

Кватерніонна кінематика для фільтра Калмана зі станом похибки

Український source-preserved core, стартовий модуль

За Joan Solà, arXiv:1711.02508; TeX-first українська доріжка

2026-06-01

Анотація

Цей модуль є стартовим українським TeX-core для статті Joan Solà *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*. Він не є повним перекладом усієї статті. Він фіксує найпрактичніші частини: мету ESKF, true/nominal/error-state розклад, IMU-кінематику, локальну кватерніонну похибку, інтегрування шумів та дискретну коваріацію.

Зміст

1 Джерело і межа	1
2 Анотація: український переклад	1
3 Мотивація ESKF	2
3.1 Схема фільтра	2
4 IMU-кінематика	2
5 Інтегрування шумів і збурень	3
5.1 QA-правило	4
6 Статус і наступні кроки	4

1. Джерело і межа

Source: P0_arxiv_1711.02508/src/. Використані файли: Abstract.tex, ErrorState.tex, Noise.tex. Формули тут збережено у нормалізованому TeX-стилі; прозу перекладено й частково стисло для практичного використання.

Цей модуль призначений для подальшого batch-перекладу. Його треба розширювати файл-за-файлом, не змішуючи з PySDR, sensor fusion або автономною робототехнікою. Після завершення він має лишатися окремим paper-track PDF, а довідник має лише включати стислий прикладний шар.

2. Анотація: український переклад

Стаття є вичерпним переглядом понять і формул, пов'язаних із кватерніонами та поворотами у тривимірному просторі, а також з їх правильним використанням в оцінювачах стану, зокрема у фільтрі Калмана зі станом похибки.

Матеріал включає детальне вивчення групи поворотів та її структури Лі, з формулюваннями як через кватерніони, так і через матриці повороту. Особливу увагу приділено означенню збурень повороту, похідних та інтегралів. Наведено інтуїції та геометричні інтерпретації, які допомагають зрозуміти внутрішній механізм тривимірного повороту.

Увесь цей матеріал застосовано для точного формулювання фільтрів Калмана зі станом похибки, придатних для реальних застосувань з інтегруванням сигналів інерціального вимірювального блока.

3. Мотивація ESKF

Мета полягає у записі рівнянь похибки для кінематики інерціальної системи, яка інтегрує покази акселерометра і гірометра зі зміщеннями та шумами. Орієнтацію у просторі представлено гамільтоновим одиничним кватерніоном.

Інтегрування IMU-вимірювань породжує dead-reckoning систему, що з часом дрейфує. Щоб обмежити дрейф, IMU-інформацію зливають із зовнішніми вимірюваннями: GNSS, баченням, дальністю, висотою або іншими сенсорними каналами.

ESKF корисний тому, що:

- орієнтаційна похибка мінімальна, тобто має три параметри для трьох ступенів свободи;
- стан похибки працює поблизу нуля і тому не наближається до сингулярностей параметризації;
- добутки другого порядку між малими похибками можна занедбати, що спрощує якобіани;
- велика нелінійна динаміка інтегрується у номінальному стані, а фільтр працює з повільнішою лінійною похибкою.

3.1. Схема фільтра

Номінальний стан x інтегрується високочастотними IMU-вимірюваннями. Стан похибки δx поширюється лінійною моделлю та коваріацією P . Коли приходить зовнішнє вимірювання, фільтр оцінює похибку, інжектує її у номінальний стан і скидає середнє стану похибки до нуля.

У скороченому вигляді:

$$\text{прогноз: } x \leftarrow f(x, u_m, 0), \quad (1)$$

$$P \leftarrow F_x P F_x^T + F_i Q_i F_i^T, \quad (2)$$

$$\text{корекція: } K = P H^T (H P H^T + R)^{-1}, \quad (3)$$

$$\widehat{\delta x} = K(y - h(x)), \quad (4)$$

$$x \leftarrow x \oplus \widehat{\delta x}, \quad (5)$$

$$\delta x \leftarrow 0. \quad (6)$$

4. IMU-кінематика

Стан і стан похибки:

$$x = [p \ v \ q \ a_b \ \omega_b \ g]^T, \quad \delta x = [\delta p \ \delta v \ \delta \theta \ \delta a_b \ \delta \omega_b \ \delta g]^T.$$

