . . .	4
1.1.2	Граничне керування . . . . .	4
1.2	Задача стабілізації . . . . .	5
1.2.1	Локалізована внутрішня дисипація . . . . .	6
1.2.2	Гранична дисипація . . . . .	7
1.2.3	План книги . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Гранична керованість лінійного хвильового рівняння</b>	<b>9</b>
2.1	Опис методу HUM . . . . .	9
2.2	Пряма нерівність: прихована регулярність . . . . .	12
2.3	Обернена нерівність: спостережуваність . . . . .	13
2.4	Основний результат про керованість . . . . .	15
2.5	Слабкі розв'язки хвильового рівняння з неоднорідними граничними умовами . . . . .	16
2.6	Деякі геометричні зауваження . . . . .	19
2.7	Випадок змінних коефіцієнтів в одновимірному просторі . . . . .	21
2.8	Коментарі . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Внутрішня керованість лінійного хвильового рівняння</b>	<b>28</b>
3.1	Опис методу HUM . . . . .	28
3.2	Обернена нерівність . . . . .	29
3.3	Основний результат . . . . .	33
3.4	Змінні коефіцієнти в одновимірних областях . . . . .	33
3.5	Коментарі . . . . .	36

## Розділ 1

# Постановка та формулювання задач керованості і стабілізації

**Анотація.** У цьому розділі ми вводимо задачі керованості та стабілізації для хвильового рівняння. Маючи на меті педагогічність і прагнучи уникнути зайвих технічних труднощів на цьому етапі, обидві задачі аналізуються у спрощеному випадку, коли керування (у формі відкритого контуру або зворотного зв'язку) діє на всій області.

### 1.1. Задача точної керованості

Нехай  $\Omega$  — відкрита й обмежена область у  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , з межею  $\Gamma = \partial\Omega$  класу  $C^2$ .

Розглянемо хвильове рівняння з граничними умовами Діріхле:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = h(x, t) & \text{в} & Q = \Omega \times (0, T) \\ y = 0 & \text{на} & \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(x, 0) = y^0(x), y'(x, 0) = y^1(x) & \text{в} & \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Тут і далі ми використовуємо позначення  $' = \partial \cdot / \partial t$  для частинної похідної за часом.

За відповідних умов регулярності та сумісності для початкових даних  $\{y^0(x), y^1(x)\}$  та джерела  $h(x, t)$  система (1.1) має єдиний розв'язок  $y = y(x, t)$  в енергетичному просторі  $C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . Див., наприклад, Н. Brezis [?], А. Nirenberg [?] та J.-L. Lions [?].

Енергія системи (1.1) задається як

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla y(x, t)|^2 + |y'(x, t)|^2] dx. \quad (1.2)$$

В однорідному випадку, коли  $h \equiv 0$ , множачи рівняння на  $y'$  та інтегруючи частинами по  $\Omega$ , отримуємо

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0,$$

що означає збереження енергії вздовж траєкторії розв'язків (1.1).

Безпосереднім наслідком цього закону збереження енергії є таке: жодний нетривіальний розв'язок незбуреного хвильового рівняння ( $h \equiv 0$ ) не досягає рівноважного стану  $\{0, 0\}$  у жоден момент часу (окрім випадку, коли початкові дані тривіальні:  $\{y^0, y^1\} \equiv \{0, 0\}$ ).

Задача точної керованості полягає саме в тому, щоб привести траєкторії до рівноваги за рівномірний час, незалежно від початкових даних, через дію відповідної зовнішньої сили або керування (яке у розглянутому випадку представлено третім членом  $h$  рівняння).

Точніше, задачу точної керованості можна сформулювати так: проаналізувати існування часу  $T > 0$  такого, що для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  існує керування  $h = h(x, t)$  таке, що розв'язок  $y = y(x, t)$  рівняння (1.1) задовольняє

$$y(T) = y'(T) = 0. \quad (1.3)$$

Ця задача дещо неоднозначна, оскільки ми не вказали ані часовий горизонт  $[0, T]$ , доступний для керування системою, ані множини чи функціональні простори початкових даних та керувань. Очевидно, що загалом можливість отримати результат про точну керованість залежатиме від того, наскільки великий час  $T$ , та від того, як обрані простір початкових даних і простір керувань.

У попередньому формулюванні задачі ми не накладали жодних обмежень на носій керування  $h$ , що робить її розв'язання тривіальним до певної міри. Дійсно, нехай  $T > 0$  та  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  — довільні. Розглянемо дві функції  $a = a(t)$ ,  $b = b(t) \in C^2([0, T])$  такі, що

$$a(0) = 1, \quad a'(0) = 0; \quad a(T) = a'(T) = 0; \quad b(0) = 0, \quad b'(0) = 1; \quad b(T) = b'(T) = 0.$$

Тоді функція  $y(x, t) = a(t)y^0(x) + b(t)y^1(x)$  задовольняє

$$y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1; \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Отже, керування  $h = y'' - \Delta y = a''(t)y^0 + b''(t)y^1 - a(t)\Delta y^0 - b(t)\Delta y^1$  відповідає на питання.

Ми показали такий результат: “Для довільного  $T > 0$ , для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$  таке, що розв'язок (1.1) задовольняє (1.3)”.

Насправді, завдяки лінійності та оборотності в часі хвильового рівняння, виконується наступний загальніший результат: для довільного  $T > 0$  і для кожної пари  $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in C^2([0, T]; H^{-2}(\Omega))$  таке, що розв'язок (1.1) задовольняє

$$y(T) = z^0, \quad y'(T) = z^1. \quad (1.4)$$

Справді, нехай  $z = z(x, t) \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  — розв'язок такої системи:

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{в } Q \\ z = 0 & \text{на } \Sigma \\ z(T) = z^0, \quad z'(T) = z^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Введемо новий стан

$$\xi = y - z. \quad (1.6)$$

Тоді  $y$  задовольняє (1.1) тоді й лише тоді, коли  $\xi$  задовольняє таку систему:

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta \xi = h & \text{в } Q \\ \xi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \xi(0) = y^0 - z(0), \quad \xi'(0) = y^1 - z'(0) & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

і (1.4) виконується тоді й лише тоді, коли

$$\xi(T) = \xi'(T) = 0. \quad (1.8)$$

За попереднім результатом, оскільки  $\{y^0 - z(0), y^1 - z'(0)\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , існує керування  $h \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$  таке, що розв'язок (1.7) задовольняє (1.8), а це означає, що розв'язок (1.1) задовольняє (1.4).

Отже, показати, що кожен початковий стан можна привести до рівноваги, еквівалентно показати, що кожен початковий стан можна перевести в кожний кінцевий стан.

Важливо мати на увазі, що в доведенні цієї еквівалентності ми вирішально використали лінійність та оборотність у часі системи.

Ми побачили, що задачу точної керованості з внутрішнім керуванням, розподіленим по всій області  $\Omega$ , можна розв'язати прямолінійним чином, і що керованість досягається за довільно малий час  $T > 0$ .

Однак системи, в яких керування діє на підобласті або на межі області  $\Omega$ , де поширюються хвилі, є набагато тоншими і вимагають істотного подальшого розвитку методів, який буде представлено по ходу цієї книги. Як ми побачимо, методи, які ми розвинемо, дозволять показати, що регулярність керування, отриманого вище, можна суттєво покращити і що керованості розв'язків зі скінченною енергією можна досягти за допомогою керувань у  $L^2(\Omega \times (0, T))$ .

### 1.1.1. Локалізоване внутрішнє керування

Нехай  $\omega \subset \Omega$  — відкрита непорожня підобласть  $\Omega$ . Позначимо через  $\chi_\omega$  характеристичну функцію  $\omega$  і розглянемо хвильове рівняння:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = h\chi_\omega & \text{в } Q \\ y = 0 & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Задача точної керованості формулюється аналогічно: “Знайти час  $T > 0$  такий, що для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  існує керування  $h$  таке, що розв'язок (1.9) задовольняє (1.3)”.

У цьому випадку керування  $h$  діє тільки на підобласті  $\omega$ . Отже, це задача точної керованості, в якій керування є внутрішнім і локалізованим.

Через скінченну швидкість поширення хвиль ( $= 1$  у нашій моделі), у цій постановці точна керованість вимагає, щоб час  $T$  був достатньо великим (щоб дія керування на  $\omega$  поширилася на всю  $\Omega$ ). Більш того, чим меншою є  $\omega$ , тим довшим буде час керованості  $T$ .

### 1.1.2. Граничне керування

Нехай  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  — непорожня відкрита підмножина  $\Gamma$ . Розглянемо таке хвильове рівняння з неоднорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q \\ y = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ 0 & \text{на } \Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (1.10)$$

Задача точної граничної керованості формулюється так: “Знайти  $T > 0$  такий, що для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  існує керування  $v$ , для якого розв'язок (1.10) задовольняє (1.3)”.

Знову, через скінченну швидкість поширення, можна сподіватися на точну граничну керованість лише за умови, що  $T$  достатньо велике.

Як ми побачимо у наступних двох розділах, обидві задачі — локалізованого внутрішнього керування та граничного керування — є складними. Ми розв'яжемо їх, використовуючи Метод Гільбертової Єдиності (HUM, Hilbert Uniqueness Method), уведений J.-L. Lions у [?], [?], [?]. Цей метод, окрім дуже високої гнучкості, має ту перевагу, що систематично дає оптимальне керування — тобто керування, що мінімізує певну норму (зазвичай  $L^2$ -норму, локалізовану на носії керувань).

Подібні питання виникають для напівлінійних хвильових рівнянь. У розділі ?? ми представимо метод, що поєднує метод HUM та аргумент про нерухому точку, який дозволяє розв'язати задачу керованості, коли нелінійність глобально ліпшицева.

## 1.2. Задача стабілізації

Як ми побачили в попередньому розділі, енергія розв'язків незбуреного хвильового рівняння (за відсутності керування з  $h \equiv 0$ ) зберігається. Задача стабілізації полягає у тому, щоб через дію керування зі зворотним зв'язком (feedback)  $h$  примусити рівномірне експоненційне затухання енергії, коли  $t \rightarrow +\infty$ . Керування знаходиться у формі зворотного зв'язку (закритого контуру), коли його значення в кожен момент часу можна визначити за самим розв'язком системи в той самий момент. Його мета — викликати дисипативні ефекти й підсилити затухання розв'язків до нульової рівноваги при  $t \rightarrow +\infty$ .

Точніше, ми шукаємо функцію  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таку, щоб енергія розв'язку системи

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = F(x, y, y') & \text{в } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (1.11)$$

затухала експоненційно і рівномірно при  $t \rightarrow +\infty$ , тобто щоб існували сталі  $C > 1$  та  $\gamma > 0$  такі, що

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\gamma t} \quad \forall t > 0 \quad (1.12)$$

виконується для кожного розв'язку (1.11).

Щоб мотивувати тип функцій зворотного зв'язку  $F$ , які створюють дисипативні ефекти, помітимо, що формально закон дисипації енергії має такий вигляд (все це буде ретельно вивчено в кожному прикладі):

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Omega} F(x, y, y') y' dx.$$

Отже, першим кандидатом є  $F(x, y, y') = -a(x)y'$ , де  $a = a(x)$  — невід'ємна функція. Це веде до такої системи:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y + a(x)y' = 0 & \text{в } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{на } \Gamma \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (1.13)$$

У найпростішому випадку, коли

$$\exists a_0, a_1 > 0 : a_0 \leq a(x) \leq a_1 \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.14)$$

тобто коли член демпфування обмежений та ефективний усюди в області  $\Omega$ , доведення експоненційного затухання дуже просте. Тут наведемо його ескіз.

Для  $\varepsilon > 0$  визначимо такий  $\varepsilon$ -збурений варіант енергії:

$$E_{\varepsilon}(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} yy' dx. \quad (1.15)$$

Спершу зауважимо, що існує  $\varepsilon_0 > 0$  таке, що при  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  з достатньо малим  $\varepsilon_0$  виконується

$$\frac{1}{2}E_{\varepsilon}(t) \leq E(t) \leq 2E_{\varepsilon}(t) \quad \forall t > 0 \quad (1.16)$$

для будь-якого розв'язку (просто беремо  $\varepsilon_0 = \sqrt{\lambda_1}/2$ , де  $\lambda_1$  — перше власне значення  $-\Delta$  у  $H_0^1(\Omega)$ ).

