

Operadores de Ativação Espectral e Tempo Próprio Efetivo em Circuitos:

Derivação pelo Protocolo Ação–Fase do Fator $G(K)$

JONATAN . P. C.
pimenteldec@hotmail.com

2 de junho de 2026

Resumo

Este trabalho desenvolve uma derivação variacional e espectral do fator geométrico $G(K)$ associado à renormalização de tempo próprio efetivo em interfaces eletromagnéticas, circuitais e geométricas. O ponto de partida é o Protocolo Ação–Fase, no qual a fase efetiva é identificada com a ação adimensionalizada,

$$\phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar},$$

e a resposta física da interface é extraída de uma única ação efetiva,

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}}.$$

A partir dessa ação, define-se o operador de ativação como o Hessiano variacional em torno de uma configuração admissível,

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}},$$

de modo que K não é introduzido como parâmetro fenomenológico. No regime regular, em que K é auto-adjunto ou possui extensão auto-adjunta admissível, aplica-se o teorema espectral,

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda),$$

e, para uma excitação ψ , define-se a medida espectral

$$d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

Mostra-se que a ativação fisicamente relevante não é a densidade espectral total, mas a parte filtrada que se afasta do fundo estacionário. Essa filtragem define o funcional escalar não negativo

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda), \quad a(\lambda) \geq 0,$$

com

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0$$

no fundo estacionário e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0$$

em regime de ativação espectral. A resposta geométrica regular de menor ordem é então derivada como

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2),$$

e, no truncamento linear,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Com $0 < G(K) \leq 1$, a métrica efetiva é

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu},$$

de onde segue a renormalização do tempo próprio,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

A construção mostra que a ativação espectral não introduz um segundo tempo e não altera sozinha a classe causal: uma transformação conformal positiva preserva setores nulos, de modo que

$$d\tau = 0 \implies d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Assim, $G(K)$ renormaliza tempos próprios já admissíveis, mas não transforma uma propagação nula ideal em tipo-tempo. A grandeza $\rho(t)$, quando usada, é reinterpretada como observável derivado da evolução temporal da ativação

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

e não como fonte primitiva de $G(K)$. O resultado fornece um núcleo derivativo sem ad hoc e sem cálculo circular, preparando a aplicação posterior a circuitos elétricos e eletrônicos por meio da fórmula

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

válida apenas quando a excitação circuital satisfaz o critério energia-causal

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Parte I — Núcleo derivativo: sem ad hoc, sem cálculo circular

1 Introdução e problema

A série desenvolvida até aqui estabeleceu três resultados que devem agora ser reunidos em uma única arquitetura derivativa.

Primeiro, mostrou-se que circuitos, filtros, linhas de transmissão, guias, cavidades e meios dispersivos atuam como operadores sobre a fase observada de uma excitação eletromagnética. O ponto de partida é a identificação da fase fundamental com a ação adimensionalizada,

$$\phi_{\text{fund}} = \frac{S}{\hbar},$$

da qual se obtém a frequência angular como taxa de acumulação da ação em relação ao tempo coordenado,

$$\omega = \frac{d\phi_{\text{fund}}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{dS}{dt}.$$

A passagem por um circuito ou sistema dispersivo acrescenta uma fase observada,

$$\phi_{\text{obs}} = \phi_{\text{fund}} + \Phi(\omega, A),$$

onde $\Phi(\omega, A)$ representa a fase espectral introduzida pela interface física. No regime linear,

$$\Phi = \Phi(\omega),$$

enquanto em regimes não lineares ou dependentes de amplitude pode ocorrer

$$\Phi = \Phi(\omega, A).$$

O atraso de grupo,

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Phi}{d\omega},$$

pertence a essa camada operacional de sinais. Ele mede deslocamento de fase ou de envoltória, mas não define, por si só, tempo próprio eletromagnético [2].

Segundo, a existência de tempo próprio eletromagnético efetivo exige uma condição energia-causal. Para uma excitação circuital com densidade efetiva de energia u_{circ} , fluxo efetivo de energia \mathbf{S}_{circ} e velocidade característica c_{circ} , define-se

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Quando

$$\Delta_{\text{circ}} = 0,$$

a excitação é nula efetiva e não possui tempo próprio eletromagnético não nulo. Quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

a corrente efetiva de energia é tipo-tempo e admite a parametrização

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Em uma linha de transmissão sem perdas, essa expressão reduz-se à forma mensurável

$$d\tau_{\ell} = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2},$$

mostrando que uma onda progressiva TEM ideal satisfaz $d\tau_{\ell} = 0$, enquanto ondas estacionárias, ressonadores, cavidades e configurações confinadas podem satisfazer $d\tau_{\ell} > 0$ [2].

Terceiro, a contribuição espectral ativa não introduz um segundo tempo independente. Quando uma componente espectral ativa modifica a resposta geométrica efetiva, sua consequência é uma renormalização multiplicativa do tempo próprio por meio de uma métrica efetiva. Na formulação geométrica previamente estabelecida, escreve-se

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = M_{\Psi} G_{\mu\nu},$$

com

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

A métrica efetiva associada é

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu},$$

e, portanto,

$$d\tau_{\text{ef}} = M_\Psi^{-1/2} d\tau.$$

A regularidade da construção exige

$$0 < M_\Psi \leq 1, \quad 0 \leq C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 < 1.$$

Além disso, a densidade espectral que entra em M_Ψ não deve ser a densidade espectral total, mas a densidade espectral ativa, obtida após subtração ou filtragem do fundo estacionário [1].

1.1 A lacuna a ser resolvida

Apesar desses três resultados, permanece uma lacuna formal. O fator

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

foi introduzido como fator escalar de modulação geométrica efetiva. Entretanto, para que a série permaneça livre de hipóteses ad hoc, é necessário derivar sua versão operatorial a partir da ação e da resposta espectral da interface.

A pergunta central deste artigo é, portanto:

Como derivar, a partir da ação e dos operadores PAF, o fator geométrico $G(K)$ que transforma ativação espectral em modulação de tempo próprio efetivo?	(1)
---	-----

Essa pergunta possui duas partes.

A primeira é fundamental:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow \phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow G(K).$$

Isto é, o fator geométrico deve emergir da estrutura variacional da interface, e não ser acrescentado externamente.

A segunda é aplicada:

$$G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} \longrightarrow \text{ferramentas de engenharia elétrica e eletrônica.}$$

Ou seja, uma vez derivado o fator $G(K)$, deve-se mostrar como ele modifica, em regime regular, os tempos próprios efetivos já obtidos para linhas, ressonadores, guias, cavidades e circuitos não lineares.

1.2 Declaração metodológica

A presente construção seguirá três regras.

Regra 1: $G(K)$ deve vir da ação. Não será permitido introduzir $G(K)$ como função livre. O operador K será definido como a segunda variação da ação efetiva em torno de uma configuração de operação:

$$K := \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Aqui \mathcal{C} denota a configuração física considerada: linha, cavidade, guia, circuito ressonante, circuito ativo, interface dispersiva ou sistema eletromagnético efetivo.

Assim, K mede a resposta linearizada ou espectral da ação efetiva em torno da configuração de operação. Em circuitos, K desempenha o papel de operador de rigidez dinâmica, estabilidade ou resposta espectral da interface.

