

Micro Lie Theory for State Estimation in Robotics

Spark Ukrainian start: abstract, introduction, conclusion

Codex Spark output, normalized build wrapper

2026-06-01

Анотація

Група Лі — старий абстрактний математичний об'єкт, що походить з XIX століття, коли математик Софіса Лі заклав основи теорії груп неперервних перетворень. Його вплив поширився на різні галузі науки й технологій значно пізніше. У роботі протягом останніх років спостерігається важливий тренд зростання її використання, принаймні в областях оцінювання, особливо в оцінюванні руху для навігації. Водночас для переважної більшості фахівців з робототехніки групи Лі залишаються надто абстрактними побудовами, а отже важкими для розуміння й практичного застосування.

У задачах оцінювання для робототехніки часто немає потреби повністю використовувати всю силу теорії, тому потрібен добір матеріалу. У цій статті ми пройдемо через основні принципи теорії Лі з метою подати чіткі й корисні ідеї, залишивши в стороні значний корпус додаткової теорії. Навіть після такого скорочення поданий матеріал довів надзвичайну ефективність у сучасних алгоритмах оцінювання для робототехніки, особливо в задачах SLAM, візуальної одометрії та подібних підходів.

Поряд із цією мікро-теорією Лі ми подаємо розділ із кількома прикладами застосувань та великий довідник формул для основних груп Лі, що використовуються в робототехніці, включно з більшістю матриць Якобі та способів їх зручного маніпулювання. Ми також представляємо нову C++ бібліотеку на чистих шаблонах, яка реалізує весь функціонал, описаний у цьому матеріалі.

1. Вступ

У останні роки спостерігається помітний рух у спільноті робототехніки з формального формулювання задач оцінювання. Це зумовлено зростаючою потребою в точності, послідовності та стійкості отриманих рішень. Справді, коректне моделювання станів і вимірювань, функцій, які пов'язують їх, а також невизначеностей, є ключовим для досягнення цих цілей. Це призвело до підходів, відомих як 'маніфолди', які в цьому контексті є не чим іншим, як гладкими топологічними поверхнями груп Лі, на яких еволюціонують представлення станів. Спираючись на теорію Лі (LT), ми можемо побудувати строгий апарат для роботи з невизначеністю, похідними та інтегралами з високою точністю і зручністю. Традиційно ці роботи зосереджувалися на добре відомих маніфолдах повороту $SO(3)$ і жорсткого руху $SE(3)$.

Під час першого знайомства з групами Лі важливо розглядати їх з різних точок зору. Топологічна точка зору, див. рис. ??, описує форму маніфолду та дає сильну інтуїцію зв'язку з дотичним простором і експоненціальним відображенням. Алгебраїчна точка зору зосереджується на операціях групи та їх конкретній реалізації, що дає можливість використовувати алгебраїчні властивості для виведення формул у замкненому вигляді або їх спрощення. Геометрична точка зору, особливо корисна в робототехніці, пов'язує елементи групи з положенням,

Рис. 1: Відображення взаємозв'язку між групою L_i та алгеброю L_i . Алгебра L_i $T_{\mathcal{E}}M$ (червона площина) є дотичним простором до маніфолду групи L_i M (тут вона зображена як синя сфера) в точці тотожності \mathcal{E} . Через експоненціальне відображення кожна пряма траєкторія $\mathbf{v}t$ через початок у алгебрі L_i породжує траєкторію $\exp(\mathbf{v}t)$ на маніфолді, що проходить відповідною геодезичною. Навпаки, кожен елемент групи має еквівалентний елемент в алгебрі L_i . Цей зв'язок настільки глибинний, що (майже) усі операції в криволінійній і нелінійній групі мають точний еквівалент в алгебрі L_i , яка є лінійним векторним простором. Хоча сфера в \mathbb{R}^3 не є групою L_i (ми використовуємо її лише як креслення, що зручно для малювання), сфера в \mathbb{R}^4 є нею, і описує групу одиничних кватерніонів — див. рис. ?? і приклад ??.

швидкістю, орієнтацією та іншими змінами тіл або базисів. Вихідна рамка може бути ідентифікована з тотожністю групи, а будь-яка інша точка на маніфолді відповідає певній 'локальній' рамці. Завдяки цим аналогіям багато абстракцій LT наближаються до інтуїтивних понять векторних просторів, геометрії, кінематики та суміжних класичних галузей.