Далі,

$$\frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) = \frac{dE}{dt}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} yy' dx \right) = - \int_{\Omega} a(x)|y'|^2 dx + \varepsilon \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} yy' dx \right).$$

Окрім того,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} yy' dx \right) &= \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Omega} yy'' dx = \int_{\Omega} |y'|^2 dx + \int_{\Omega} y(\Delta y - a(x)y') dx \\ &= \int_{\Omega} |y'|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \int_{\Omega} a(x)yy' dx. \end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) = \int_{\Omega} (\varepsilon - a(x)) |y'|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} a(x)yy' dx. \quad (1.17)$$

З іншого боку, можна оцінити останній член у (1.17) так:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x)yy' dx \right| &\leq a_1 \int_{\Omega} |y||y'| dx \leq a_1 \left( \frac{\lambda_1}{2a_1} \int_{\Omega} |y|^2 dx + \frac{a_1}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |y'|^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx + \frac{a_1^2}{2\lambda_1} \int_{\Omega} |y'|^2 dx, \end{aligned} \quad (1.18)$$

і тому

$$\frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) \leq \int_{\Omega} \left( \varepsilon \left( 1 + \frac{a_1^2}{2\lambda_1} \right) - a(x) \right) |y'|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx. \quad (1.19)$$

Обираючи  $\varepsilon < \varepsilon_1 = (a_0\lambda_1)/(2\lambda_1 + a_1^2)$ , (1.19) зводиться до

$$\frac{dE_\varepsilon}{dt}(t) \leq -\frac{a_0}{2} \int_{\Omega} |y'|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\nabla y|^2 dx \leq -\varepsilon E(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2} E_\varepsilon(t).$$

Звідси

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \quad \forall t > 0, \quad (1.20)$$

і за (1.16)

$$E(t) \leq 4E(0)e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \quad \forall t > 0. \quad (1.21)$$

Ми показали: “Якщо  $a = a(x)$  задовольняє (1.14), існують сталі  $C > 1$  та  $\gamma > 0$  такі, що кожен розв'язок (1.13) задовольняє (1.12)”.

Припущення, що  $a(x) \geq a_0 > 0$  усюди в  $\Omega$ , відповідає випадку, коли дисипація ефективна у всій області  $\Omega$ . Ситуація набагато тонша, коли дисипація ефективна лише на підмножині  $\omega$  області  $\Omega$  або коли вона ін'єктована через граничні умови.

### 1.2.1. Локалізована внутрішня дисипація

Нехай  $\omega \subset \Omega$  — непорожня відкрита підмножина і нехай  $a \in L^\infty(\Omega)$  задовольняє

$$a(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega; \quad a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \omega. \quad (1.22)$$

Цей випадок відповідає тому, що дисипація ефективна лише в  $\omega$ .

Задача стабілізації формулюється аналогічно: Чи існують сталі  $C > 1$  та  $\gamma > 0$  такі, що розв'язки (1.13) задовольняють (1.12)?

Як ми побачимо, коли  $\omega$  — вимірна множина з додатною мірою, всі розв'язки прямують до нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Але експоненційна збіжність вимагає відповідних

та істотних геометричних умов на множину  $\omega$ , де демпфування є ефективним. Визначення умов, за яких таке експоненційне затухання має місце, та розвиток аналітичних методів для його доведення — це складна задача, до якої ми звернемося пізніше.

Подібні питання виникають для напівлінійних хвильових рівнянь виду

$$y'' - \Delta y + f(y) + a(x)y' = 0.$$

Можна також розглянути рівняння з нелінійними дисипативними членами типу

$$y'' - \Delta y + a(x)g(y') = 0.$$

Однак, коли демпфування входить у систему нелінійно, рівномірне експоненційне затухання енергії загалом не можна сподіватися. Швидкість затухання типово залежить від природи нелінійності і, зокрема, від її поведінки при малих швидкостях, тобто  $y' \sim 0$ , що визначає ефективну силу демпфувального члена.

### 1.2.2. Гранична дисипація

Нехай  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  — непорожня відкрита підмножина межі, а  $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$  — її доповнення. Розглянемо вільне хвильове рівняння з однорідною граничною умовою Діріхле на  $\Gamma_1$ :

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } \Omega \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{на } \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1.23)$$

Зауважимо, що в (1.23) ми поки не накладаємо жодної граничної умови на  $\Gamma_0$ . Задача стабілізації полягає саме у визначенні дисипативних граничних умов на  $\Gamma_0 \times (0, \infty)$  так, щоб досягти рівномірного експоненційного затухання енергії — тобто (1.12) для деяких сталих  $C > 1$  та  $\gamma > 0$ .

Щоб спроектувати відповідні дисипативні закони, формально обчислюємо похідну енергії за часом уздовж розв'язків (1.23) і накладаємо необхідні граничні умови на  $\Gamma_0$  для гарантування дисипативності.

Маємо

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} y' d\sigma,$$

і тому найприродніші граничні умови мають вигляд

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} = -a(x)y' \quad \text{на } \Gamma_0 \times (0, \infty) \quad (1.24)$$

де  $a = a(x) > 0$  на  $\Gamma_0$ .

Маючи замкнено-контурну систему виду (1.23)–(1.24), задача полягає в отриманні умов на розбиття  $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$  та функцію  $a = a(x)$ , щоб виконувалось (1.12).

Звісно, ці запитання можна поставити і в загальнішому контексті напівлінійних хвильових рівнянь.

### 1.2.3. План книги

Як побачимо у наступних розділах, обидві задачі — точної керованості (завдяки застосуванню методу HUM) та стабілізації — розв'язуються через отримання відповідних апіорних оцінок на розв'язки, які дозволяють оцінити повну енергію розв'язків через енергію, локалізовану в області (всередині області



або на її межі), де вприскується дія керування або дисипативного механізму. Ці оцінки будуть називатися “нерівностями спостережуваності” (observability inequalities). Ця термінологія виправдана тим, що спостереження енергії, локалізованої в підмножині області або на її межі, достатньо для отримання оцінок енергії всюди в області, де поширюються хвилі. Для отримання цих оцінок використовуватимуться техніки множників у поєднанні з принципами єдиного продовження.

Розділи 2, 3 та ?? присвячені задачам керованості: спочатку розглядається гранична керованість хвильового рівняння, потім випадок, коли керування діє всередині області, де поширюються хвилі (точніше, на околі її межі), і, нарешті, напівлінійне хвильове рівняння. У розділі ?? ми вивчатимемо задачу стабілізації, розглядаючи випадок нелінійної дисипації, розподіленої по всій області  $\Omega$ , тоді як розділ ?? присвячено випадку граничної дисипації. Ми не звертатимемося до задачі локалізованої внутрішньої дисипації; з цього питання посилаємось на А. Haraux [?] та Е. Zuazua [?], [?], а також на додаткову бібліографію в кінці цих Заміток.

## Розділ 2

# Гранична керованість лінійного хвильового рівняння

**Анотація.** У цьому розділі ми доводимо точну граничну керованість хвильового рівняння, розглядаючи спочатку випадок сталих коефіцієнтів, а потім ширший клас змінних коефіцієнтів, що залежать від просторової змінної. Доведення спирається на метод HUM, що переводить задачу до задачі спостережуваності, і на метод множників, що дозволяє вивести еквівалентні нерівності спостережуваності.

## 2.1. Опис методу HUM

Нехай  $\Omega$  — обмежена область у  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , з межею  $\Gamma$  класу  $C^2$ . Нехай  $T > 0$  і  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  — непорожня відкрита підмножина  $\Gamma$ .

Розглянемо таке хвильове рівняння з неоднорідними граничними умовами:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q = \Omega \times (0, T) \\ y = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \\ 0 & \text{на } \Sigma_1 = (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times (0, T) \end{cases} \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Ми аналізуємо точну керованість цієї системи для множини початкових даних з  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , з керуваннями у  $L^2(\Sigma_0)$ . Мета — розв'язати таку задачу: Знайти  $T > 0$  таке, що для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  існує керування  $v \in L^2(\Sigma_0)$ , для якого розв'язок системи (2.1) задовольняє

$$y(T) = y'(T) = 0. \quad (2.2)$$

**Зауваження 2.1.** Через скінченну швидкість поширення хвиль (одинична для (2.1)) для досягнення точної керованості необхідно, щоб  $T$  було достатньо великим, тобто  $T > T_0$ , де  $T_0 > 0$  залежить від  $\Omega$  та  $\Gamma_0$ .

Як ми побачимо, у вибраному функціональному середовищі точна керованість можлива лише тоді, коли  $\Gamma_0$  є достатньо великою підмножиною  $\Gamma$ .  $\square$

**Зауваження 2.2.** Згадуючи результати розділу 1, завдяки лінійності та оборотності в часі хвильового рівняння, задачу можна еквівалентно сформулювати так: Знайти  $T > 0$  таке, що для кожної пари початкових і кінцевих даних  $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  існує керування  $v \in L^2(\Sigma_0)$ , для якого розв'язок (2.1) задовольняє

$$y(T) = z^0, \quad y'(T) = z^1. \quad (2.3)$$

Цей тип задач вивчало багато авторів, література широка; це сходить до знаменитої оглядової статті [?] D. L. Russell 1978 року, де автор зібрав найбільш релевантні на той час методи й результати. Хоча вже тоді було багато важливих результатів, бракувало систематичного методу. J.-L. Lions у [?] 1986 року запропонував так званий Метод Гільбертової Єдиності (HUM), який дозволяє

звести задачу точної керованості до отримання відповідних апіорних оцінок. Це призвело до швидкого і плідного розвитку галузі.

Протягом цього розділу ми тісно слідуємо розділу I книги J.-L. Lions [?], використовуючи метод HUM. Усі результати, представлені тут, окрім тих, що відповідають розділу 2.7, де розглядаються змінні коефіцієнти, узяті з [?].

Адаптація методу HUM до точної керованості (2.1) полягає в наступному. Для заданих  $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  ми розв'язуємо систему

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 & \text{в } Q \\ \phi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

яка має єдиний розв'язок в енергетичному просторі. Узявши з розв'язку  $\phi$  системи (2.4) його нормальну похідну на керованій частині межі, розв'язуємо обернене (зворотне в часі) кероване хвильове рівняння:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q \\ y(T) = y'(T) = 0 & \text{в } \Omega \\ y = \begin{cases} \partial\phi/\partial\nu & \text{на } \Sigma_0 \\ 0 & \text{на } \Sigma_1. \end{cases} \end{cases} \quad (2.5)$$

У (2.5),  $\nu = \nu(x)$  позначає одиничну зовнішню нормаль до  $\Omega$  у точці  $x \in \Gamma$ , а  $\partial \cdot / \partial \nu$  — похідну за зовнішньою нормаллю.

Задача (2.5) знову має єдиний слабкий розв'язок, регулярність якого обговорюватиметься нижче.

Визначаємо оператор

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}. \quad (2.6)$$

Множаючи перше рівняння (2.5) на  $\theta = \theta(x, t)$  — інший розв'язок  $\theta$  системи (2.4) з початковими даними  $\{\theta^0, \theta^1\}$ , тобто

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 & \text{в } Q \\ \theta = 0 & \text{на } \Sigma \\ \theta = \theta^0, \theta'(0) = \theta^1 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (2.7)$$

та інтегруючи частинами (поки що формально), отримуємо

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\theta^0, \theta^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \frac{\partial\theta}{\partial\nu} d\Sigma \quad (2.8)$$

де  $d\Sigma = d\Gamma dt$  — міра на боковій поверхні  $\Sigma$  циліндра  $Q$ .

Зокрема, при  $\theta = \phi$  маємо

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (2.9)$$

Припустимо, що  $T$  і  $\Gamma_0$  такі, що виконується такий результат про єдиність або єдине продовження:

$$\begin{cases} \text{якщо } \phi, \text{ розв'язок (2.4), задовольняє } \partial\phi/\partial\nu = 0 \text{ на } \Sigma_0, \\ \text{то } \phi \equiv 0, \text{ і, відповідно, } \{\phi^0, \phi^1\} = \{0, 0\}. \end{cases} \quad (2.10)$$

У цьому випадку відображення

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \left( \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \right)^{1/2} \quad (2.11)$$

визначає норму на  $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ . Це дозволяє ввести такий гільбертів простір:

$$F = \text{гільбертів простір, визначений як поповнення} \quad (2.12)$$

$$\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ за нормою } \|\cdot\|_F.$$

Завдяки (2.8) оператор  $\Lambda$  можна продовжити до неперервного лінійного оператора з  $F$  у його спряжений простір  $F'$ . З іншого боку, з (2.11) виводимо, що

$$\Lambda : F \longrightarrow F' \text{ — ізоморфізм.} \quad (2.13)$$

Отже, для заданих початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  таких, що

$$\{y^1, -y^0\} \in F', \quad (2.14)$$

задача

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\} \quad (2.15)$$

має єдиний розв'язок  $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ .

Але розв'язування (2.15) еквівалентне тому, що  $y = y(x, t)$  — розв'язок (2.5), де  $\phi$  — розв'язок (2.4) з  $\{\phi^0, \phi^1\}$ , що задовольняє (2.15) — справджує

$$y(0) = y^0; \quad y'(0) = y^1. \quad (2.16)$$

Шукане керування, таким чином, задається як  $v = \partial\phi/\partial\nu|_{\Sigma_0}$ , де  $\phi = \phi(x, t)$  — розв'язок (2.4), що відповідає даним  $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ , які задовольняють (2.15).

Зауважимо, що за побудовою  $v \in L^2(\Sigma_0)$ . Отже, ми показали такий результат: *“Якщо  $\Omega, \Gamma_0 \subset \Gamma$  та  $T > 0$  такі, що виконано результат єдиності (2.10), то для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  такої, що  $\{y^1, -y^0\} \in F'$ , існує керування  $v \in L^2(\Sigma_0)$ , для якого розв'язок  $y$  системи (2.1) задовольняє (2.2)”*.