Композиція істинного стану з номінального та похибкового:

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \delta\mathbf{v}, \quad \mathbf{q}_t = \mathbf{q} \otimes \delta\mathbf{q}, \quad \mathbf{g}_t = \mathbf{g} + \delta\mathbf{g}.$$

Для малих кутів $\delta\boldsymbol{\theta}$:

$$\delta\mathbf{q} \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ \delta\boldsymbol{\theta}/2 \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{R} \simeq \mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}.$$

Модель вимірювання IMU:

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{R}_t^{\top}(\mathbf{a}_t - \mathbf{g}_t) + \mathbf{a}_{bt} + \mathbf{a}_n, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_t + \boldsymbol{\omega}_{bt} + \boldsymbol{\omega}_n. \quad (8)$$

Звідси

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_t = \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n. \quad (10)$$

Істинна кінематика:

$$\dot{\mathbf{p}}_t = \mathbf{v}_t, \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_t = \mathbf{R}_t(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{bt} - \mathbf{a}_n) + \mathbf{g}_t, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2}\mathbf{q}_t \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_{bt} - \boldsymbol{\omega}_n), \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{bt} = \mathbf{a}_w, \quad (14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{bt} = \boldsymbol{\omega}_w, \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{g}}_t = 0. \quad (16)$$

Номінальна кінематика:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (17)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\mathbf{q})(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b) + \mathbf{g}, \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes (\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b), \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_b = 0, \quad (20)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = 0, \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{g}} = 0. \quad (22)$$

Лінеаризована локальна динаміка похибки:

$$\dot{\delta\mathbf{p}} = \delta\mathbf{v}, \quad (23)$$

$$\delta\dot{\mathbf{v}} \simeq -\mathbf{R}(\mathbf{q})[\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_b]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{R}(\mathbf{q})\delta\mathbf{a}_b - \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{a}_n + \delta\mathbf{g}, \quad (24)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} \simeq -[\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta} - \delta\boldsymbol{\omega}_b - \boldsymbol{\omega}_n, \quad (25)$$

$$\delta\dot{\mathbf{a}}_b = \mathbf{a}_w, \quad (26)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\omega}_w, \quad (27)$$

$$\delta\dot{\mathbf{g}} = 0. \quad (28)$$

5. Інтегрування шумів і збурень

Нехай неперервна лінеаризована модель стану похибки має вигляд

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{w}^c.$$

Тут \tilde{u} - шум вимірюючого керування, а w^c - неперервне випадкове збурення. Після дискретизації отримуємо

$$\delta x_{n+1} = F_x \delta x_n + F_u \tilde{u}_n + F_w w_n,$$

де

$$F_x = e^{A\Delta t}, \quad F_u = B\Delta t, \quad F_w = C,$$

і

$$w_n = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} w^c(\tau) d\tau, \quad W = W^c \Delta t.$$

Отже,

$$P_{n+1} = F_x P F_x^\top + F_u U F_u^\top + F_w W F_w^\top \quad (29)$$

$$= e^{A\Delta t} P (e^{A\Delta t})^\top + \Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top. \quad (30)$$

Це головна формула цього стартового модуля. Вона пояснює, чому не можна механічно поставити один і той самий дискретний Q для всіх шумів. Семпльований шум керування і неперервне біле збурення мають різну природу інтегрування.

5.1. QA-правило

Якщо переклад, код або конспект змінює

$$\Delta t^2 B U^c B^\top + \Delta t C W^c C^\top$$

на вираз із двома однаковими степенями Δt , це місце треба перевірити вручну.

6. Статус і наступні кроки

Файл джерела	Статус у цьому модулі
Abstract.tex	Перекладено.
ErrorState.tex	Перекладено практичне ядро: мотивація, IMU-модель, локальна динаміка похибки.
Noise.tex	Потрібен повний підрозділовий paper-track. Перекладено практичне ядро про дискретизацію шумів і Q . Потрібна повна таблиця і повний IMU-приклад.
Quaternion.tex	Не перекладено повністю; потрібне розбиття на batch-блоки.
ESKF_global.tex	Відкласти до завершення локальної ESKF-доріжки.