Теорія L_i однозначно не є простою. Щоб зрозуміти мінімальний зміст того, що LT може дати, можна взяти до уваги такі три джерела. По-перше, книга Аббаспура

emph“Basic Lie theory” [?] має понад 400 сторінок. З подібною назвою, книга Гоу emph“Very basic Lie theory” [?] складається з 24 (щільних) сторінок і часом вважається обов'язковим вступом. Нарешті, більш сучасна та відома праця Стіллуела emph“Naive Lie theory” [?] має понад 200 сторінок.

За таких попередників із позначеннями 'basic', 'very basic' і 'naive', мета цієї статті на рівні лише ?? сторінок — ще більше спростити теорію L_i (звідси прикметник 'micro' у назві). Ми робимо це двома шляхами. По-перше, ми обираємо невелику підмножину матеріалу з LT. Вона настільки мала, що лише висвітлює потенціал LT. Проте цього достатньо для керування невизначеністю в задачах оцінювання, з якими ми стикаємося в робототехніці (наприклад інерціальна преінтеграція, одометрія та SLAM, візуальне сервування тощо), що дозволяє будувати елегантні й строгі схеми оптимізаторів. По-друге, ми подаємо матеріал дидактично, з помітною надмірністю. Основний текст є загальним, але ми намагаємося тримати рівень абстракції мінімальним. Додаються вкладені приклади, які забезпечують опору для загальних понять на конкретних групах (матриці повороту, матриці руху, кватерніони тощо). Також велика кількість фігур із дуже докладними підписами повторно переозвучує ці самі ідеї. Ми приділяємо особливу увагу обчисленню Якобіанів (тему, що не розглянута в [?]), оскільки вони суттєві для більшості оптимізаторів і є частою причиною помилок під час розробки нових алгоритмів. Ми надаємо розділ із прикладами застосування для локалізації та картографування роботів, реалізуючи EKF та нелінійну оптимізацію на основі LT. І нарешті, кілька додатків містять розгалужену довідку для найбільш актуальних деталей найбільш часто вживаних груп у робототехніці: одиничні комплексні числа, кватерніони, матриці повороту в 2D і 3D, матриці жорстких переміщень у 2D і 3D, а також тривіальні групи перекладу.

Найважливіше спрощення, яке ми вводимо в LT, полягає в обмеженні сфери застосування. Ось витяг з Howe [?], який ілюструє, що залишається поза розглядом: *“Основне явище теорії L_i полягає в тому, що можна природним чином поставити в відповідність кожній групі L_i \mathcal{G} її алгебру L_i \mathfrak{g} . Алгебра L_i \mathfrak{g} насамперед є векторним простором, а також наділяється бі-лінійним невісоціативним добутком, який називається дужка L_i [...]. Неймовірно, група \mathcal{G} майже повністю*

визначається \mathfrak{g} і її дужкою $L\mathfrak{g}$. Тому для багатьох цілей можна замінити \mathcal{G} на \mathfrak{g} . Оскільки \mathcal{G} — складний нелінійний об’єкт, а \mathfrak{g} — лише векторний простір, практично завжди значно простіше працювати з \mathfrak{g} . [...] Це є одним із джерел сили теорії $L\mathfrak{g}$.” У [?] Стіллвелл навіть говорить про “диво теорії $L\mathfrak{g}$ ”. У цій роботі ми фактично відводимо алгебру $L\mathfrak{g}$ на другий план на користь еквівалентного векторного простору \mathbb{R}^n , і взагалі не вводимо дужку $L\mathfrak{g}$. Тому зв’язок між групою $L\mathfrak{g}$ і її алгеброю тут не буде зроблений так глибоким, як це можливо. Наша позиція полягає в тому, що для передбачуваних нами прикладних задач такого матеріалу часто достатньо не потрібно.