Завдяки теоремі Гольмгрена (див. Theorem 5.5.3, [?], або розділ I.8 у [?]) відомо, що для кожної ліпшицевої області  $\Omega$  та довільної відкритої непорожньої підмножини  $\Gamma_0$  межі  $\Gamma$  існує  $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$  таке, що наведений вище результат єдиності виконується для  $T > T_0$ .

Цей результат задовільний, оскільки застосовується до широкого класу підмножин  $\Gamma_0$  межі  $\Gamma$ . Однак він неточний, бо дає дуже мало інформації про простір  $F'$  керованих початкових даних. Отже, лишається розв'язати задачу ідентифікації спряженого простору  $F'$  або, еквівалентно, самого простору  $F$ . Але оскільки  $F$  — поповнення  $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  за нормою  $\|\cdot\|_F$ , питання зводиться до ідентифікації цієї норми. Зокрема, доведення точної керованості в оптимальному просторі  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  еквівалентне тому, що  $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$  або, еквівалентно,  $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , що, своєю чергою, еквівалентне існуванню сталих  $c > 0$ ,  $C > 0$  таких, що

$$c \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F \leq C \|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad (2.17)$$

$$\forall \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

У наступних двох розділах ми доводимо, що (2.17) виконується, якщо  $\Gamma_0$  — достатньо велика підмножина  $\Gamma$  (у сенсі, який уточнимо пізніше) і  $T > 0$  — достатньо велике (залежить від  $\Omega$  та  $\Gamma_0$ ).

## 2.2. Пряма нерівність: прихована регулярність

Спершу доводимо фундаментальну тотожність для розв'язків

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{в } Q \\ \theta = 0 & \text{на } \Sigma \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = \theta^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

**Лема 2.3.** Нехай  $q = q(x)$  — векторне поле в  $(C^1(\overline{\Omega}))^n$ . Для кожного розв'язку (2.18) з початковими даними  $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(Q)$  виконується тотожність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (q \cdot \nu) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &= \int_{\Omega} \theta' q \cdot \nabla \theta \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} q) (|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) \\ &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \int_Q f q \cdot \nabla \theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

*Доведення.* Достатньо помножити рівняння (2.18) на  $q \cdot \nabla \theta$  та інтегрувати частинами по  $Q$ .  $\square$

**Зауваження 2.4.** Через  $\cdot$  позначається евклідовий скалярний добуток у  $\mathbb{R}^n$ . У (2.19) застосовується конвенція про підсумовування за повторюваними індексами; змінні  $(x, t)$  і символи  $dx$  та  $dt$  під знаками інтегралів по  $\Omega$  і  $Q$  опускаються.

Також використано позначення

$$\operatorname{div} q = \text{дивергенція } q = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_k}{\partial x_k}$$

і, нарешті,

$$\int_{\Omega} \theta' q \cdot \nabla \theta \Big|_0^T = \int_{\Omega} \theta'(x, T) q(x) \cdot \nabla \theta(x, T) dx - \int_{\Omega} \theta'(x, 0) q(x) \cdot \nabla \theta(x, 0) dx. \quad \square$$

З тотожності (2.19) легко одержується така оцінка.

**Теорема 2.5.** Існує стала  $c > 0$  така, що

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq c(1+T) \left( \|\theta^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\theta^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right) \quad (2.20)$$

для всіх  $T > 0$  і всіх розв'язків (2.18) з початковими даними

$$\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

*Доведення.* Нехай  $h = h(x) \in C^1(\overline{\Omega})^n$  — векторне поле таке, що  $h = \nu$  на  $\Gamma$ . Таке поле існує, оскільки  $\Omega$  — класу  $C^2$  (див. J.-L. Lions [?], стор. 28, для побудови).

Застосовуючи тотожність (2.19) з  $q = h$ , маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &\leq C \{ \|\theta'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \\ &+ \|\theta'\|_{L^2(Q)}^2 + \|\nabla \theta\|_{L^2(Q)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2 \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

де  $C = C(\|q\|_{W^{1,\infty}(\Omega)})$ .

Окрім того, класичні результати про регулярність хвильового рівняння гарантують, що

$$\|(\theta, \theta')\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^2(\Omega)} \leq C \left[ \|\theta^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\theta^1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right]. \quad (2.22)$$

Поєднання (2.21) і (2.22) дає (2.20) для розв'язків (2.18) з регулярними даними. Оцінка поширюється на розв'язки з початковими даними  $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$  простим аргументом про щільність.  $\square$

**Зауваження 2.6.** Множник  $h \cdot \nabla \theta$  був уведений F. Rellich у контексті еліптичних рівнянь. Адаптацію до гіперболічного випадку та (2.20) виконав J.-L. Lions [?]. Той самий метод дозволяє довести аналогічну оцінку для рівнянь зі змінними коефіцієнтами, тобто  $\theta'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla \theta) = f$  з  $a = a(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$  (пор. [?]).

Цей тип оцінок було поширено на напівлінійні рівняння

$$\theta'' - \Delta \theta + g(\theta) = f$$

J.-L. Lions [?] та M. Milla-Miranda і L. A. Medeiros [?].

**Зауваження 2.7.** Нерівність (2.20) надає результат про *приховану регулярність*. Дійсно, розв'язки (2.18) з початковими даними  $\{\theta^0, \theta^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$  належать класу  $\theta \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T;L^2(\Omega)))$ . Але цього не досить, щоб гарантувати  $\partial\theta/\partial\nu|_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ , факт, який ми показали аргументами множників. Цю додаткову властивість регулярності часто називають “прихованою регулярністю” (hidden regularity), оскільки вона зумовлена тонкою взаємодією хвильового рівняння всередині області та граничної умови. Це показує, що розв'язки скінченної енергії хвильового рівняння з однорідними граничними умовами Діріхле утворюють дуже специфічний підклас функцій, у якому виконується ця додаткова властивість регулярності.  $\square$

## 2.3. Обернена нерівність: спостережуваність

Для довільної точки  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  визначимо  $m(x) = x - x^0$  та

$$R(x^0) = \|m\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.23)$$

радіус найменшої кулі з центром у  $x^0$ , що містить  $\Omega$ . Далі розбиваємо межу  $\Gamma$  області  $\Omega$  на дві частини, як на рис. 2.1:

$$\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) > 0\}; \quad \Gamma_\star(x^0) = \{x \in \Gamma : m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} = \Gamma \setminus \Gamma(x^0),$$

і так само бокову поверхню  $\Sigma$ :

$$\Sigma(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0, T); \quad \Sigma_\star(x^0) = \Gamma_\star(x^0) \times (0, T) = \Sigma \setminus \Sigma(x^0).$$

Розглянемо однорідне рівняння

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{в } Q \\ \phi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

Виконується такий результат.

Рис. 2.1: Розглянута геометрична конфігурація.

**Теорема 2.8.** Нехай  $T > 2R(x^0)$ . Тоді для кожного розв'язку (2.24) з початковими даними  $\{\phi^0, \phi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  виконується така нерівність спостережуваності:

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla \phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2] dx \leq \frac{R(x^0)}{2(T - 2R(x^0))} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (2.25)$$

**Зауваження 2.9.** Нерівність (2.25) часто називають “нерівністю спостережуваності” (observability inequality), оскільки вона гарантує, що повну енергію розв'язків можна оцінити (або “спостерегти”) з межового сліду нормальної похідної. Такі нерівності також відіграють важливу роль у теорії обернених задач.  $\square$

**Доведення.** Спершу, застосовуючи (2.19) з  $f = 0$ ,  $\theta = \phi$  та  $q(x) = m(x) = x - x^0$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi' m \cdot \nabla \phi \Big|_0^T + \frac{n}{2} \int_Q |\phi'|^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_Q |\nabla \phi|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} (m \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \\ &\leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (2.26)$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \int_Q |\phi'|^2 + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \int_Q |\nabla \phi|^2 &= \frac{1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) \\ &= TE_0 + \frac{n-1}{2} \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2) \end{aligned} \quad (2.27)$$

оскільки енергія  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\phi'(x, t)|^2 + |\nabla \phi(x, t)|^2 dx$  зберігається вздовж траєкторії, тобто  $E(t) = E_0$  для всіх  $t \in [0, T]$ .

Далі множимо рівняння на  $\phi$  й інтегруємо частинами, щоб легко отримати так звану *тотожність рівнорозподілу енергії* (equipartition of energy):

$$\int_{\Omega} \phi' \phi \Big|_0^T = \int_Q (|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2). \quad (2.28)$$

Тепер поєднання (2.26), (2.27) та (2.28) дає

$$X(t) \Big|_0^T + TE_0 \leq \frac{R(x^0)}{2} \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \quad (2.29)$$

$$X(t) = \int_{\Omega} \phi'(x, t) \left( m(x) \cdot \nabla \phi(x, t) + \frac{n-1}{2} \phi(x, t) \right) dx. \quad (2.30)$$

Отже, достатньо довести, що

$$\|X(\cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \leq R(x^0)E_0. \quad (2.31)$$

Для зручності, у решті доведення явну залежність  $X$  від  $t$  опускаємо. Маємо

$$|X| \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\phi'|^2 + \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi \right|^2, \quad \forall \delta > 0. \quad (2.32)$$

Далі,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi \right|^2 &\leq \int_{\Omega} |m|^2 |\nabla \phi|^2 + \left( \frac{n-1}{2} \right)^2 \int_{\Omega} |\phi|^2 \\ &\quad + (n-1) \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \phi) \phi. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Тепер, оскільки  $m(x) = x - x^0$ ,

$$\int_{\Omega} m \cdot \nabla \phi \phi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} m \cdot \nabla (\phi^2) = -\frac{n}{2} \int_{\Omega} \phi^2,$$

і тому

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| m \cdot \nabla \phi + \frac{n-1}{2} \phi \right|^2 &\leq R^2(x^0) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 + \left( \frac{(n-1)^2}{4} - \frac{n(n-1)}{2} \right) \int_{\Omega} \phi^2 \\ &\leq R^2(x^0) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Нарешті, з (2.32) і (2.34)

$$|X| \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\phi'|^2 + \frac{R^2(x^0)}{2\delta} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2,$$

звідки (2.31) виводиться вибором  $\delta = R(x^0)$ .  $\square$

**Зауваження 2.10.** Л. Ф. Но у [?] вперше встановив оцінку типу (2.25) для  $T > T_1$  з деяким  $T_1 > 2R(x^0)$ . Потім J.-L. Lions у [?] покращив необхідний мінімальний час, показавши, що якщо  $T > 2R(x^0)$ , то нерівність

$$E_0 \leq C \int_{\Sigma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma$$

виконується зі сталою  $C > 0$ , незалежною від  $\phi$ . Але в [?] стала  $C$  не була явно вказана, бо в доведенні застосовувався аргумент “компактність — єдиність”. Оцінку (2.25), як представлено тут, довів V. Komornik у [?].  $\square$

## 2.4. Основний результат про керованість

Основний результат про граничну керованість лінійного хвильового рівняння такий:



**Теорема 2.11.** Нехай  $x^0$  — довільна точка  $\mathbb{R}^n$ , а  $T > 2R(x^0)$ . Тоді для кожних початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  існує керування  $v \in L^2(\Sigma(x^0))$  таке, що розв’язок системи

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q \\ y = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma(x^0) \\ 0 & \text{на } \Sigma_*(x^0) \end{cases} \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (2.35)$$

задовольняє  $y(T) = y'(T) = 0$ .

*Доведення.* Висновок є безпосереднім наслідком застосування методу HUM, розвиненого в розділі 2.1, та теорем 2.5 і 2.8.