Regra 2: a ativação deve ser espectralmente filtrada. A presença de espectro não basta para gerar modulação temporal. Um fundo estacionário pode ter densidade espectral não nula e, ainda assim, não deve produzir alteração geométrica ou temporal efetiva. Por isso, a grandeza relevante não é a medida espectral total, mas sua parte ativa.

Se K é auto-adjunto no regime regular, sua decomposição espectral é

$$K = \int \lambda dE_K(\lambda),$$

e, para um estado ou excitação ψ , define-se a medida espectral

$$d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle.$$

A ativação espectral deve ser um funcional escalar não negativo dessa medida:

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0.$$

Ela deve satisfazer:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{em regime de ativação espectral efetiva.}$$

Uma realização mínima é

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0,$$

desde que $a(\lambda)$ seja escolhido de modo a anular a contribuição do fundo estacionário ou, equivalentemente, seja aplicado a uma medida já filtrada:

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K = d\mu_{\psi}^K - d\mu_{\text{fundo}}^K.$$

Outra possibilidade, compatível com a filtragem robusta já usada na série, é ponderar a medida por uma divergência informacional em relação ao fundo:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) D_{\text{KL}}(P_{\psi}^K \| Q^K) d\mu_{\psi}^K(\lambda),$$

desde que a normalização torne a expressão dimensionalmente consistente.

Neste artigo, $\rho(t)$ será tratado como observável operacional de ativação, não como fonte fundamental. Isto é,

$$\rho(t) \neq 0$$

pode indicar que a interface saiu do fundo estacionário, mas a modulação temporal só será aceita quando essa ativação puder ser convertida em $\mathcal{A}_K[\psi]$ e, posteriormente, em $G(K)$.

Regra 3: tempo próprio efetivo exige classe causal ou métrica admissível. A modulação espectral ativa não cria um segundo tempo. Ela modifica a resposta geométrica ou energia-causal da excitação. O tempo próprio efetivo só aparece em uma das duas situações:

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

isto é, quando a corrente de energia é tipo-tempo, ou quando existe uma métrica efetiva regular

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu},$$

com

$$0 < G(K) \leq 1.$$

Nesse segundo caso, a métrica efetiva renormaliza o tempo próprio por

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Se a excitação de base for nula, isto é, se

$$d\tau = 0,$$

então uma transformação conformal positiva não gera tempo próprio não nulo:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $G(K)$ renormaliza intervalos tipo-tempo já admissíveis; ele não transforma, por si só, uma onda progressiva nula ideal em excitação tipo-tempo.

1.3 Derivação preliminar da forma de menor ordem de $G(K)$

O objetivo deste artigo é substituir o fator escalar

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

por um fator operatorial

$$G(K),$$

derivado da resposta espectral ativa do operador K .

A construção parte de quatro exigências.

Primeiro, $G(K)$ deve ser escalar no nível efetivo, pois a modulação de menor ordem não deve introduzir índices livres na métrica:

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Segundo, $G(K)$ deve recuperar o limite clássico quando não houver ativação:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \implies G(K) = 1.$$

Terceiro, $G(K)$ deve ser regular:

$$0 < G(K) \leq 1.$$

Quarto, no regime de ativação fraca, $G(K)$ deve admitir expansão em série no escalar de ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$:

$$G(K) = G(0) + G'(0)\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Como o limite clássico exige

$$G(0) = 1,$$

e como a ativação espectral deve reduzir o fator geométrico efetivo no mesmo sentido que $M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$, escreve-se

$$G'(0) = -C\alpha.$$

Assim, a forma regular de menor ordem é

$$\boxed{G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2)}.$$

No truncamento de primeira ordem:

$$\boxed{G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}.$$

Essa expressão não é uma definição arbitrária. Ela decorre de:

1. $K = \delta^2 S_{\text{eff}}$, isto é, K vem da ação;
2. $\mathcal{A}_K[\psi]$, isto é, a ativação vem da medida espectral filtrada de K ;
3. $G(0) = 1$, isto é, o limite clássico é recuperado;
4. regularidade $0 < G(K) \leq 1$;
5. expansão de menor ordem em ativação fraca.

Portanto, $G(K)$ é a versão operatorial do fator M_Ψ :

$$\boxed{M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}.$$

1.4 Problema central do artigo

O problema central pode agora ser formulado com precisão.

Dado um sistema eletromagnético ou circuital descrito por uma ação efetiva S_{eff} , queremos demonstrar a cadeia:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_\psi^K(\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

Em seguida, para circuitos elétricos e eletrônicos, queremos acoplar essa cadeia à classificação energia-causal já derivada:

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

temos

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Com ativação espectral regular, a forma renormalizada torna-se

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

No caso de uma linha sem perdas, isso implica

$$d\tau_{\ell}^{\text{ef}} = G(K_{\ell})^{-1/2} dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2},$$

desde que

$$C'V^2 \neq L'I^2$$

e

$$0 < G(K_{\ell}) \leq 1.$$

Se a excitação for uma onda progressiva TEM ideal,

$$C'V^2 = L'I^2,$$

então

$$d\tau_{\ell} = 0$$

e, consequentemente,

$$d\tau_{\ell}^{\text{ef}} = 0.$$

Logo, $G(K)$ não atribui tempo próprio a uma excitação nula; ele apenas renormaliza o tempo próprio de excitações tipo-tempo efetivas.

1.5 O que será considerado inédito

A literatura de circuitos já contém funções de transferência, fase espectral, atraso de grupo, energia armazenada, potência transportada, linhas de transmissão, guias, cavidades e ressonadores. A literatura geométrica já contém a noção de tempo próprio como funcional da métrica. A contribuição aqui proposta não está nesses blocos isolados.

O ponto novo é a composição derivativa:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ação} \rightarrow \text{operador espectral de resposta} \rightarrow \text{ativação filtrada} \rightarrow \\ \text{fator geométrico } G(K) \rightarrow \text{tempo próprio efetivo de interface.} \end{array}} \quad (2)$$

Em particular, o artigo pretende demonstrar que:

1. $G(K)$ pode ser obtido como resposta escalar regular de menor ordem de um operador derivado da ação;
2. $\rho(t)$ deve ser interpretado como observável de ativação, não como fonte temporal fundamental;
3. o tempo próprio efetivo não nasce de fase, atraso ou ativação espectral isolada;
4. o tempo próprio efetivo aparece apenas quando há classe energia-causal tipo-tempo ou métrica efetiva admissível;
5. em engenharia elétrica, $G(K)$ pode ser acoplado ao critério mensurável

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

1.6 Síntese da seção

A quebra espectral ativa não introduz um segundo tempo. Ela modifica a resposta geométrica ou energia-causal da excitação. O tempo próprio efetivo só aparece quando a métrica efetiva é admissível ou quando a corrente de energia é tipo-tempo.