Наші зусилля узгоджуються з іншими сучасними роботами з цієї тематики [?, ?, ?], які також виявили потребу наблизити LT до практичного робототехніка. Наш підхід націлений на знайомий вигляд для основної аудиторії статті: на читача, який має досвід у задачах оцінювання стану (фільтрація Калмана, оптимізація на графах тощо), але ще не має глибокого знайомства з теоретичним корпусом LT. Ми реалізували низку кроків щодо нотації, зокрема в частині визначення похідної, наблизивши її до векторних аналогів так, щоб правило ланцюга було явно видимим. Як уже зазначалося, ми практично уникаємо матеріалів, пов’язаних безпосередньо з алгеброю $L\mathfrak{g}$, натомість працюємо з її ізоморфним дотичним векторним простором \mathbb{R}^n , де в остаточному підсумку представляємо невизначеність або (малі) прирости стану. Усі ці кроки здійснено без жодної втрати точності або строгості, і ми вважаємо, що вони роблять розуміння LT та маніпуляцію з його інструментами легшими.

Цю роботу супроводжує нова бібліотека з відкритим кодом на C++, побудована на заголовках, що називається `manif` [?], і розміщена за адресою <https://github.com/artivis/manif>. `manif` реалізує широко використовувані групи $SO(2)$, $SO(3)$, $SE(2)$ і $SE(3)$ з підтримкою аналітичних Якобіанів. Бібліотеку розроблено для зручності використання, гнучкості та продуктивності.

2. Висновки

Ми подали основи теорії $L\mathfrak{g}$ в такій формі, яка має бути корисною для аудиторії, що займається оцінюванням стану, з акцентом на застосування в робототехніці. Цю мету досягнуто завдяки кільком ініціативам:

По-перше, виконано добір матеріалів, що уникає абстрактних математичних концепцій настільки, наскільки це можливо. Це дозволяє зосередити теорію $L\mathfrak{g}$ так, щоб її інструменти було легше зрозуміти й застосувати.

По-друге, обрана дидактична подача з помітним дублюванням матеріалу. Основний текст має загальний характер і охоплює абстрактні положення теорії $L\mathfrak{g}$. Йому супроводжують прикладні блоки в рамці ‘boxed’, що пов’язують абстрактні ідеї з конкретними групами $L\mathfrak{g}$, а також багато рисунків із докладними підписами.

По-третє, ми підкреслили використання зручних операторів, таких як капіталізовані відображення `Exp()` і `Log()`, а також оператори додавання й віднімання \oplus , \ominus , \boxplus , \boxminus . Вони дозволяють працювати з декартовим представленням дотичних просторів, отримуючи формули для похідних і обробки коваріацій, які дуже нагадують відповідні вирази в стандартних векторних просторах.

По-четверте, ми особливу увагу приділили визначенню, геометричній інтерпретації та обчисленню Якобіанів. Для цього запропоновано позначення матриць Якобіанів і коваріацій, які дають потужні візуальні можливості для маніпуляцій. Зокрема, правило ланцюга тут явно простежується у цій нотації, що допомагає формувати інтуїцію та зменшувати кількість помилок.

По-п’яте, у подальших додатках подано широкий зведений довідник формул для найпоширеніших груп у робототехніці. У 2D подано групи поворотів одини-

чних комплексних чисел S^1 і матриць повороту $SO(2)$, а також групу жорстких переміщень $SE(2)$. У 3D подано групи одиничних кватерніонів S^3 і матриць повороту $SO(3)$, обидві використовуються для опису поворотів, а також групу жорстких переміщень $SE(3)$. Також подано групи перекладу будь-якої розмірності, які можна реалізувати або стандартним векторним простором \mathbb{R}^n з додаванням, або матричною групою перекладу $T(n)$ з множенням.

По-шосте, ми представили кілька прикладних прикладів, що ілюструють здатність теорії Лі елегантно й точно розв'язувати задачі робототехніки. Порівняно простий концепт складеної групи допомагає уніфікувати неоднорідні вектори стану в одне формальне подання на основі теорії Лі.

Нарешті, цей текст доповнено новою C++ бібліотекою `manif` `citeDERAY-20-manif`, що реалізує інструменти, описані тут. Бібліотеку `manif` можна знайти за адресою `urlhttps://github.com/artivis/manif`. Приклади застосувань у `secRefsec:SLAM` також продемонстровано в `manif` як ілюстрації.

Хоча ми не вводимо нових теоретичних результатів, ми вважаємо, що подана форма подання теорії Лі сприятиме тому, що багато дослідників зможуть увійти в цю область для подальшого розвитку. Ми також переконані, що це саме по собі становить цінний внесок.