Дійсно, за теоремою 2.5 з  $f = 0$  і  $\theta = \phi$ , та за теоремою 2.8, маємо: якщо  $T > 2R(x^0)$ , то виконується (2.17). Це означає, що  $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , а отже  $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Зауваження 2.12.** Як буде показано в наступному розділі, розв’язок  $y = y(x, t)$  системи (2.35) за умов теореми 2.8 належить класу  $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ . Тому сліди  $y$  і  $y'$  при  $t = T$  коректно визначені.  $\square$

## 2.5. Слабкі розв’язки хвильового рівняння з неоднорідними граничними умовами

У цьому розділі вивчаються існування, єдиність і регулярність розв’язків системи

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q \\ y = v & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.36)$$

Зокрема, виконується такий результат:

**Теорема 2.13.** Для кожних початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  і кожної граничної умови  $v \in L^2(\Sigma)$  існує єдиний розв’язок (2.36) у класі

$$y \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.37)$$

Окрім того, відображення  $\{y^0, y^1, v\} \longrightarrow \{y, y'\}$  лінійне й неперервне з  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$  у  $C([0, T]; L^2(\Omega)) \times C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ , тобто для кожного  $T > 0$  існує стала  $C(T) > 0$  така, що

$$\|(y, y')\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega))} \leq C(T) \{\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\}. \quad (2.38)$$

*Доведення.* У випадку однорідних граничних умов, тобто  $v = 0$ , результат добре відомий. Через лінійність системи достатньо розглянути випадок, для якого  $y^0 = y^1 = 0$ ,  $v \neq 0$ . Розв’язки системи

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } Q \\ y = v & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y'(0) = 0 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (2.39)$$

визначаються методом транспозиції так. Нехай  $\theta = \theta(x, t)$  — розв’язок системи

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta = f & \text{в } Q \\ \theta = 0 & \text{на } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (2.40)$$

з  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

Множачи (формально) рівняння (2.39) на  $\theta$  та інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_Q yf = \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma. \quad (2.41)$$

Ми приймаємо (2.41) як формулювання слабкого розв'язку (2.39). Тобто  $y = y(x, t)$  — розв'язок (2.39) тоді і тільки тоді, коли він задовольняє (2.41) для всіх  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Оцінка (2.20) виконується для розв'язків (2.40) через оборотність хвильового рівняння за часовою змінною. Тому

$$\left| \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Sigma \right| \leq \|v\|_{L^2(\Sigma)} \left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)} \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (2.42)$$

Далі з (2.42) випливає, що відображення  $f \rightarrow \int_{\Sigma} v \frac{d\theta}{d\nu} d\Sigma$  лінійне й неперервне в  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Отже, виводиться існування єдиного розв'язку  $y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , що задовольняє (2.41), для всіх  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Нерівність (2.42) також дає таку оцінку:

$$\|y\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)}. \quad (2.43)$$

Щоб перевірити часову неперервність розв'язку  $t \in [0, T] \rightarrow y(t) \in L^2(\Omega)$ , спершу апроксимуємо  $v \in L^2(\Sigma)$  послідовністю  $\{v_n\} \subset \mathcal{D}((0, T); C^2(\Gamma))$  (простір  $C^\infty$  і компактно носимих функцій  $(0, T) \rightarrow C^2(\Gamma)$ ) такою, що

$$v_n \rightarrow v \quad \text{в } L^2(\Sigma). \quad (2.44)$$

Нехай  $\{y_n\}$  — розв'язок (2.39), асоційований з  $\{v_n\}$ . Оскільки  $v_n$  регулярний, то й  $y_n$  регулярний, зокрема,  $y_n \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . З іншого боку, з (2.43) і (2.44) випливає, що  $y_n \rightarrow y \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , і тому  $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Тепер перевіряємо, що  $y' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ . Для  $g \in \mathcal{D}(Q)$  (простір  $C^\infty$  і компактно носимих функцій у  $Q$ ) з (2.41) з  $f = g'$  випливає, що

$$\int_Q y g' = \int_{\Sigma} v \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \quad (2.45)$$

де  $\theta = \theta(x, t)$  — розв'язок системи

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta = g' & \text{в } Q \\ \theta = 0 & \text{на } \Sigma \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.46)$$

Далі, припустимо, що для всіх  $T > 0$  існує  $C(T) > 0$  таке, що

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(T) \|g\|_{L^1(0, T; H_0^1(\Omega))} \quad (2.47)$$

для кожного розв'язку (2.46). За цих умов, знову за двоїстістю, випливає, що

$$y' \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad (2.48)$$

і виконується оцінка

$$\|y'\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C \|v\|_{L^2(\Sigma)}. \quad (2.49)$$

Нарешті, за щільністю,

$$y' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.50)$$

Отже, достатньо довести оцінку (2.47). Це мета наступного результату.  $\square$

**Лема 2.14.** Для всіх  $T > 0$  існує стала  $C = C(T) > 0$  така, що

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq C(T) \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \quad (2.51)$$

для кожного розв'язку (2.46).

*Доведення.* За щільністю, (2.51) досить довести для всіх  $g \in \mathcal{D}(Q)$ .

Як у доведенні теореми 2.5, застосовуємо тотожність (2.19) з  $q = h$ , де  $h \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$  задовольняє  $h = \nu$  на  $\Gamma$ . Тоді

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma = -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\nabla \theta|^2 + \int_Q \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta \quad (2.52)$$

де використано тотожність

$$\int_Q \theta'' h \cdot \nabla \theta = \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\theta'|^2 + \int_{\Omega} \theta' h \cdot \nabla \theta \Big|_0^T.$$

Доведення (2.51) зводиться до доведення нерівностей

$$\left| -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\nabla \theta|^2 + \int_Q \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \quad (2.53)$$

та

$$\left| \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}^2. \quad (2.54)$$

Зауважимо, що  $\theta = \psi'$ , де  $\psi = \psi(x, t)$  — розв'язок

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = g & \text{в } Q \\ \psi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.55)$$

Класичні результати про регулярність хвильового рівняння гарантують

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \quad (2.56)$$

звідки

$$\|\theta\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (2.57)$$

Цього достатньо для встановлення (2.53).

Щоб довести (2.54), зауважимо, що

$$\begin{aligned} \int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta &= \int_Q (\psi''' - g') h \cdot \nabla \psi' \\ &= - \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi'' + \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T. \end{aligned}$$

Оскільки  $\psi'' - g = \Delta \psi$ ,

$$\int_Q (\theta'' - g') h \cdot \nabla \theta = \int_{\Omega} \Delta \psi h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T - \int_Q (\psi'' - g) h \cdot \nabla \psi''. \quad (2.58)$$

З (2.56) випливає, що

$$\left| \int_{\Omega} \Delta \psi h \cdot \nabla \psi' \Big|_0^T \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}^2.$$

Отже, тепер достатньо оцінити останній член тотожності (2.58):

$$\begin{aligned}
\int_Q (\psi'' - g)h \cdot \nabla \psi'' &= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |\psi''|^2 + \int_Q \operatorname{div}(gh) \psi'' \\
&= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + |g|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) (\Delta \psi + g) \\
&= -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) \Delta \psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2 + \int_Q g \operatorname{div}(gh).
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Проте

$$\begin{aligned}
\int_Q g \operatorname{div}(gh) &= \int_Q |g|^2 \operatorname{div} h + \int_Q g \nabla g \cdot h \\
&= \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2 + \frac{1}{2} \int_Q h \cdot \nabla (g^2) = \frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) |g|^2,
\end{aligned}$$

і тому

$$\int_Q (\psi'' - g)h \cdot \nabla \psi'' = -\frac{1}{2} \int_Q (\operatorname{div} h) (|\Delta \psi|^2 + 2\Delta \psi g) + \int_Q \operatorname{div}(gh) \Delta \psi. \tag{2.60}$$

Нарешті, поєднуючи (2.56) і (2.60), легко випливає

$$\left| \int_Q (\psi'' - g)h \cdot \nabla \psi'' \right| \leq C \|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}^2,$$

що завершує доведення основного результату.  $\square$

Слід зробити кілька зауважень.

**Зауваження 2.15.** Теорема 2.13 належить J.-L. Lions [?].

Поглиблений виклад методу транспозиції та його численних застосувань для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних з дуже слабкими припущеннями регулярності можна знайти в J.-L. Lions та E. Magenes [?].  $\square$

**Зауваження 2.16.** Усі показані результати можна поширити на випадок, коли  $\Omega$  — відкрита й опукла множина, без додаткових припущень регулярності  $\Gamma$  (пор. J.-L. Lions [?], гл. I). Це зумовлено просто властивостями регулярності ( $H^2$ , зокрема) розв'язків рівняння Лапласа з однорідними граничними умовами Діріхле в такому геометричному середовищі.  $\square$

## 2.6. Деякі геометричні зауваження

1. Доведено точну керованість хвильового рівняння в  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  з керуваннями, носіями яких є підмножини межі виду  $\Gamma(x^0)$ . Важливо відзначити, що, загалом,  $\Gamma(x^0)$  становить “велику” підмножину межі.

Дійсно, у випадку, коли  $\Omega$  — квадрат, тобто  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , розрізняються кілька випадків для  $x^0$  і  $\Gamma(x^0)$ :

- (а) Якщо  $x^0 \in \Omega$ , то  $\Gamma(x^0) = \Gamma$ .

(б) Якщо  $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ , то  $\Gamma(x^0) \subset \Gamma$  — об'єднання двох або трьох сусідніх сторін.

Отже,  $\Gamma(x^0)$  містить принаймні половину межі  $\Gamma$ .

Фіксуємо сторони  $\Gamma_0$ , на яких діє керування, і обираючи  $x^0$  належним чином, можна мінімізувати час точної керованості  $2R(x^0)$ . Якщо  $\Gamma_0 = \Gamma$ , вибір  $x^0 = (1/2, 1/2)$  у центрі дає  $2R(x^0) = \text{діаметр } \Omega = \sqrt{2}$ . З іншого боку, якщо  $\Gamma_0$  — об'єднання двох сусідніх сторін, вибір  $x^0$  у протилежній вершині дає  $2R(x^0) = 2\sqrt{2}$ . Якщо  $\Gamma_0$  — об'єднання трьох сторін, вибір  $x^0$  як середини четвертої сторони дає  $2R(x^0) = \sqrt{5}$ .

З іншого боку, якщо  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  — одиничний диск, легко перевірити, що  $\Gamma(x^0)$  містить півколо для всіх  $x^0 \in \mathbb{R}^2$ . Крім того,  $\Gamma(x^0)$  наближається до півкола тоді й лише тоді, коли  $|x^0| \rightarrow \infty$ , тобто коли час керованості розбігається:  $2R(x^0) \rightarrow \infty$ . У випадку керувань, носіями яких є вся  $\Gamma$ , час керованості мінімізується вибором  $x^0 = (0, 0)$  у центрі кола, що дає  $2R(x^0) = 2$ .

2. С. Bardos, G. Lebeau і J. Rauch у [?] істотно покращили ці результати, застосувавши техніки мікролокального аналізу. Їхні результати застосовні до областей  $\Omega$  класу  $C^\infty$ , і приблизно полягають у наступному: *“Хвильове рівняння точно кероване в  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  тоді і тільки тоді, коли кожний промінь, що поширюється в  $\Omega$  і відбивається від її межі за законами геометричної оптики, перетинає  $\Gamma_0$  у недифракційній точці та в момент часу  $t < T$ ”*.

Цей результат суттєво гарантує еквівалентність між керованістю у точному функціональному середовищі та так званою *геометричною умовою керування* (Geometric Control Condition, GCC), яка має мікролокальну природу.

Цей результат оптимальний, оскільки характеризує множини  $\Gamma_0$ , для яких точна керованість в  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  виконується з керуваннями в  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ .

Завдяки цьому результату теорему 2.11 істотно покращено: вона дозволяє довести керованість для ширшого класу носіїв  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  керування і зменшити необхідний час відносно методу множників. Наприклад, у випадку, коли  $\Omega$  — диск, точна керованість виконується з керуваннями, носіями яких є будь-яка підмножина  $\Gamma$ , що містить півколо. Але час керування, який дають техніки мікролокального аналізу, як правило, менший за той, що його одержуємо методом множників. Мікролокальні засоби також дозволяють показати, що хвилі можна керувати, діючи на трьох розділених частинах межі, які не містять жодного півкола — результат, недосяжний методом множників, як представлено вище.

3. Як зазначено в розділі 2.1, теорема Гольмгрена забезпечує, що для довільної відкритої непорожньої підмножини  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  існує  $T_0 = T_0(\Gamma_0, \Omega)$  таке, що для всіх  $T > T_0$  виконується результат єдиності (2.10). Застосовуючи метод НУМ, виводимо: якщо  $T > T_0$ , то хвильове рівняння точно кероване з керуваннями в  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  для початкових даних  $\{y^0, y^1\}$  таких, що  $\{y^1, -y^0\} \in F'$ , де  $F = F(\Gamma_0, \Omega, T)$  — гільбертів простір, який апіорі залежить від  $\Gamma_0, \Omega$  і  $T$ .

У теоремі 2.11 ми показали, що якщо  $\Gamma_0 = \Gamma(x^0)$  і  $T > 2R(x^0)$ , то  $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . З іншого боку, мікролокальні засоби та результати у [?] дають характеристику множин  $\Gamma_0$  і значень  $T$ , для яких  $F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Однак характеристика (або отримання корисної та керованої інформації) простору  $F$ , коли ці геометричні умови не виконано — тобто коли  $F$  строго міститься в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  — значною мірою є відкритою задачею. А. Нагаих [?] зробив внесок у цьому напрямку, коли носій керування — підмножина  $\Omega$ . З іншого боку, [?] дає точний опис природи простору керованих даних у деяких особливих геометріях, як-от поверхнях обертання. Але для загальних геометрій питання все ще відкрите.  $\square$

## 2.7. Випадок змінних коефіцієнтів в одновимірному просторі

Розглянемо таке хвильове рівняння зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) = 0 & \text{в } Q \\ y = \begin{cases} v & \text{на } \Sigma_0 \\ 0 & \text{на } \Sigma \setminus \Sigma_0 \end{cases} \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 \end{cases} \quad (2.61)$$

з

$$a = a(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (2.62)$$

таким, що

$$\exists a_0 > 0 : a(x) \geq a_0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.63)$$

Точна керованість цього рівняння — задача, що ще не цілком зрозуміла. Доступні такі часткові результати:

- Якщо  $\Omega$  гладка класу  $C^\infty$  і  $a \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , то результати [?] дозволяють охарактеризувати підмножини  $\Gamma_0$  межі  $\Gamma$  і значення  $T$ , для яких (2.61) точно кероване в  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ .

Зауважимо, однак, що біхарактеристичні промені визначаються згідно символу оператора хвильового рівняння зі змінними коефіцієнтами. Тому ГСС залежить від цих коефіцієнтів, і в деяких випадках можуть навіть існувати біхарактеристичні промені, які постійно залишаються всередині  $\Omega$ , ніколи не досягаючи зовнішньої межі  $\partial\Omega$ . У таких випадках гранична спостережуваність може не виконуватись навіть якщо керування діє всюди на межі, і це незалежно від довжини часового горизонту  $T$ . За детальнішим обговоренням посилаємось на коментарі нижче.

- V. Komornik у [?] зауважив, що метод множників, який використовувався в попередніх розділах, застосовний для достатньо великих  $T > 0$ , якщо  $a = a(x)$  задовольняє таку додаткову гіпотезу:

$$\exists \delta > 0 : (1 - \delta)a(x) - \frac{\operatorname{div} a(x) \cdot (x - x^0)}{2} \geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.64)$$

У [?] було показано, що умова (2.64) точна, оскільки якщо  $a = \frac{1}{2} \operatorname{div} a \cdot (x - x_0)$ , то можуть існувати промені геометричної оптики, “захоплені” всередині  $\Omega$ , які ніколи не досягають зовнішньої межі — і це робить керованість неможливою.

Однак загальний випадок без структурних умов на коефіцієнти  $a = a(x)$  не може бути розв’язаний методами множників. Мета цього розділу — довести точну керованість в одновимірному випадку без жодних обмежень на коефіцієнт, окрім (2.62) і (2.63).

Одновимірний результат, який ми тут представляємо, показує, що — згідно з нашою інтуїцією — характеристичні промені перетинають всю область, відбиваючись назад і вперед від межі. Це робить неможливим концентрацію хвиль усередині й забезпечує граничну керованість за достатньо великий характеристичний час. Однак для цього необхідно накласти певні умови регулярності на коефіцієнт, грубо  $a \in BV$  (обмежена варіація).

Нехай  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Розглянемо одновимірну систему

$$\begin{cases} y'' - (a(x)y_x)_x = 0 & \text{в } Q = (0, 1) \times (0, T) \\ y(0, t) = v(t) & \text{на } (0, T) \\ y(1, t) = 0 & \text{на } (0, T) \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } (0, 1). \end{cases} \quad (2.65)$$

Маємо такий результат:

**Теорема 2.17.** *Припустимо, що  $a \in BV([0, 1])$  задовольняє (2.63). Якщо  $T > 2/\sqrt{a_0}$ , то для всіх початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  існує керування  $v = v(t) \in L^2(0, T)$  таке, що розв'язок (2.65) задовольняє (2.2).*

**Зауваження 2.18.** Той самий результат справджується, коли керування діє на кінці  $x = 1$ , тобто з граничними умовами виду  $y(0, t) = 0$ ;  $y(1, t) = v(t)$  для  $t \in (0, T)$ .

Коли керування діє одночасно з обох кінців інтервалу, тобто

$$y(0, t) = v(t); y(1, t) = w(t) \quad \forall t \in (0, T),$$

точна керованість виконується для  $T > 1/\sqrt{a_0}$  з керуваннями  $v(t), w(t) \in L^2(0, T)$ .

**Доведення.** Представимо доведення для  $a \in C^1[0, 1]$ , щоб уникнути технічних труднощів. Те, що результат справджується і для  $a \in BV(0, 1)$ , зауважено в [?], і його можна вивести за щільністю.

Метод HUM легко застосовується до рівняння (2.65). Таким чином, задача зводиться до отримання оцінки

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T |\phi_x(0, t)|^2 dt \quad (2.66)$$

де  $\phi$  — розв'язок

$$\begin{cases} \phi'' - (a(x)\phi_x)_x = 0 & \text{в } (0, 1) \times (0, T) \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 & \text{на } t \in (0, T) \\ \phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1 & \text{в } (0, 1). \end{cases} \quad (2.67)$$

Як ми зазначили у зауваженні 2.18, пряма нерівність легко поширюється на системи зі змінними коефіцієнтами в будь-якій розмірності  $n \geq 1$ . Тому вона виконується і в цьому одновимірному випадку. Тож зосередимось на нерівності спостережуваності. Зауважимо, втім, що методи, які ми використовуємо для доведення спостережуваності, також можна застосувати для прихованої регулярності — щоб отримати пряму нерівність для  $BV$ -коефіцієнтів.

Щоб показати обернену нерівність, визначимо “бічний” енергетичний функціонал

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \{|\phi'(x, t)|^2 + a(x)|\phi_x(x, t)|^2\} dt \quad (2.68)$$

де  $\alpha = 1/\sqrt{a_0}$ . Зауважимо, що

$$F(0) = \frac{a(0)}{2} \int_0^T |\phi_x(0, t)|^2 dt. \quad (2.69)$$

Обчислюємо похідну  $F$ :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dF(x)}{dx} \\ &= \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \left[ \phi'(x, t) \phi'_x(x, t) + \frac{a_x(x)}{2} |\phi_x(x, t)|^2 + a(x) \phi_x(x, t) \phi_{xx}(x, t) \right] dt \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x, T-\alpha x} [|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2]. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Інтегрування частинами за часом дає

$$\int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi'(x, t) \phi'_x(x, t) dt = - \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} \phi''(x, t) \phi_x(x, t) dt + \phi'(x, t) \phi_x(x, t) \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x},$$

звідки виводимо

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} [-\phi''(x, t) + a(x) \phi_{xx}(x, t) + a_x(x) \phi_x(x, t)] \phi_x(x, t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x(x) |\phi_x(x, t)|^2 dt + \phi'(x, t) \phi_x(x, t) \Big|_{\alpha x}^{T-\alpha x} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=\alpha x, T-\alpha x} [|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2] \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a_x(x) |\phi_x(x, t)|^2 dt \end{aligned} \quad (2.71)$$

оскільки

$$\phi'' - a(x) \phi_{xx} - a_x \phi_x = \phi'' - (a(x) \phi_x)_x = 0$$

і

$$\begin{aligned} |\phi'(x, t) \phi_x(x, t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left( \frac{1}{2} |\phi'(x, t)|^2 + \frac{a_0}{2} |\phi_x(x, t)|^2 \right) \\ &\leq \frac{\alpha}{2} (|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in (0, 1). \end{aligned}$$

з (2.71)

$$F'(x) \leq \frac{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}}{2a_0} \int_{\alpha x}^{T-\alpha x} a(x) |\phi_x(x, t)|^2 dt \leq \frac{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}}{a_0} F(x), \quad (2.72)$$

і тому

$$F(x) \leq e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)} x / a_0} F(0) \leq e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)} / a_0} F(0), \quad \forall x \in (0, 1). \quad (2.73)$$

Далі, інтегруючи (2.73) за  $x \in (0, 1)$ , отримуємо

$$\int_0^1 F(x) dx \leq e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)} / a_0} F(0). \quad (2.74)$$

Нарешті, оскільки  $T > 2\alpha = 2/\sqrt{a_0}$ , помічаємо, що

$$\begin{aligned} (T - 2\alpha)E(0) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{T-\alpha} \int_0^1 [|\phi'(x, t)|^2 + a(x) |\phi_x(x, t)|^2] dx dt \\ &\leq \int_0^1 F(x) dx \leq e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)} / a_0} F(0). \end{aligned}$$



Ця нерівність, у поєднанні з властивістю збереження енергії

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \{|\phi'(x, t)|^2 + a(x)|\phi_x(x, t)|^2\} dx = E(0),$$

дає

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{|\phi^1(x)|^2 + a(x)|\phi_x^0(x)|^2\} dx &\leq \frac{2e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}/a_0}}{(T-2\alpha)} F(0) \\ &= \frac{a(0)e^{\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}/a_0}}{(T-2\alpha)} \int_0^T |\phi_x(0, t)|^2 dt. \quad \square \end{aligned} \quad (2.75)$$

□

Слід зробити кілька зауважень.

**Зауваження 2.19.** • Поширення наведеного доведення на  $BV$ -функції вимагає тоншого аналізу нерівності (2.71). Достатньо застосувати нерівність Гронвола, щоб отримати аналогічну оцінку, замінивши норму  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  на  $\|a_x\|_{L^1(0,1)}$ . Це дає оцінку для  $a \in W^{1,1}$ , що за щільністю поширюється на будь-яке  $a \in BV$  (див. [?]).

- З (2.71) випливає, що коли  $a(x)$  зростаюча,  $F$  спадає, і стала  $C$  в (2.66) не залежить від  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$ .
- Монотонність коефіцієнта  $a = a(x)$  не зберігається в контексті гомогенізації з швидко осцилюючими коефіцієнтами — тема, розглянута в [?, ?]. Наприклад, якщо  $a(x) \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  — неконстанта періодична функція (а отже немонотонна), що задовольняє  $a(x) \geq a_0 > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , то стала спостережуваності  $C_\varepsilon$  в оцінці (2.66), що відповідає рівнянню

$$\phi'' - \left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi_x\right)_x = 0, \quad (2.76)$$

має порядок  $C_\varepsilon \sim e^{c/\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

У [?, ?] отримано точні результати, які показують, що рівномірні результати про спостережуваність виконуються в оптимальному класі низькочастотних розв'язків. Це дозволяє у границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  відновити нерівність спостережуваності для гомогенізованого хвильового рівняння зі сталими коефіцієнтами.

□

## 2.8. Коментарі

1. **Оптимальні керування мінімальної норми.** З теореми 2.11 випливає, що якщо  $T > 2R(x^0)$ , то для кожних  $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  множина допустимих керувань для (2.76), яку позначимо через

$$U_{ad} = \{v \in L^2(\Sigma(x^0)) : y \text{ — розв'язок (2.35), що задовольняє (2.2)}\}$$

містить нескінченно багато керувань.

Дійсно, нехай  $\varepsilon > 0$  таке, що  $T - \varepsilon > 2R(x^0)$ . Для заданого  $w \in L^2(\Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon))$  розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } \Omega \times (0, \varepsilon) \\ y = \begin{cases} w & \text{на } \Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon) \\ 0 & \text{на } \Gamma_*(x^0) \times (0, \varepsilon) \end{cases} \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (2.77)$$

З теореми 2.13 випливає, що

$$y_\varepsilon^0 = y(\varepsilon) \in L^2(\Omega), y_\varepsilon^1 = y'(\varepsilon) \in H^{-1}(\Omega). \quad (2.78)$$

Оскільки  $T - \varepsilon > 2R(x^0)$ , теорема 2.11 забезпечує існування  $u \in L^2(\Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T))$ , для якого розв'язок системи

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{в } \Omega \times (\varepsilon, T) \\ y = \begin{cases} u & \text{на } \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T) \\ 0 & \text{на } \Gamma_*(x^0) \times (\varepsilon, T) \end{cases} \\ y(\varepsilon) = y_\varepsilon^0, y'(\varepsilon) = y_\varepsilon^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (2.79)$$

задовольняє (2.2).

Отже, керування

$$v = \begin{cases} w & \text{в } \Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon) \\ u & \text{в } \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T) \end{cases} \quad (2.80)$$

належить множині допустимих керувань  $U_{ad}$ , де  $w$  — довільний елемент нескінченновимірного простору  $L^2(\Gamma(x^0) \times (0, \varepsilon))$ .

Помітивши, що  $U_{ad}$  містить нескінченно багато елементів, природно постає питання: *Чи існує оптимальне керування  $v \in U_{ad}$  мінімальної норми, тобто таке, що*

$$\|v\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 = \min_{u \in U_{ad}} \|u\|_{L^2(\Sigma(x^0))}^2 ? \quad (2.81)$$

Задача мінімізації (2.81) має єдиний розв'язок, який власне і є керуванням, отриманим у теоремі 2.11, що його дає HUM. Насправді, HUM послідовно дає оптимальні керування мінімальної норми у відповідному функціональному середовищі в різних ситуаціях, де він застосовується (пор. J.-L. Lions [?], гл. VIII).  $\square$

2. **Інші граничні умови.** У цьому розділі ми розглядали лише граничні умови типу Діріхле. Як метод HUM, так і техніки множників можна адаптувати до граничних умов Неймана або змішаних умов Діріхле–Неймана (пор. J.-L. Lions [?], гл. III). Однак для змішаних граничних умов сингулярності, які мають розв'язки в граничних точках, де тип умови змінюється, значно ускладнюють аналіз. Зокрема, в такому випадку деякі формули інтегрування частинами, які використовуються при застосуванні множників, вже не виконуються. Р. Grisvard у [?], [?] довів, що, хоча стандартні тотожності не виконуються, необхідні нерівності для бажаних апіорних оцінок справді справджуються.