A tarefa deste artigo é derivar o fator

$$G(K)$$

a partir da ação, evitando sua introdução como hipótese fenomenológica. A estrutura mínima é:

$$\begin{aligned} K &= \delta^2 S_{\text{eff}}, \\ \mathcal{A}_K[\psi] &= \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda), \\ G(K) &= 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi], \\ g_{\mu\nu}^{\text{ef}} &= G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \\ d\tau_{\text{ef}} &= G(K)^{-1/2} d\tau. \end{aligned}$$

Para circuitos elétricos e eletrônicos, essa renormalização será aplicada apenas após a classificação energia-causal:

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Assim, a forma combinada será

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa é a base da Parte I: construir $G(K)$ de modo variacional, espectralmente filtrado, regular e aplicável à engenharia, sem introduzir termos livres, sem identificar atraso de grupo com tempo próprio e sem transformar uma excitação nula em tipo-tempo por artifício conformal.

2 Base publicada: renormalização espectral do tempo próprio

O objetivo desta seção é recuperar, de forma sintética e sem repetição integral, o resultado geométrico já estabelecido em [1]. Esse resultado será usado como base para a derivação posterior do fator operatorial $G(K)$. A distinção metodológica é essencial: nesta seção ainda não se deriva $G(K)$. Reapresenta-se apenas a estrutura publicada na qual uma componente espectral ativa modula a resposta geométrica por meio de um fator escalar M_Ψ . A passagem

$$M_\Psi \longrightarrow G(K)$$

será tratada nas seções seguintes como generalização operatorial derivada da ação.

2.1 Decomposição variacional da fonte energia–momento

A base publicada parte da possibilidade de que a fonte efetiva de energia–momento contenha duas contribuições:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}.$$

A primeira contribuição,

$$T_{\text{padrao}}^{\mu\nu},$$

representa a fonte ordinária de matéria, radiação e campos já presentes na descrição relativística usual. A segunda,

$$T_{\text{espectral}}^{\mu\nu},$$

representa uma componente espectral ativa associada a afastamento efetivo do fundo estacionário ou quebra espectral mensurável.

Essa decomposição não deve ser entendida como duplicação de matéria ou como introdução de uma fonte arbitrária. No formalismo variacional, ela decorre da decomposição da ação material efetiva:

$$S_{\text{mat}} = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\text{padrao}} + \mathcal{L}_{\text{espectral}}).$$

Pela linearidade da variação funcional em relação à métrica, tem-se

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g_{\mu\nu}},$$

e, portanto,

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{padrao}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{espectral}}.$$

Assim,

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}.$$

Proposição 2.1 (Decomposição da fonte). *Se a ação material efetiva se decompõe como*

$$S_{\text{mat}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}},$$

então o tensor de energia–momento total se decompõe como

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}.$$

Demonstração. Pela definição variacional do tensor de energia–momento,

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Como

$$S_{\text{mat}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}},$$

e a variação funcional é linear,

$$\frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta S_{\text{padrao}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{\text{espectral}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Logo,

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}.$$

□

Essa decomposição é uma afirmação sobre a fonte geométrica. Ela não implica, por si só, uma decomposição aditiva do tempo próprio. Essa será a primeira tese de segurança da presente formulação.

2.2 Fonte total não implica soma de tempos

Uma leitura incorreta da decomposição

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}$$

seria concluir que o tempo próprio total também se decompõe como

$$\tau_{\text{total}} = \tau_{\text{padrao}} + \tau_{\text{espectral}}.$$

Essa conclusão não é válida.

O tempo próprio não é uma função linear da fonte energia-momento. Ele é uma funcional da métrica ao longo de uma curva temporal. Para uma curva γ , escreve-se

$$\tau[\gamma] = \int_{\gamma} \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}.$$

Portanto, a decomposição aditiva de uma fonte tensorial não se transfere automaticamente para uma soma aditiva de tempos.

Proposição 2.2 (Não aditividade do tempo próprio). *A decomposição*

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu}$$

não implica

$$\tau_{\text{total}} = \tau_{\text{padrao}} + \tau_{\text{espectral}}.$$

Demonstração. A decomposição de $T_{\text{total}}^{\mu\nu}$ ocorre no espaço dos tensores fonte. O tempo próprio, por outro lado, é definido pelo elemento de linha associado à métrica:

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

A dependência de τ em relação à fonte é indireta, mediada pela equação geométrica que relaciona fonte e métrica. Além disso, o funcional

$$\tau[\gamma] = \int_{\gamma} \frac{1}{c} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}$$

não é linear na métrica, pois envolve a raiz quadrada da forma quadrática $g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$. Assim, a soma de fontes não implica soma de tempos. \square

Essa distinção é central para evitar cálculo circular. O tempo próprio efetivo não será introduzido como uma nova variável independente. Ele será derivado da métrica efetiva, e essa métrica será derivada da resposta geométrica modulada.

2.3 Resposta geométrica espectral escalar

A estrutura publicada em [1] considera que a componente espectral ativa pode modular a resposta geométrica efetiva por meio de um fator escalar. Escreve-se

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = M_{\Psi} G_{\mu\nu}.$$

Aqui $G_{\mu\nu}$ é o tensor geométrico de referência e $G_{\mu\nu}[\Psi]$ é a resposta geométrica efetiva no regime espectral ativo.

O fator escalar é dado por

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

A quantidade $|\Psi|_{\text{ativo}}^2$ representa a densidade espectral ativa, isto é, a parte da estrutura espectral que permanece após filtragem do fundo estacionário. Esse detalhe é crucial: a modulação geométrica não deve depender da densidade espectral total, pois um fundo estacionário ou ruído persistente não deve gerar ativação geométrica espúria.

Assim, a resposta geométrica espectral publicada pode ser escrita como

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = \left(1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2\right) G_{\mu\nu}.$$

Proposição 2.3 (Forma escalar de menor ordem). *Se a resposta espectral efetiva não introduz índices livres adicionais e deve recuperar o limite clássico quando a ativação espectral se anula, então a forma escalar regular de menor ordem é*

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Demonstração. Se a modulação não introduz vetores, covetores ou tensores adicionais, a modificação de $G_{\mu\nu}$ que preserva seu tipo tensorial deve ser uma multiplicação por um escalar:

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = M_\Psi G_{\mu\nu}.$$

A recuperação do limite clássico exige

$$M_\Psi \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad |\Psi|_{\text{ativo}}^2 \rightarrow 0.$$

Assumindo regularidade em torno do regime não ativado, pode-se expandir

$$M_\Psi = 1 + a_1|\Psi|_{\text{ativo}}^2 + O(|\Psi|_{\text{ativo}}^4).$$

Escrevendo

$$a_1 = -C\alpha,$$

obtém-se a forma de menor ordem

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

□

Essa forma não deve ser interpretada como a derivação operatorial completa de $G(K)$. Ela é a forma escalar efetiva já publicada. A derivação de $G(K)$ exigirá substituir

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

por um funcional espectral filtrado do operador $K = \delta^2 S_{\text{eff}}$.

2.4 Métrica efetiva induzida por M_Ψ

A resposta geométrica efetiva

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = M_\Psi G_{\mu\nu}$$

admite, no regime efetivo considerado, uma representação operacional por uma métrica conformalmente relacionada à métrica de fundo:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Essa relação deve ser entendida como descrição efetiva dos intervalos físicos no regime em que a modulação espectral é tratada como escalar e local. Não se assume, nessa etapa, a identidade geométrica completa

$$G_{\mu\nu}(g^{\text{ef}}) = M_\Psi G_{\mu\nu}(g),$$

pois uma transformação conformal completa do tensor de Einstein inclui termos diferenciais dependentes de derivadas de M_Ψ . O resultado usado aqui é mais restrito: a métrica efetiva codifica a reescala dos intervalos.

Dado

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu},$$

o intervalo efetivo é

$$ds_{\text{ef}}^2 = g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^\mu dx^\nu.$$

Logo,

$$ds_{\text{ef}}^2 = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = M_\Psi^{-1} ds^2.$$

Teorema 2.1 (Reescala conformal dos intervalos). *Se*

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu},$$

então

$$ds_{\text{ef}}^2 = M_\Psi^{-1} ds^2.$$

Demonstração. Pela definição do intervalo efetivo,

$$ds_{\text{ef}}^2 = g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^\mu dx^\nu.$$

Substituindo

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu},$$

tem-se

$$ds_{\text{ef}}^2 = M_\Psi^{-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

segue

$$ds_{\text{ef}}^2 = M_\Psi^{-1} ds^2.$$

□

2.5 Renormalização espectral do tempo próprio

O tempo próprio padrão ao longo de uma curva temporal é definido por

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2.$$

Na métrica efetiva, define-se

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{c^2} ds_{\text{ef}}^2.$$

Usando

$$ds_{\text{ef}}^2 = M_{\Psi}^{-1} ds^2,$$

segue

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = M_{\Psi}^{-1} d\tau^2.$$

Como o domínio regular exige

$$M_{\Psi} > 0,$$

tomamos a raiz positiva para curvas temporais orientadas para o futuro:

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau.$$

Substituindo

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

obtém-se

$$d\tau_{\text{ef}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2}}.$$

Teorema 2.2 (Renormalização espectral do tempo próprio). *Se a métrica efetiva é dada por*

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu},$$

com

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

então o tempo próprio efetivo satisfaz

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2}}.$$

Demonstração. Da definição de tempo próprio efetivo,

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Usando

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu},$$

obtém-se

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = M_{\Psi}^{-1} \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Como

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

tem-se

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = M_{\Psi}^{-1} d\tau^2.$$

Para $M_{\Psi} > 0$ e orientação temporal futura,

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau.$$

Substituindo a forma de M_{Ψ} , segue o resultado. □

2.6 Regime perturbativo

No regime de ativação fraca,

$$C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \ll 1,$$

define-se

$$x = C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Então

$$M_{\Psi}^{-1/2} = (1 - x)^{-1/2}.$$

Usando a expansão binomial,

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3),$$

obtemos

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2}C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 + \frac{3}{8}C^2\alpha^2|\Psi|_{\text{ativo}}^4 + O(|\Psi|_{\text{ativo}}^6) \right] d\tau.$$

Em primeira ordem,

$$d\tau_{\text{ef}} \approx \left[1 + \frac{1}{2}C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \right] d\tau.$$

Portanto,

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Corolário 2.3 (Correção perturbativa). *No regime*

$$C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \ll 1,$$

a primeira correção relativa ao tempo próprio é

$$\frac{\delta(d\tau)}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Essa forma perturbativa permite escrever, apenas como aproximação de primeira ordem,

$$d\tau_{\text{ef}} \approx d\tau + d\tau_{\text{espectral}},$$

com

$$d\tau_{\text{espectral}} := \frac{1}{2}C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2 d\tau.$$

Entretanto, essa expressão não define um segundo tempo fundamental. Ela é apenas o primeiro termo da expansão da renormalização multiplicativa:

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau.$$

2.7 Filtragem robusta da ativação espectral

A forma

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

exige uma distinção entre densidade espectral total e densidade espectral ativa. Sem essa distinção, um fundo estacionário com densidade espectral não nula produziria modulação geométrica, o que seria fisicamente indevido.

Escreve-se formalmente

$$|\Psi|^2 = |\Psi|_{\text{fundo}}^2 + |\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

A parte

$$|\Psi|_{\text{fundo}}^2$$

representa o espectro estacionário, persistente ou estatisticamente não informativo. A parte

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

representa o afastamento efetivo em relação ao fundo.

Uma forma operacional de construir essa distinção é comparar uma distribuição espectral instantânea P com uma distribuição de referência Q . A divergência de Kullback–Leibler é

$$D_{\text{KL}}(P\|Q) = \int P(\omega) \log \left(\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \right) d\omega.$$

Ela satisfaz

$$D_{\text{KL}}(P\|Q) \geq 0,$$

e

$$D_{\text{KL}}(P\|Q) = 0 \quad \text{se} \quad P = Q \quad \text{quase em toda parte.}$$

Assim, uma escolha mínima de ativação é

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 = |\Psi|^2 D_{\text{KL}}(P\|Q),$$

com a normalização dimensional adequada ao sistema físico considerado.

Com isso:

$$P = Q \implies D_{\text{KL}}(P\|Q) = 0 \implies |\Psi|_{\text{ativo}}^2 = 0,$$

e, portanto,

$$M_{\Psi} = 1.$$

Logo, o fundo estacionário não produz renormalização temporal.

2.8 Tese de segurança: modulação conformal não transforma nulo em tipo-tempo

A métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu}$$

é uma transformação conformal positiva quando

$$M_{\Psi} > 0.$$

Consequentemente, ela preserva a classe causal dos vetores. Se v^{μ} é nulo na métrica de fundo, então

$$g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0.$$

Na métrica efetiva:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^{\mu} v^{\nu} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} = 0.$$

Portanto, vetores nulos permanecem nulos.

Essa observação é fundamental para a aplicação a circuitos. Se uma excitação de base possui

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau = 0.$$

Logo, a modulação espectral conformal não transforma uma onda progressiva nula ideal em excitação tipo-tempo. Ela apenas renormaliza intervalos já tipo-tempo.

Em linguagem circuital, primeiro deve-se verificar o critério energia-causal:

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Somente quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0$$

existe

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

A renormalização espectral deve então ser aplicada como

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

2.9 Preparação para a passagem $M_{\Psi} \rightarrow G(K)$

O fator M_{Ψ} fornece a base escalar da renormalização temporal:

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Entretanto, para o presente artigo, essa forma ainda não é suficiente. O objetivo é derivar uma estrutura operatorial, na qual a ativação espectral não seja representada por um campo escalar Ψ introduzido diretamente, mas por um operador de resposta obtido da ação:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

A passagem desejada é

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi],$$

onde $\mathcal{A}_K[\psi]$ é um funcional escalar não negativo da medida espectral ativa de K . Assim,

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

torna-se

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Essa passagem não será assumida como postulado. Ela será derivada nas próximas seções a partir de quatro exigências:

1. K deve vir da segunda variação da ação efetiva;
2. $\mathcal{A}_K[\psi]$ deve vir da medida espectral ativa de K ;
3. o limite clássico deve satisfazer $G(K) = 1$;
4. o domínio regular deve satisfazer $0 < G(K) \leq 1$.

Assim, $G(K)$ será interpretado como a versão operatorial e variacionalmente controlada do fator escalar M_{Ψ} .