З іншого боку, техніки та результати С. Bardos, G. Lebeau і J. Rauch [?], що показують, що точна геометрична умова керування достатня для керованості, також можна адаптувати до випадку граничних умов типу Неймана.  $\square$

3. **Менш регулярні області.** У цьому розділі припускається  $C^2$ -регулярність області  $\Omega$  (або її опуклість). Ці гіпотези можна значно послабити (див. P. Grisvard [?] і [?]).  $\square$

4. **Більш регулярні керування.** Властивість керованості виконується в  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  з  $L^2$ -керуваннями. Однак методи HUM і множників можна адаптувати для роботи в інших просторах. Зокрема, можна показати, що якщо початкові дані належать  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , то HUM-керування лежить у  $H_0^1(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$ . Це питання проаналізовано в [?], де показано еліптичність HUM-оператора в тому сенсі, що більш регулярні дані дають більш регулярні керування.

Зауважимо, однак, що аналіз у [?] вимагає використання вагової функції, що модулює керування в часі, такої, що ефекти в крайніх точках  $t = 0, T$  зникають. Це істотно для доведення еліптичності HUM-оператора, оскільки дозволяє виконувати інтегрування частинами за часовою змінною для отримання регулярності керувань, без артефактів, які створюють крайні значення в  $t = 0, T$ .

Аналогічно, властивість точної керованості в більшому спряженому просторі  $H^{-1}(\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$  можна довести за допомогою керувань у більшому просторі  $H^{-1}(0, T; L^2(\Gamma(x^0)))$  (пор. J.-L. Lions [?], гл. I).  $\square$

5. **Збурення моделі.** Задачу точної керованості за наявності збурень — як-от варіації області, швидко осцилюючі коефіцієнти тощо — вивчав J.-L. Lions у [?]. Це тема, у якій ще багато цікавих відкритих задач. Деякі з них обговорюються тут.

6. **Напівлінійні рівняння.** Задачу точної керованості напівлінійного хвильового рівняння вивчав E. Zuazua у [?], [?], [?] і розв'язав, зокрема, для глобально ліпшицевих збурень. Задача відкрита, коли нелінійний член суперлінійний на нескінченності (див. E. Zuazua [?] для часткового випадку в одновимірному просторі).

Зауважимо, що в будь-якій просторовій розмірності і для широкого класу нелінійностей, поєднуючи локальні результати про керованість і стабілізацію, можна досягти керованості за час, довжина якого залежить від розміру керованих даних. Але чи можна зробити час керування незалежним від керованих даних — відкрита задача (див. [?]).

7. **Перфоровані області.** Задачу точної керованості лінійного хвильового рівняння у перфорованих областях вивчали D. Cioranescu, P. Donato і E. Zuazua у [?] і [?].  $\square$

8. **Рівняння пластини та Шредінгера.** Метод HUM і техніки множників можна адаптувати до вивчення точної керованості рівняння коливної пластини виду

$$y'' + \Delta^2 y = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T) \quad (2.82)$$

з різними граничними умовами (пор. J.-L. Lions [?], гл. IV; J. Lagnese і J.-L. Lions [?], а також бібліографія там).

Характерна риса цієї моделі — її властива нескінченна швидкість поширення, яка, на відміну від хвильового рівняння, дозволяє точній керованості справджуватися за довільно малий час. Аналогічні результати довела E. Machtyngier [?] для рівняння Шредінгера. У G. Lebeau [?] систематично показано, використовуючи діадичні розклади Фур'є, що геометрична

умова керування на  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  достатня для точної керованості рівняння пластини (2.82) і рівняння Шредінгера у відповідних енергетичних просторах з керуваннями в  $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$  для довільно малого  $T > 0$ , як наслідок точних властивостей керованості хвильового рівняння.

Аналогічно, точна керованість виконується для системи теорії пружності (пор. J.-L. Lions [?], гл. IV) і для рівнянь Максвелла (пор. J. Lagnese [?] та O. Nalin [?]).

□

9. **Чисельна апроксимація.** R. Glowinski, С.Н. Li та J.-L. Lions [?] розробили ефективний чисельний метод для дослідження точної керованості хвильового рівняння. Також посилаємось на додаткову бібліографію в кінці книги щодо подальших посилань на новіші розробки в цьому напрямку. □

## Розділ 3

# Внутрішня керованість лінійного хвильового рівняння

**Анотація.** У цьому розділі результати попереднього розділу адаптовано для керуючих підобластей у внутрішній частині області, де поширюються хвилі, з акцентом на окремому випадку, коли носій керування розташований поблизу межі.

### 3.1. Опис методу HUM

Як зазначено у розділі 1, задачу точної внутрішньої керованості лінійного хвильового рівняння можна сформулювати так.

Нехай  $\omega$  — непорожня відкрита підмножина  $\Omega$ . Розглянемо хвильове рівняння

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = h\chi_\omega & \text{в } Q \\ y = 0 & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y^0, \ y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

де  $\chi_\omega$  позначає характеристичну функцію  $\omega$ .

Нас цікавить властивість керованості в енергетичному просторі  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$ .

Задача полягає у знаходженні  $T > 0$  такого, що для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ , для якого розв'язок (3.1) задовольняє

$$y(T) = y'(T) = 0. \quad (3.2)$$

Як і в контексті задачі граничної керованості, такий результат вимагає, щоб  $\omega$  задовольняла певні геометричні умови.

Метод HUM можна адаптувати до цієї задачі так.

Для заданих  $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$  розглянемо систему

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta \phi = 0 & \text{в } Q \\ \phi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

і потім розв'яжемо

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = -\phi\chi_\omega & \text{в } Q \\ y = 0 & \text{на } \Sigma \\ y(T) = 0, \ y'(T) = 0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (3.4)$$

Тоді визначимо оператор

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y'(0), -y(0)\}. \quad (3.5)$$

Множачи в (3.4) на  $\phi$  та інтегруючи частинами, отримуємо

$$\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\} \rangle = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dx dt. \quad (3.6)$$

Припустимо, що виконується такий результат єдиності:

$$\phi = 0 \text{ в } \omega \times (0, T) \Rightarrow \phi^0 \equiv \phi^1 \equiv 0. \quad (3.7)$$

Тоді

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_F = \left( \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

визначає норму в  $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ , де

$$F = \text{гільбертів простір} - \text{поповнення } \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \text{ за нормою } \|\cdot\|_F. \quad (3.9)$$

З (3.6) випливає, що  $\Lambda$  єдиним чином продовжується до ізоморфізму з  $F$  у  $F'$ .

Тому для заданих  $\{y^0, y^1\}$  таких, що  $\{y^1, -y^0\} \in F'$ , існує єдина пара  $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$  така, що

$$\Lambda\{\phi^0, \phi^1\} = \{y^1, -y^0\}. \quad (3.10)$$

Зокрема, якщо застосовуємо керування  $h = -\phi \in L^2(\omega \times (0, T))$ , де  $\phi$  — розв'язок (3.3) з початковими даними, що задовольняють (3.10), то розв'язок (3.4) задовольняє  $y(0) = y^0$ ,  $y'(0) = y^1$ .

Теорема Гольмгрена гарантує, що для довільної непорожньої відкритої підмножини  $\omega \subset \Omega$  існує  $T_0(\omega, \Omega)$  таке, що якщо  $T > T_0(\omega, \Omega)$ , то виконується результат єдиності (3.7).

Тому ми показали, що якщо  $T > T_0(\omega, \Omega)$ , то система (3.1) керована в просторі початкових даних таких, що  $\{y^1, -y^0\} \in F'$ , з керуваннями  $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ .

Задача зводиться до знаходження достатніх умов на  $\omega$  і  $T$ , щоб  $F' = L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , або, еквівалентно,  $F = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ .

Отже, достатньо довести існування сталих  $c > 0$ ,  $C > 0$  таких, що

$$c\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt \leq C\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2, \quad (3.11)$$

$$\forall \{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega).$$

Добре відомо, що  $\|\phi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}$ , звідки виводиться верхня оцінка в (3.11).

Залишається довести обернену нерівність спостережуваності виду

$$\|\{\phi^0, \phi^1\}\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt, \quad (3.12)$$

що буде предметом наступного розділу. Це вимагатиме накладення геометричних умов на спостережувальну підобласть  $\omega$ .

## 3.2. Обернена нерівність

Нехай  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Розглянемо розбиття межі  $\{\Gamma(x^0), \Gamma_*(x^0)\}$ , введене в попередньому розділі.

Нехай  $\omega \subset \Omega$  — окіл  $\overline{\Gamma(x^0)}$ , тобто для деякої відкритої множини  $\Theta \subset \mathbb{R}^n$  такої, що  $\overline{\Gamma(x^0)} \subset \Theta$ , маємо  $\omega = \Omega \cap \Theta$ .

У такому геометричному середовищі справджується наступний результат про керованість:

Рис. 3.1: Геометрична конфігурація, у якій керування діє на околі  $\omega$  множини  $\Gamma(x^0)$ .

**Теорема 3.1.** Нехай  $\Omega$  — обмежена область  $\mathbb{R}^n$  з межею  $\Gamma$  класу  $C^2$ . Нехай  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  та  $\omega \subset \Omega$  — окіл  $\overline{\Gamma(x^0)}$ .

Якщо  $T > T(x^0) = 2R(x^0)$ , то існує стала  $C = C(T) > 0$  така, що

$$\|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt \quad (3.13)$$

для будь-якого розв'язку (3.3) з даними  $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ .

*Доведення.* Доведення проводимо у кілька кроків.

**Крок 1:** Зведення до нерівності вищого порядку. Припустимо, що виконується оцінка

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\phi'|^2 dx dt. \quad (3.14)$$

Метою є показати, що (3.14) тягне (3.13).

Для заданих  $\{\phi^0, \phi^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  визначимо

$$X \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta X = \phi^1 \text{ в } \Omega. \quad (3.15)$$

Узявши розв'язок  $\phi$  системи (3.3) з початковими даними  $\{\phi^0, \phi^1\}$ , визначимо

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(s) ds + X. \quad (3.16)$$

Легко бачити, що  $\psi' = \phi$  і  $\psi = \psi(x, t)$  розв'язує таку систему:

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta \psi = 0 & \text{в } Q \\ \psi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \psi(0) = X, \psi'(0) = \phi^0 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Тепер застосовуємо нерівність (3.14) до  $\psi$ , щоб отримати

$$\|X\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{\omega} |\psi'|^2 dx dt = C \int_0^T \int_{\omega} |\phi|^2 dx dt. \quad (3.18)$$

З іншого боку, (3.13) виводиться з (3.18) завдяки класичним властивостям оператора Лапласа з умовами Діріхле, оскільки

$$\exists C > 0 : \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \|X\|_{H_0^1}, \quad \forall \phi^1 \in H^{-1}(\Omega). \quad (3.19)$$

Тепер ми готові довести (3.14) у кілька кроків.

**Крок 2: Оцінка нормальної похідної через локальний член.** За теоремою 2.8 розділу 2 показано, що якщо  $T > T(x^0)$ , то існує  $C = C(T) > 0$  таке, що

$$E_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|\nabla \phi^0(x)|^2 + |\phi^1(x)|^2] dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (3.20)$$

Нехай  $\varepsilon > 0$  таке, що  $\varepsilon < (T - T(x^0))/2$ . Тоді з (3.2), інваріантності хвильового рівняння відносно зсувів за часом і збереження енергії випливає, що

$$E_0 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \quad (3.21)$$

Розглянемо векторне поле  $q = q(x, t) \in (W^{1,\infty}(Q))^n$  таке, що

$$\begin{cases} q(x, t) = \nu(x) & \forall (x, t) \in \Gamma(x^0) \times (\varepsilon, T - \varepsilon) \\ q(x, t) \cdot \nu(x) \geq 0 & \forall (x, t) \in \Gamma \times (0, T) \\ q(x, 0) = q(x, T) = 0 & \forall x \in \Omega \\ q(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (\Omega \setminus \omega) \times (0, T). \end{cases} \quad (3.22)$$

Поле  $q$  можна обрати у вигляді  $q(x, t) = h(x)n(t)$ , де  $n \in C^1([0, T])$  та  $h = h(x) \in (W^{1,\infty}(\Omega))^n$  задовольняють

$$n(0) = n(T) = 0; \quad n(t) = 1 \quad \forall t \in (\varepsilon, T - \varepsilon), \quad (3.23)$$

та

$$\begin{cases} h = \nu & \text{на } \Gamma(x^0) \\ h \cdot \nu \geq 0 & \text{на } \Gamma \\ h = 0 & \text{в } \Omega \setminus \omega. \end{cases} \quad (3.24)$$

(див. J.-L. Lions [?], гл. I, розд. 3.1, для побудови цього векторного поля).

За тотожністю (2.19) леми 2.3 з розділу 2 отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma(x^0)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma &\leq \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma} (q \cdot \nu) \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \\ &\leq C \int_0^T \int_{\omega} (|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2) dx dt, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $C$  — додатна стала, що залежить від  $\|q(x, t)\|_{W^{1,\infty}(Q)}$ .