2.10 Conclusão da seção

Esta seção recuperou a base publicada da renormalização espectral do tempo próprio:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu},$$

$$G_{\mu\nu}[\Psi] = M_{\Psi} G_{\mu\nu},$$

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu},$$

e

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau.$$

A primeira tese de segurança foi estabelecida:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu} \not\Rightarrow \tau_{\text{total}} = \tau_{\text{padrao}} + \tau_{\text{espectral}}.$$

O tempo próprio é funcional da métrica, não soma direta de fontes.

A segunda tese de segurança também foi fixada: uma transformação conformal positiva preserva a classe causal. Portanto, a modulação espectral por M_{Ψ} não transforma uma excitação nula em tipo-tempo. Ela renormaliza intervalos tipo-tempo já admissíveis.

A tarefa das próximas seções será derivar a substituição

$$M_{\Psi} \longrightarrow G(K)$$

sem ad hoc e sem cálculo circular, tomando

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}$$

como operador de resposta espectral da interface e construindo a ativação

$$\mathcal{A}_K[\psi]$$

a partir da medida espectral filtrada de K .

3 Reformulação PAF: da ação ao operador de ativação

A seção anterior recuperou a base publicada da renormalização espectral do tempo próprio, na qual a modulação escalar

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

induz a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu}$$

e, consequentemente,

$$d\tau_{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1/2} d\tau$$

[1]. Contudo, essa forma escalar ainda não explica, por si só, de onde vem a ativação espectral. Para que a construção permaneça livre de hipóteses ad hoc, é necessário derivar o objeto responsável pela ativação a partir da ação efetiva.

O objetivo desta seção é introduzir esse objeto. Ele será denotado por K , mas não será postulado como parâmetro fenomenológico. No formalismo PAF, K é definido como o Hessiano variacional da ação efetiva em torno da configuração física de operação. Assim, K mede a resposta espectral local da interface, do circuito, do campo ou da geometria considerada.

A cadeia derivativa desta seção é

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow \phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar} \longrightarrow T_{\text{total}}^{\mu\nu} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

A partir dessa cadeia, as seções posteriores poderão construir a medida espectral de K , a ativação filtrada \mathcal{A}_K , o fator geométrico $G(K)$ e a renormalização

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

3.1 Ação efetiva de interface

Considere uma configuração física \mathcal{C} , que pode representar um circuito distribuído, um ressonador, uma linha de transmissão, uma cavidade, um guia, um campo eletromagnético com interação ou uma geometria efetiva. O ponto de partida PAF é uma única ação efetiva:

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}}.$$

Aqui,

$$S_{\text{padrao}}$$

representa a ação do setor físico de referência: circuito ideal, campo eletromagnético, matéria ou geometria de fundo. O termo

$$S_{\text{espectral}}$$

representa o setor responsável por graus de liberdade espectrais ativos, desde que esses graus de liberdade sejam variacionais. O termo

$$S_{\text{int}}$$

representa o acoplamento entre o setor padrão e o setor espectral.

Essa decomposição não deve ser lida como soma arbitrária de efeitos. Ela é uma decomposição de ação. A dinâmica física continua sendo determinada por uma única condição variacional:

$$\delta S_{\text{eff}} = 0.$$

Portanto, qualquer fonte, tensor, operador ou fator de ativação que venha a ser usado no artigo deve ser extraído de S_{eff} ou de suas variações.

3.2 Fase efetiva PAF

A fase efetiva associada à ação total é definida por

$$\phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar}.$$

Como

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}},$$

segue

$$\phi_{\text{eff}} = \phi_{\text{padrao}} + \phi_{\text{espectral}} + \phi_{\text{int}},$$

com

$$\phi_{\text{padrao}} = \frac{S_{\text{padrao}}}{\hbar}, \quad \phi_{\text{espectral}} = \frac{S_{\text{espectral}}}{\hbar}, \quad \phi_{\text{int}} = \frac{S_{\text{int}}}{\hbar}.$$

A frequência operacional continua sendo a taxa de acumulação da fase em relação ao tempo coordenado:

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{d\phi_{\text{eff}}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{dS_{\text{eff}}}{dt}.$$

Essa identidade não define tempo próprio. Ela apenas estabelece a camada de fase. O tempo próprio efetivo só será admissível depois que a configuração for classificada como tipo-tempo por critério energia-causal ou por métrica efetiva admissível, conforme discutido em [2] e [1].

3.3 Tensor energia-momento total por variação métrica

Se a ação efetiva depende da métrica $g_{\mu\nu}$, o tensor energia-momento total é definido por variação métrica:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Como

$$S_{\text{eff}} = \hbar \phi_{\text{eff}},$$

também se pode escrever

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = -\frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \phi_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Essa identidade é a forma PAF da ligação entre fase efetiva e fonte geométrica.

Substituindo a decomposição da ação,

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}},$$

obtém-se

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral}}^{\mu\nu} + T_{\text{int}}^{\mu\nu},$$

onde

$$T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{padrao}}}{\delta g_{\mu\nu}},$$

$$T_{\text{espectral}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{espectral}}}{\delta g_{\mu\nu}},$$

e

$$T_{\text{int}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Quando o termo de interação é incorporado ao setor espectral efetivo, pode-se escrever de modo abreviado

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = T_{\text{padrao}}^{\mu\nu} + T_{\text{espectral,eff}}^{\mu\nu}.$$

Essa é a forma que recupera a decomposição já empregada em [1]. A diferença agora é que a decomposição é explicitamente variacional: os tensores vêm da ação, não são adicionados como fontes externas.

3.4 Configuração de operação e expansão variacional

Para extrair o operador de ativação, escolhe-se uma configuração de operação

$$\mathcal{C}.$$

Essa configuração pode ser uma solução estacionária, uma solução periódica, uma trajetória clássica, um modo de circuito, um modo eletromagnético, uma solução de fundo ou uma configuração efetiva de engenharia.

Seja Ξ^A o conjunto de campos e variáveis dinâmicas do sistema. O índice A representa, de forma compacta, todos os índices internos, espaciais, circuitais e de campo. Escrevemos uma perturbação em torno de \mathcal{C} :

$$\Xi^A = \Xi_{\mathcal{C}}^A + \eta^A.$$

A ação efetiva pode ser expandida formalmente:

$$S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}} + \eta] = S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}] + \delta S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta] + \frac{1}{2} \delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta] + O(\eta^3).$$

Como \mathcal{C} é uma configuração de operação admissível, assume-se que ela satisfaz a equação de movimento variacional:

$$\delta S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta] = 0$$

para perturbações admissíveis η . Portanto, a primeira contribuição dinâmica não trivial da resposta local é a segunda variação:

$$\delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta].$$

Define-se então o operador K por

$$\delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta] = \langle \eta, K_{\mathcal{C}} \eta \rangle,$$

onde o produto interno é o produto natural no espaço de perturbações admissíveis.

Assim,

$$K_{\mathcal{C}} := \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

Esse é o operador de resposta espectral, estabilidade ou ativação da configuração.