Оцінка (3.25) справджується для всіх  $T > T(x^0)$ . Тому, якщо  $\varepsilon > 0$  таке, що  $T - 2\varepsilon > T(x^0)$ , за наведеним аргументом і поєднанням (3.21) та (3.25) виводимо

$$E_0 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\omega} [|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2] dx dt. \quad (3.26)$$

**Крок 3: Локальний  $\nabla \phi$ -член.** Нехай  $\tilde{\omega}$  — окіл  $\overline{\Gamma(x^0)}$  такий, що

$$\Omega \cap \tilde{\omega} \subset \omega. \quad (3.27)$$

Оскільки (3.26) виконується для будь-якого околу  $\omega$  множини  $\overline{\Gamma(x^0)}$ , він виконується і для  $\tilde{\omega}$ , а отже

$$E_0 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\tilde{\omega}} [|\phi'|^2 + |\nabla \phi|^2] dx dt. \quad (3.28)$$



Нехай  $p = p(x, t) \in W^{1,\infty}(Q)$ ,  $p \geq 0$  — таке, що

$$\begin{cases} p(x, t) = 1 & \forall (x, t) \in \tilde{\omega} \times (\varepsilon, T - \varepsilon) \\ p(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in (\Omega \setminus \omega) \times (0, T) \\ p(x, 0) = p(x, T) = 0 & \forall x \in \Omega \\ |\nabla p|^2/p \in L^\infty(Q). \end{cases} \quad (3.29)$$

Функцію  $p$  можна обрати у вигляді

$$p(x, t) = \rho^2(x)n(t), \quad (3.30)$$

де  $n \in C^1([0, T])$  та  $\rho \in W^{1,\infty}(\Omega)$  задовольняє

$$\begin{cases} \rho(x) = 1 & \forall x \in \tilde{\omega} \\ \rho(x) = 0 & \forall x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases} \quad (3.31)$$

Тепер, множачи рівняння (3.3) на  $p\phi$  та інтегруючи частинами, отримуємо тотожність

$$\int_Q p|\nabla\phi|^2 = \int_Q p|\phi'|^2 - \int_\Omega p\phi'\phi \Big|_0^T + \int_Q p'\phi'\phi - \int_Q \nabla p \cdot \nabla\phi\phi. \quad (3.32)$$

Враховуючи (3.29) і (3.32), отримуємо

$$\int_Q p|\nabla\phi|^2 dx dt \leq \int_0^T \int_\omega [|\phi'|^2 + |\phi|^2] dx dt + \left| \int_Q (\nabla p \cdot \nabla\phi)\phi \right|. \quad (3.33)$$

З іншого боку,

$$\left| \int_Q (\nabla p \cdot \nabla\phi)\phi \right| \leq \frac{1}{2} \int_Q p|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{2} \int_Q \frac{|\nabla p|^2}{p} |\phi|^2. \quad (3.34)$$

З (3.33) і (3.34), використовуючи (3.29), випливає

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_\omega |\nabla\phi|^2 \leq C \int_0^T \int_\omega [|\phi'|^2 + |\phi|^2]. \quad (3.35)$$

Нарешті, поєднуємо (3.28) і (3.35):

$$E_0 \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'|^2 dx dt + C \int_Q |\phi|^2 dx dt. \quad (3.36)$$

**Крок 4:**  $L^2$ -член нижчого порядку. Щоб довести (3.14) (а отже й теорему), достатньо показати існування  $C = C(T) > 0$  такого, що

$$\int_Q |\phi|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'|^2 dx dt \quad (3.37)$$

виконується для кожного розв'язку (3.3).

Доводимо від супротивного, застосовуючи аргумент компактність-єдиність. Якщо (3.37) не виконується, існує послідовність розв'язків  $\{\phi_n\}$  системи (3.3), що відповідає початковим даним  $\{\phi_n^0, \phi_n^1\} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , така, що

$$\int_Q |\phi_n|^2 dx dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.38)$$

$$\int_0^T \int_{\omega} |\phi'_n|^2 dx dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (3.39)$$

З (3.36), (3.38) і (3.39) випливає, що  $\{\phi_n^0, \phi_n^1\}$  обмежена в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , тому

$$\{\phi_n\} \text{ обмежена в } H^1(Q). \quad (3.40)$$

З (3.40) і компактності вкладення  $H^1(Q) \subset L^2(Q)$  маємо

$$\{\phi_n\} \text{ відносно компактна в } L^2(Q). \quad (3.41)$$

Виділяючи відповідну підпослідовність (яку для спрощення позначатимемо так само  $\{\phi_n\}$ ), виводимо

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ слабо в } H^1(Q), \quad (3.42)$$

$$\phi_n \rightarrow \phi \text{ сильно в } L^2(Q), \quad (3.43)$$

де границя  $\phi = \phi(x, t)$  — розв'язок (3.3). З іншого боку, з (3.38), (3.39), (3.42) і (3.43),  $\phi$  задовольняє

$$\phi' = 0 \text{ в } \omega \times (0, T), \quad (3.44)$$

$$\|\phi\|_{L^2(Q)} = 1. \quad (3.45)$$

Зауважимо, що функція  $\psi = \phi'$  також є розв'язком (3.3), і вона задовольняє

$$\psi = 0 \text{ в } \omega \times (0, T). \quad (3.46)$$

Оскільки  $T > T(x^0) \geq$  діаметр  $\Omega$ , з теореми єдиності Гольмгрена випливає  $\psi \equiv 0$  у  $Q$ . Це означає, що  $\phi = \phi(x)$  — стаціонарний розв'язок (3.3). Звідси випливає, що  $\phi \equiv 0$ , що суперечить (3.45).  $\square$

### 3.3. Основний результат

Доведено наступний результат:

**Теорема 3.2.** *Нехай  $\Omega$  — обмежена область  $\mathbb{R}^n$  з межею  $\Gamma$  класу  $C^2$ . Нехай  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  і  $\omega \subset \Omega$  — окіл  $\bar{\Gamma}(x^0)$ .*

*Припустимо, що  $T > T(x^0) = 2R(x^0)$ .*

*Тоді для кожних початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in L^2(\omega \times (0, T))$  таке, що розв'язок  $y(x, t)$  системи (3.1) задовольняє (3.2).*

*Доведення.* Це безпосередній наслідок адаптації методу HUM, розвиненої у розділі 3.1, та оцінки спостережуваності (3.13), що означає, що збудований гільбертів простір  $F$  збігається з  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$  — завдяки еквівалентності норм.  $\square$

### 3.4. Змінні коефіцієнти в одновимірних областях

Розглянемо таке одновимірне хвильове рівняння зі змінним коефіцієнтом, залежним від просторової змінної:

$$\begin{cases} y'' - (a(x)y_x)_x = h\chi_{\omega} & \text{в } \Omega \times (0, T) \\ y(0, t) = y(1, t) = 0 & \text{при } t \in (0, T) \\ y(x, 0) = y^0(x), y'(x, 0) = y^1(x) & \text{при } x \in \Omega \end{cases} \quad (3.47)$$

з  $\Omega = (0, 1)$  і  $\omega = (l_1, l_2) \subset \Omega$ .

Поєднуючи техніки попереднього розділу з техніками розділу 2.7, отримуємо такий результат.

**Теорема 3.3.** Припустимо, що коефіцієнт  $a \in BV(0, 1)$  задовольняє

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (3.48)$$

Тоді, якщо  $T > 2R$  з  $R = R(l_1, l_2) = \max(l_1/\sqrt{a_0}, (1-l_2)/\sqrt{a_0})$ , то для кожної пари початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  існує керування  $h \in L^2((l_1, l_2) \times (0, T))$  таке, що розв'язок  $y = y(x, t)$  системи (3.47) задовольняє (3.2).

*Доведення.* За методом HUM задача зводиться до отримання оцінки спостережуваності

$$\|\phi^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\phi|^2 dx dt \quad (3.49)$$

для всіх розв'язків  $\phi$  однорідної системи

$$\begin{cases} \phi'' - (a(x)\phi_x)_x = 0 & \text{в } (0, 1) \times (0, T) \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0 & \text{на } (0, T) \\ \phi(x, 0) = \phi^0(x), \phi'(x, 0) = \phi^1(x) & \text{в } (0, 1). \end{cases} \quad (3.50)$$

Діючи, як на кроці 1 доведення теореми 3.1, спостерігаємо, що (3.49) є наслідком

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\phi'|^2 dx dt. \quad (3.51)$$

Тепер (3.51) доводиться у кілька кроків.

*Крок 1: Перша нерівність спостережуваності.* Метод доведення оцінки спостережуваності (2.75) з розділу 2 дозволяє показати, що для будь-якого  $\xi \in [0, 1]$ , якщо

$$T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} \xi, \quad (3.52)$$

$$\int_0^\xi \int_{\frac{\xi-x}{\sqrt{a_0}}}^{T+\frac{x-\xi}{\sqrt{a_0}}} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dt dx \leq C \int_0^T [|\phi'(\xi, t)|^2 + a(\xi)|\phi_x(\xi, t)|^2] dt. \quad (3.53)$$

Аналогічно, якщо

$$T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} (1 - \xi), \quad (3.54)$$

маємо

$$\int_0^\xi \int_{\frac{x-\xi}{\sqrt{a_0}}}^{T-\frac{x-\xi}{\sqrt{a_0}}} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dt dx \leq C \int_0^T [|\phi'(\xi, t)|^2 + a(\xi)|\phi_x(\xi, t)|^2] dt. \quad (3.55)$$

Крім того, стала  $C$  в обох оцінках (3.53) і (3.55) неперервно залежить від  $\xi$  і  $T$ .

Оскільки  $T > 2R$ , існує  $\varepsilon > 0$  таке, що

$$T > \frac{2}{\sqrt{a_0}} \max(l_1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon - l_2). \quad (3.56)$$

З (3.56) виводимо, що (3.53) і (3.55) виконуються для всіх  $\xi \in (l_1, l_1 + \varepsilon)$  і  $\xi \in (l_2 - \varepsilon, l_2)$  відповідно. Інтегруючи нерівності (3.53) і (3.55) по  $\xi \in (l_1, l_1 + \varepsilon)$  і  $\xi \in (l_2 - \varepsilon, l_2)$  відповідно, безпосередньо отримуємо

$$\int_0^{l_1} \int_{\frac{l_1-x}{\sqrt{a_0}}}^{T+\frac{(x-l_1)}{\sqrt{a_0}}} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dt dx \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_1+\varepsilon} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt, \quad (3.57)$$

та

$$\int_{l_2}^1 \int_{\frac{x-l_2}{\sqrt{a_0}}}^{T-\frac{(x-l_2)}{\sqrt{a_0}}} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dt dx \leq C \int_0^T \int_{l_2-\varepsilon}^{l_2} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt. \quad (3.58)$$

Тепер, використовуючи (3.57) і (3.58), маємо

$$\begin{aligned} & (T - 2R) \int_0^1 [|\phi^1(x)|^2 + a(x)|\phi_x^0(x)|^2] dx \\ &= \int_R^{T-R} \int_0^1 [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt, \end{aligned} \quad (3.59)$$

або, еквівалентно,

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt. \quad (3.60)$$

*Крок 2: Покращена нерівність спостережуваності.* Оцінка (3.60) справджується для всіх  $(l_1, l_2) \subset (0, 1)$  при  $T > 2R(l_1, l_2)$ .

Беручи  $\varepsilon > 0$  достатньо малим, щоб  $T - 2\varepsilon > 2R(l_1 - \varepsilon, l_2 - \varepsilon)$ , маємо

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{l_1+\varepsilon}^{l_2-\varepsilon} [|\phi'|^2 + a(x)|\phi_x|^2] dx dt. \quad (3.61)$$

Аргумент кроку 3 доведення теореми 3.1 легко дозволяє довести, що

$$\int_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{l_1+\varepsilon}^{l_2-\varepsilon} a(x)|\phi_x|^2 dx dt \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\phi'|^2 dx dt + C \|\phi\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.62)$$

Тепер, поєднуючи (3.61) і (3.62), отримуємо

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(0,1)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\phi'|^2 dx dt + C \|\phi\|_{L^2(Q)}^2. \quad (3.63)$$

Отже, достатньо довести нерівність

$$\|\phi\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \int_0^T \int_{l_1}^{l_2} |\phi'|^2 dx dt. \quad (3.64)$$

*Крок 3: Компактність-єдиність.* Щоб довести (3.64), діємо від супротивного, як у доведенні кроку 4 теореми 3.1, використовуючи принцип компактності-єдиності.