3.5 Definição variacional do operador de ativação

A definição anterior pode ser escrita de forma funcional. Se

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{eff}}[\Xi],$$

então o Hessiano variacional é

$$K_{AB}(x, y) = \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \Xi^A(x) \delta \Xi^B(y)} \Big|_{\Xi = \Xi_{\mathcal{C}}}.$$

A ação quadrática das perturbações é

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \eta^A(x) K_{AB}(x, y) \eta^B(y).$$

Quando o sistema é local, ou localizável em uma aproximação de baixa ordem, pode-se escrever formalmente

$$K_{AB}(x, y) = \mathcal{K}_{AB}(x, \partial_x) \delta(x - y),$$

e então

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \eta^A(x) \mathcal{K}_{AB}(x, \partial) \eta^B(x).$$

Definição 3.1 (Operador de ativação PAF). *Dada uma ação efetiva S_{eff} e uma configuração admissível \mathcal{C} , define-se o operador de ativação PAF por*

$$K_{\mathcal{C}} := \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Ele é o Hessiano variacional da ação efetiva em torno de \mathcal{C} .

Essa definição é o primeiro ponto novo da presente formulação: K não é inserido para ajustar dados, nem escolhido como parâmetro livre. Ele é a segunda variação da ação efetiva.

3.6 Interpretação espectral de K

O operador K mede a resposta local da configuração a pequenas perturbações. Seus modos próprios indicam direções de resposta espectral. Seus autovalores, quando o problema espectral é bem definido, medem rigidez, instabilidade, ressonância, frequência própria ou sensibilidade da interface.

No regime regular, exige-se que K seja simétrico ou auto-adjunto em relação ao produto interno físico das perturbações:

$$\langle \eta_1, K \eta_2 \rangle = \langle K \eta_1, \eta_2 \rangle.$$

Sob essa condição, pode-se aplicar a decomposição espectral:

$$K = \int \lambda dE_K(\lambda),$$

onde $E_K(\lambda)$ é a resolução espectral de K .

Para uma excitação ou estado ψ , define-se a medida espectral associada:

$$d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle.$$

Essa medida será usada posteriormente para construir a ativação espectral filtrada

$$\mathcal{A}_K[\psi].$$

Neste ponto, ainda não se define $G(K)$. A seção apenas estabelece que a matéria-prima de $G(K)$ é derivada da ação:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow d\mu_{\psi}^K(\lambda).$$

3.7 O caso circuital: K_{circ}

Para circuitos elétricos e eletrônicos, o operador de ativação é obtido da ação circuital efetiva:

$$K_{\text{circ}} = \delta^2 S_{\text{circ}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Essa definição cobre tanto circuitos concentrados quanto circuitos distribuídos.

3.7.1 Circuito LC concentrado

Considere um circuito LC ideal escrito em termos da carga $q(t)$:

$$L_{LC} = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2.$$

A ação é

$$S_{LC} = \int dt \left[\frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2 \right].$$

Se

$$q(t) = q_c(t) + \eta(t),$$

então a parte quadrática em η , após integração por partes e descartando termos de fronteira compatíveis com as condições variacionais, é

$$S_{LC}^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt \eta(t) \left[-L \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{C} \right] \eta(t).$$

Portanto,

$$K_{LC} = -L \frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{C}.$$

Com uma convenção positiva para o operador dinâmico, pode-se multiplicar por -1 e trabalhar com

$$\widetilde{K}_{LC} = L \frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{C},$$

desde que a convenção seja mantida em toda a análise espectral. O conteúdo físico está nos modos e autovalores relativos, não no sinal global escolhido para o Hessiano.

No domínio harmônico,

$$\eta(t) \sim e^{-i\omega t},$$

o operador fornece

$$K_{LC}(\omega) = L\omega^2 - \frac{1}{C}$$

na convenção correspondente. A condição de modo livre é

$$K_{LC}(\omega) = 0,$$

isto é,

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Assim, a frequência natural do circuito surge do operador Hessiano da ação.

3.7.2 Linha de transmissão sem perdas

Para uma linha sem perdas, pode-se usar a variável de fluxo $\Phi(z, t)$, com

$$V = \partial_t \Phi, \quad I = -\frac{1}{L'} \partial_z \Phi.$$

Uma densidade lagrangiana compatível com a linha ideal é

$$\mathcal{L}_\ell = \frac{1}{2}C'(\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{2L'}(\partial_z \Phi)^2.$$

A ação é

$$S_\ell = \int dt dz \left[\frac{1}{2} C' (\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{2L'} (\partial_z \Phi)^2 \right].$$

Perturbando

$$\Phi = \Phi_c + \eta,$$

a parte quadrática é

$$S_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt dz \left[C' (\partial_t \eta)^2 - \frac{1}{L'} (\partial_z \eta)^2 \right].$$

Após integração por partes,

$$S_\ell^{(2)} = \frac{1}{2} \int dt dz \eta \left[-C' \partial_t^2 + \frac{1}{L'} \partial_z^2 \right] \eta.$$

Logo,

$$K_\ell = -C' \partial_t^2 + \frac{1}{L'} \partial_z^2.$$

No domínio de Fourier,

$$\eta(z, t) \sim e^{i(kz - \omega t)},$$

tem-se

$$K_\ell(\omega, k) = C' \omega^2 - \frac{k^2}{L'}.$$

A condição de modo livre é

$$K_\ell(\omega, k) = 0,$$

ou seja,

$$\omega^2 = \frac{k^2}{L' C'}.$$

Como

$$c_\ell = \frac{1}{\sqrt{L' C'}},$$

obtem-se

$$\omega^2 = c_\ell^2 k^2.$$

Assim, a velocidade característica da linha emerge da ação circuital e de seu Hessiano:

$$c_\ell = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}.$$

Esse resultado conecta diretamente a derivação de K_ℓ ao critério energia-causal de tempo próprio circuital desenvolvido em [2].

3.8 O caso eletromagnético: K_{EM}

Para campos eletromagnéticos, o operador de ativação é derivado da ação eletromagnética efetiva:

$$K_{\text{EM}} = \delta^2 \Gamma_{\text{EM+int}} \Big|_c.$$

Aqui,

$$\Gamma_{\text{EM+int}}$$

representa a ação efetiva do setor eletromagnético com possíveis interações de interface, resposta material, vácuo efetivo ou acoplamentos espectrais.

No caso Maxwelliano livre, em uma escolha de gauge admissível, a ação quadrática leva a um operador de onda para as perturbações do potencial A_μ :

$$K_{\text{Maxwell}} \sim \square \Pi_{\text{gauge}},$$

onde Π_{gauge} representa a projeção compatível com a condição de gauge escolhida. Em meios dispersivos ou interfaces, o operador é modificado por termos de resposta:

$$K_{\text{EM}} = K_{\text{Maxwell}} + K_{\text{int}}.$$

A parte K_{int} não deve ser introduzida como correção livre; ela deve vir da segunda variação de

$$S_{\text{int}}.$$

Portanto,

$$K_{\text{int}} = \delta^2 S_{\text{int}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Essa formulação é importante para evitar ad hoc. Qualquer acoplamento espectral que altere o comportamento do campo deve aparecer primeiro em S_{int} . Apenas depois sua segunda variação pode ser usada para construir o operador de resposta.

3.9 O caso geométrico: K_{geom}

Para geometrias efetivas, o operador de ativação é

$$K_{\text{geom}} = \delta^2 S_{\text{geom}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Se a ação geométrica de referência é do tipo Einstein–Hilbert,

$$S_{\text{geom}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

então K_{geom} é o Hessiano gravitacional em torno da métrica de fundo considerada. Se há modulação espectral efetiva, a ação geométrica pode assumir a forma

$$S_{\text{geom}}^{\text{ef}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} G(K) R,$$

mas esta forma só será admissível depois que $G(K)$ for derivado como fator escalar regular da ativação espectral. Nesta seção, portanto, ainda não se deve inserir $G(K)$ dentro da ação geométrica. A ordem correta é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow S_{\text{geom}}^{\text{ef}}.$$

3.10 Relação entre K , ativação e $\rho(t)$

A grandeza $\rho(t)$, quando usada na FFE, deve ser reinterpretada no presente artigo como observável de ativação espectral. Ela não será tomada como fonte fundamental e não substituirá o operador K .

A relação correta é:

$$K \longrightarrow d\mu_\psi^K(\lambda, t) \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow \rho_K(t).$$

Isto é, primeiro deriva-se K da ação; depois constrói-se sua medida espectral; depois extrai-se a ativação filtrada; por fim, define-se $\rho_K(t)$ como indicador temporal dessa ativação.

Uma forma mínima e não fundamental para $\rho_K(t)$ é

$$\rho_K(t) := \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

ou, quando se deseja uma quantidade adimensional e normalizada,

$$\rho_K(t) := \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

onde \mathcal{A}_0 é uma escala de ativação escolhida pela normalização experimental do sistema. Outra possibilidade, mais robusta contra mudanças de escala, é

$$\rho_K(t) := \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Essas expressões mostram que $\rho_K(t)$ não é a causa primária da modulação. Ele é um observável derivado da evolução da ativação espectral.

Portanto, se a FFE usa $\rho(t)$ como assinatura de quebra temporal, a forma PAF limpa é:

$$\rho(t) \longrightarrow \rho_K(t) = \mathcal{R} \left[\frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t) \right],$$

onde \mathcal{R} representa uma escolha de normalização ou filtragem observacional. A origem física permanece sendo

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K.$$

Assim, $\rho(t)$ pode ser mantido no artigo apenas como observável derivado. Se ele fosse introduzido como fonte independente antes de K , a construção se tornaria fenomenológica e não derivativa.

3.11 Teorema: K é derivado da ação

Teorema 3.1 (Origem variacional do operador de ativação). *Se uma interface física é descrita por uma ação efetiva $S_{\text{eff}}[\Xi]$ e por uma configuração admissível \mathcal{C} que satisfaz $\delta S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}} = 0$, então a resposta linearizada da interface é determinada pelo operador*

$$K_{\mathcal{C}} = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

Esse operador não é um parâmetro fenomenológico; ele é o Hessiano variacional da ação efetiva.

Demonstração. Considere uma perturbação η em torno da configuração \mathcal{C} :

$$\Xi = \Xi_{\mathcal{C}} + \eta.$$

Expandindo a ação,

$$S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}} + \eta] = S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}] + \delta S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta] + \frac{1}{2} \delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta] + O(\eta^3).$$

Como \mathcal{C} é admissível,

$$\delta S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta] = 0.$$

Logo, a primeira contribuição dinâmica não trivial é a forma quadrática

$$\frac{1}{2} \delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta].$$

Por definição de Hessiano, existe um operador $K_{\mathcal{C}}$ tal que

$$\delta^2 S_{\text{eff}}[\Xi_{\mathcal{C}}; \eta, \eta] = \langle \eta, K_{\mathcal{C}} \eta \rangle.$$

Portanto,

$$K_{\mathcal{C}} = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

□

3.12 Condições de validade

A identificação de K como operador espectral exige algumas condições.

Primeiro, a configuração de operação deve satisfazer a equação variacional:

$$\delta S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}} = 0.$$

Segundo, o Hessiano deve ser bem definido no espaço de perturbações admissíveis.

Terceiro, para se falar de medida espectral real, K deve ser auto-adjunto ou possuir uma extensão auto-adjunta adequada no domínio físico:

$$K = K^\dagger.$$

Quarto, se o sistema for dissipativo, aberto ou não Hermitiano, deve-se trabalhar com uma formulação estendida: duplicação de variáveis, formalismo de ação efetiva não local, operadores pseudounitários ou análise de valores singulares. Nesses casos, K ainda pode ser obtido como segunda variação da ação efetiva, mas a interpretação espectral deve ser feita com maior cautela.

Quinto, nenhuma conclusão sobre tempo próprio decorre de K isoladamente. O caminho completo é:

$$K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}},$$

ou, em circuitos,

$$K \longrightarrow G(K), \quad \Delta_{\text{circ}} > 0, \quad d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

3.13 Síntese da seção

Esta seção estabeleceu a primeira etapa realmente derivativa do artigo. O fator $G(K)$ não será introduzido como função arbitrária. Seu argumento, K , é derivado da ação efetiva:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

Para circuitos,

$$K_{\text{circ}} = \delta^2 S_{\text{circ}}.$$

Para campos eletromagnéticos,

$$K_{\text{EM}} = \delta^2 \Gamma_{\text{EM+int}}.$$

Para geometria efetiva,

$$K_{\text{geom}} = \delta^2 S_{\text{geom}}.$$

O operador K é, portanto, o Hessiano variacional da ação efetiva em torno da configuração de operação. Ele mede a resposta espectral local da configuração. A grandeza $\rho(t)$, quando empregada, deve ser tratada como observável derivado da ativação espectral associada a K , não como fonte primitiva.

A sequência segura para as próximas seções é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

Com isso, a construção permanece sem ad hoc, sem cálculo circular e compatível com a linha PAF: primeiro ação, depois operadores, depois espectro, depois ativação, depois geometria efetiva e somente por fim tempo próprio efetivo.

4 Medida espectral de K

A seção anterior definiu o operador de ativação como o Hessiano variacional da ação efetiva em torno de uma configuração de operação:

$$K_{\mathcal{C}} := \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

Essa definição garante que K não é um parâmetro fenomenológico. Ele é derivado da ação. A presente seção dá o próximo passo: construir, a partir de K , uma medida espectral e uma grandeza escalar de ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$. Essa grandeza substituirá, de modo operatorial, o fator escalar $|\Psi|_{\text{ativo}}^2$ usado na formulação geométrica publicada em [1].

A cadeia a ser demonstrada é

$$K \longrightarrow dE_K(\lambda) \longrightarrow d\mu_{\psi}^K(\lambda) \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

Somente após essa construção será admissível escrever, nas seções seguintes,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Assim, $G(K)$ não será postulado: sua variável de ativação será derivada da medida espectral do operador K .

4.1 Regime regular e auto-adjunticidade

Para aplicar o teorema espectral, é necessário restringir inicialmente a análise ao regime regular. Neste regime, assume-se que K é um operador densamente definido, simétrico e auto-adjunto em um espaço de Hilbert de perturbações admissíveis $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$:

$$K = K^{\dagger}.$$

Fisicamente, essa condição corresponde a uma resposta conservativa, ou efetivamente conservativa, em torno da configuração de operação. Em circuitos ideais sem perdas,

linhas de transmissão sem perdas, cavidades fechadas ou modelos variacionais regulares, essa hipótese é natural.