Якщо (3.64) не виконується, то існує розв'язок  $\phi = \phi(x, t)$  системи (3.50) такий, що

$$\|\phi\|_{L^2(Q)} = 1, \quad (3.65)$$

$$\phi'(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (l_1, l_2) \times (0, T). \quad (3.66)$$

Тому  $\psi = \phi'$  — розв'язок (3.50), що задовольняє

$$\psi \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \quad (3.67)$$

та

$$\psi = 0 \quad \text{в} \quad (l_1, l_2) \times (0, T). \quad (3.68)$$

З (3.68) випливає, що  $\psi' = 0$  в  $(l_1, l_2) \times (0, T)$ . Це разом з (3.67) і (3.63) дозволяє виснувати, що  $\psi(0) \in H_0^1(0, 1)$ ,  $\psi'(0) \in L^2(0, 1)$ , а отже

$$\psi \in C([0, T]; H_0^1(0, 1)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, 1)). \quad (3.69)$$

Оскільки  $\psi$  належить класу розв'язків зі скінченною енергією у (3.69) (факт, який не був відомий заздалегідь, бо  $\psi = \phi'$  і, у принципі, на одну похідну менш регулярний за  $\phi$ ), оцінки (3.53) і (3.55) застосовні до  $\psi$ , і з (3.68) випливає

$$\psi(x, t) = 0, \quad \forall (x, t) \in (0, 1) \times (R, T - R),$$

з  $R = R(l_1, l_2)$  як у формулюванні теореми 3.3, і завдяки збереженню енергії маємо  $\psi \equiv 0$ .

Тому  $\phi = \phi(x)$  — стаціонарний розв'язок (3.50), що задовольняє

$$-(a(x)\phi_x)_x = 0 \quad \text{в } (0, 1), \quad \phi \in H_0^1(0, 1).$$

Але тоді обов'язково  $\phi \equiv 0$ , що суперечить (3.65).  $\square$

### 3.5. Коментарі

1. **Хвильові рівняння зі змінними коефіцієнтами.** Як видно з теорем 3.1 і 3.2, гранична керованість тягне керованість з керуваннями, носіями яких є окіл межі.

Цей тип аргументу легко поширюється на рівняння зі змінними коефіцієнтами виду

$$\begin{cases} y'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla y) = h\chi_\omega & \text{в } Q \\ y = 0 & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (3.70)$$

з  $a \in W^{1,\infty}(\Omega)$  таким, що

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.71)$$

Припустимо, що коефіцієнт  $a = a(x)$  такий, що для деякої відкритої підмножини  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  межі і  $T_0 > 0$  виконується оцінка

$$\|\phi^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\phi^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Sigma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \quad (3.72)$$

для всіх  $T > T_0$ , де  $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$ , для будь-якого розв'язку

$$\begin{cases} \phi'' - \operatorname{div}(a(x)\nabla \phi) = 0 & \text{в } Q \\ \phi = 0 & \text{на } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 & \text{в } \Omega. \end{cases} \quad (3.73)$$

Нагадаймо, що така нерівність граничної спостережуваності вимагає певних структурних умов на коефіцієнт  $a = a(x)$ , що забезпечують досягнення всіма променями геометричної оптики межі  $\Gamma$  і, конкретніше,  $\Gamma_0$ .

Виконується такий результат:

**Теорема 3.4.** Нехай  $\Omega$  — обмежена область  $\mathbb{R}^n$  з межею  $\Gamma$  класу  $C^2$ . Нехай коефіцієнт  $a = a(x)$ ,  $\Gamma_0 \subset \Gamma$  та  $T_0 > 0$  такі, що для всіх  $T > T_0$  виконується оцінка (3.72).

Припустимо, що  $\omega$  — окіл  $\overline{\Gamma_0}$  в  $\Omega$ . Тоді, якщо  $T > T_0$ , то для кожних початкових даних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in L^2(\omega \times (0, T))$  таке, що розв'язок  $y = y(x, t)$  системи (3.70) задовольняє (3.2).

*Доведення.* Подамо короткий ескіз.

Метод HUM зводить доведення цієї теореми до отримання оцінки (3.13) для розв'язків (3.73). Як на кроці 1 доведення теореми 3.1, спостерігаємо, що достатньо довести (3.14). Аргументи кроків 2 і 3 доведення теореми 3.1 дозволяють легко отримати (3.36). Тому задача знову зводиться до доведення (3.37). Аргумент кроку 4 доведення теореми 3.1 буквально не застосовний у цьому випадку, оскільки теорема Гольмгрена справджується лише для рівнянь з аналітичними коефіцієнтами.

Однак існують два альтернативні доведення (3.37), що застосовні у цьому випадку:

- (a) Метод, уведений V. Komornik [?], заснований на використанні негармонічних рядів Фур'є. Цей метод систематично застосовується до еволюційних рівнянь типу  $\phi'' + A\phi = 0$ , де  $A$  — самоспряжений еліптичний оператор порядку  $\geq 2$ , і дозволяє “поглинути” члени нижчого порядку в оцінках типу (3.36).
- (b) Аргументи С. Bardos, G. Lebeau і J. Rauch [?] зводять (3.37) до властивості єдиного продовження для розв'язків еліптичної задачі типу

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla\phi) + \lambda\phi = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.74)$$

де  $\lambda \in \mathbb{C}$  і  $\phi = \phi(x)$  — комплекснозначна функція.

Тоді питання зводиться до того, щоб показати, що кожен розв'язок  $\phi \in H^2(\Omega)$  рівняння (3.74), що задовольняє  $\phi = 0$  в  $\omega$ , обов'язково обнуляється всюди, що є безпосереднім наслідком результатів про єдине продовження для еліптичних рівнянь, отриманих за допомогою нерівностей Карлемана (див. [?]). Це — тепер уже класичний результат про єдине продовження власних функцій еліптичних рівнянь, який можна досягти і значно поширити за допомогою нерівностей Карлемана.

□

Слід зробити кілька зауважень і геометричних спостережень:

- (a) **Геометричні зауваження.** Теорема 3.3 показує, що одновимірне хвильове рівняння точно кероване в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$  для довільної непорожньої відкритої підмножини  $\omega$  області  $\Omega$ .

Це суто одновимірний результат, який не узагальнюється на розмірності  $n > 1$ .

Посилаємось на А. Нагаух [?] та J. Lagnese [?] для аналізу внутрішньої керованості хвильового рівняння зі сталим коефіцієнтом за допомогою рядів Фур'є, коли  $\Omega$  — квадрат або диск  $\mathbb{R}^2$  відповідно.

Наприклад, спектральний аналіз у [?] показує, що якщо  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  і  $\omega = B(0, r)$  з  $r < 1$ , то хвильове рівняння не є точно керованим в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  з керуваннями  $L^2(\omega \times (0, T))$  для будь-якого  $T > 0$ . Це через явище “шепочучих галерей” (whispering gallery), тобто існування періодичних променів геометричної оптики, що нескінченно довго захоплені в області  $r < |x| < 1$  і ніколи не досягають керуючої області  $\omega$ . У [?] показано, що клас керованих початкових даних з  $L^2$ -керуваннями менший за енергетичний простір  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , але містить, наприклад, усі дані зі скінченною кількістю ненульових коефіцієнтів Фур'є.

Результати в [?] показують, що коли  $\bar{\omega} \subset \Omega$  (а отже GCC не виконано), то для керування початковими даними в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  необхідно використовувати керування в класі аналітичних функціоналів з носіями в  $\omega \times (0, T)$ .

Однак, як ми бачили у розділі 3.1, завдяки методу HUM і теоремі єдиності Гольмгрена для будь-якої непорожньої відкритої підмножини  $\omega \subset \Omega$  існує початковий час  $T_0 = T_0(\omega, \Omega) > 0$  такий, що якщо  $T > T_0$ , то точна керованість (3.1) з керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$  виконується у просторі початкових даних таких, що  $\{y^1, -y^0\} \in F'$ . Характеризація простору  $F'$  (або, еквівалентно,  $F$ ), коли  $F \neq L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , значною мірою є відкритою задачею. Посилаємось на [?], [?] та [?] для подальших розробок у цьому контексті.

Як зазначено у розділах 2.6 і 2.7, оцінка (3.72) виконується для розв'язків (3.73), якщо  $\Omega$  гладка класу  $C^\infty$ ,  $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$  і пара  $\{\Gamma_0, T\}$  задовольняє GCC, тобто кожен промінь геометричної оптики перетинає  $\Gamma_0$  у недифракційній точці за час менший за  $T$  (пор. [?]). Однак для виконання (3.72) коефіцієнт  $a(x)$  повинен задовольняти геометричні умови, що забезпечують досягнення всіма променями геометричної оптики зовнішньої межі за рівномірний час. Якщо деякі з цих променів захоплені всередині  $\Omega$  і ніколи не досягають її зовнішньої межі, то нерівність граничної спостережуваності (3.72) не виконується, і теорема 3.4 вище марна. Такі патологічні приклади побудовано й обговорено у [?]. Зауважимо, що для хвильових рівнянь зі змінними коефіцієнтами промені вже не є прямими лініями, і на практиці може бути важко перевірити, чи всі вони досягають  $\omega$  за рівномірний час.

- (b) **Керування мінімальної норми.** Аргумент розділу 2.7 дозволяє довести: якщо точна керованість в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$  виконується, то для кожних  $\{y^0, y^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  множина допустимих керувань, визначена як  $U_{ad} = \{h \in L^2(\omega \times (0, T)) : y \text{ — розв'язок (3.70), що задовольняє (3.2)}\}$ , містить нескінченно багато елементів.

Керування  $h$ , що його дає метод HUM, є єдиним оптимальним керуванням мінімальної норми, яке задовольняє

$$\|h\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2 = \min_{g \in U_{ad}} \|g\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2.$$

- (c) **Оптимальний час керування.** Теорема 3.2 показує, що якщо  $\omega$  — окіл  $\Gamma(x^0)$  і  $T > T(x^0)$ , то хвильове рівняння точно кероване в  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  з керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$ .

Цей результат не оптимальний за часом керованості. Дійсно, завдяки [?], ми знаємо, що час керованості зменшується зі збільшенням розміру  $\omega$ . Оцінки часу керування покращуються при застосуванні аргументів обрізання (cutting-off) і роботи в області  $\Omega \setminus \omega$ , доповненні  $\omega$  в  $\Omega$ .

Зауважимо, що якщо  $\omega = \Omega$ , точна керованість виконується за довільно малий час (пор. J.-L. Lions [?], розд. VII.2.2, де доведено існування керувань  $h \in L^2(Q)$ ). Робота на області  $\Omega \setminus \omega$  дозволяє довести, що час керованості прямує до нуля, коли  $\omega$  збільшено наближається до всієї  $\Omega$  (див. [?]).

- (d) **Сингулярна границя до граничного керування.** Розглянемо послідовність відкритих множин виду  $\omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \Gamma(x^0)) < \varepsilon\}$ , де

$d(x, \Gamma(x^0))$  — відстань від  $x$  у  $\mathbb{R}^n$  до множини  $\Gamma(x^0)$ . Це окіл “ширини”  $\varepsilon$  навколо  $\Gamma(x^0)$ .

Для заданого  $T > T(x^0)$  можна побудувати керування  $h_\varepsilon \in L^2(\omega_\varepsilon \times (0, T))$  так, що система (3.1) збігається до хвильового рівняння з граничним керуванням Діріхле (див. [?], [?]).

- (е) **Інші моделі.** Метод доведення теореми 3.1 можна застосовувати у ширшому контексті, зокрема, для хвильових рівнянь з іншими граничними умовами або навіть для моделей пластини (див. [?]).

Наприклад, для системи

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y = h\chi_\omega & \text{в } Q \\ y = \partial y / \partial \nu = 0 & \text{на } \Sigma \\ y(0) = y^0, y'(0) = y^1 & \text{в } \Omega \end{cases} \quad (3.75)$$

виконується таке: “Нехай  $\Omega$  — обмежена область  $\mathbb{R}^n$  з межею класу  $C^3$  і  $\omega$  — окіл підмножини межі типу  $\bar{\Gamma}(x^0)$ . Тоді для всіх  $T > 0$  і  $\{y^0, y^1\} \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  існує керування  $h \in L^2(\omega \times (0, T))$  таке, що розв’язок (3.75) задовольняє (3.2)”.

Це аналог попереднього результату для хвильового рівняння, але цього разу він справджується за довільно малий час.

У [?] техніки цього розділу адаптовано для дослідження внутрішньої керованості рівняння Шредінгера.

- (f) **Ряди Фур’є та моделі пластини.** Зауважимо, однак, що цей метод застосовний лише тоді, коли носій керування  $\omega$  є околom відповідної підмножини межі. Для розгляду інших керуючих підмножин  $\omega$  потрібна суттєва подальша робота. Наприклад, у [?] показано методами рядів Фур’є, що якщо  $\Omega$  — квадрат  $\mathbb{R}^2$ , то наведене вище рівняння пластини можна точно керувати в  $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  керуваннями в  $L^2(\omega \times (0, T))$ , де  $\omega$  строго міститься в підмножині  $\Omega$ , тобто  $\bar{\omega} \subset \Omega$ . Цей результат істотно відрізняється від раніше згаданих щодо хвильового рівняння. Дійсно, у цьому випадку властивість керованості виконується, навіть якщо носій керувань  $\omega$  не задовольняє геометричну умову керування. Це показує, що GCC є достатньою, але не необхідною умовою для керування рівнянням пластини.