Em circuitos abertos, dissipativos ou ativos, o operador linearizado pode não ser auto-adjunto. Nesses casos, a análise espectral exige uma extensão: formalismo duplicado, operador normal associado, dilatação auto-adjunta, operadores de resposta $K^\dagger K$, ou formulações não Hermitianas controladas. Esses casos são relevantes para engenharia, mas não serão usados como ponto de partida neste capítulo. A derivação de $G(K)$ será feita primeiro no regime regular, pois é nele que a medida espectral é matematicamente direta.

Definição 4.1 (Regime regular de ativação). *Diz-se que a configuração \mathcal{C} está em regime regular quando o Hessiano*

$$K_{\mathcal{C}} = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}$$

é auto-adjunto, ou admite extensão auto-adjunta fisicamente selecionada, no espaço de perturbações admissíveis.

Essa restrição não é uma hipótese ad hoc. Ela é a condição matemática mínima para que se possa atribuir uma medida espectral real ao operador de resposta.

4.2 Resolução espectral de K

No regime regular, pelo teorema espectral, existe uma resolução espectral $E_K(\lambda)$ tal que

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda),$$

onde $\sigma(K)$ é o espectro de K .

Também vale a decomposição da identidade:

$$I = \int_{\sigma(K)} dE_K(\lambda).$$

Para toda função boreliana F , define-se funcionalmente

$$F(K) = \int_{\sigma(K)} F(\lambda) dE_K(\lambda).$$

Essa forma será essencial para interpretar $G(K)$ como função operatorial controlada por um escalar espectral de ativação, e não como função livre.

Proposição 4.1 (Resolução espectral do operador de ativação). *Se $K = K^\dagger$, então existe uma família projetiva $E_K(\lambda)$ tal que*

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

4.3 Medida espectral associada a uma excitação

Seja $\psi \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ uma excitação admissível, normalizada por

$$\|\psi\|^2 = 1.$$

Define-se a medida espectral de K associada a ψ por

$$d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle.$$

Equivalente, para um conjunto espectral $B \subset \sigma(K)$,

$$\mu_\psi^K(B) = \langle \psi, E_K(B)\psi \rangle.$$

Como $E_K(B)$ é projetor ortogonal,

$$\mu_\psi^K(B) \geq 0.$$

Além disso,

$$\mu_\psi^K(\sigma(K)) = \langle \psi, I\psi \rangle = 1.$$

Logo, para estados normalizados, μ_ψ^K é uma medida de probabilidade espectral.

Os momentos espectrais são

$$M_n^K[\psi] = \int_{\sigma(K)} \lambda^n d\mu_\psi^K(\lambda).$$

Em particular,

$$M_1^K[\psi] = \int_{\sigma(K)} \lambda d\mu_\psi^K(\lambda) = \langle \psi, K\psi \rangle,$$

e

$$M_2^K[\psi] = \int_{\sigma(K)} \lambda^2 d\mu_\psi^K(\lambda) = \langle \psi, K^2\psi \rangle,$$

quando ψ pertence aos respectivos domínios.

Definição 4.2 (Medida espectral de ativação). *A medida espectral de ativação associada à excitação ψ é*

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

Ela descreve como a excitação ψ se projeta sobre os modos espectrais do Hessiano variacional K .

4.4 Por que a medida total não é a ativação física

A medida

$$d\mu_\psi^K(\lambda)$$

descreve o conteúdo espectral total da excitação. Entretanto, a ativação física relevante para renormalização geométrica não deve ser identificada com a medida total. A razão é simples: um fundo estacionário pode possuir espectro não nulo sem representar ativação dinâmica.

Essa distinção já aparece na forma escalar publicada

$$|\Psi|^2 \longrightarrow |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

em [1]. A modulação geométrica não deve responder ao espectro total, mas à parte do espectro que se afasta do fundo estacionário. Caso contrário, qualquer ruído persistente, modo estacionário ou densidade espectral de fundo geraria modulação geométrica indevida.

Portanto, a versão operatorial deve obedecer à mesma regra:

$$d\mu_\psi^K \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K.$$

4.5 Fundo estacionário e distribuição de referência

Seja Q^K a distribuição espectral de referência associada ao fundo estacionário. Essa distribuição deve ser definida antes da análise da ativação. Em aplicações, ela pode ser obtida por média temporal em regime estacionário, calibração sem excitação ativa, ou estado de referência da interface.

Se a medida espectral instantânea de ψ é absolutamente contínua em relação a uma medida de referência ν , escreve-se

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = P_\psi^K(\lambda) d\nu(\lambda),$$

e

$$d\mu_0^K(\lambda) = Q^K(\lambda) d\nu(\lambda),$$

onde P_ψ^K é a distribuição espectral instantânea e Q^K é a distribuição espectral do fundo.

A condição de ausência de ativação é

$$P_\psi^K(\lambda) = Q^K(\lambda)$$

quase em toda parte. Nesse caso, a ativação deve se anular:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0.$$

4.6 Divergência informacional como filtragem de ativação

Uma forma robusta de medir afastamento em relação ao fundo é usar uma divergência informacional. A escolha mais simples é a divergência de Kullback–Leibler:

$$D_{\text{KL}}(P_\psi^K \| Q^K) = \int P_\psi^K(\lambda) \log \left(\frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)} \right) d\nu(\lambda).$$

Ela satisfaz

$$D_{\text{KL}}(P_\psi^K \| Q^K) \geq 0,$$

e

$$D_{\text{KL}}(P_\psi^K \| Q^K) = 0 \iff P_\psi^K = Q^K$$

quase em toda parte.

Assim, a forma escalar publicada

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 = |\Psi|^2 D_{\text{KL}}(P \| Q)$$

tem uma interpretação precisa: a amplitude espectral só se torna ativa quando sua distribuição se afasta do fundo.

A versão operatorial não deve ser escrita apenas como medida total. Ela deve conter uma comparação com o fundo:

$$d\mu_\psi^K \quad \text{comparado com} \quad d\mu_0^K.$$

4.7 Construção positiva da ativação operatorial

Para evitar ambiguidades associadas a diferenças assinadas entre distribuições, define-se a ativação por uma densidade convexa não negativa. Seja

$$r_K(\lambda) = \frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)}$$

nos pontos em que $Q^K(\lambda) > 0$. Defina

$$F(r) = r \log r - r + 1.$$

Então

$$F(r) \geq 0$$

para $r > 0$, e

$$F(r) = 0 \iff r = 1.$$

Define-se a densidade local de ativação por

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda) = Q^K(\lambda) F\left(\frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)}\right) d\nu(\lambda).$$

Assim,

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda) \geq 0.$$

Quando

$$P_\psi^K = Q^K,$$

tem-se

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K = 0.$$

Se não se deseja uma densidade local, mas apenas um escalar global de ativação, toma-se

$$\int d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda) = D_{\text{KL}}(P_\psi^K \| Q^K),$$

pois, quando as distribuições são normalizadas,

$$\int Q^K(r \log r - r + 1) d\nu = \int P_\psi^K \log \left(\frac{P_\psi^K}{Q^K} \right) d\nu.$$

4.8 Funcional escalar de ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$

A modulação geométrica exige um escalar. Para obtê-lo da medida espectral ativa, introduz-se um peso espectral não negativo

$$a(\lambda) \geq 0.$$

Esse peso não deve ser ajustado depois dos dados. Ele deve ser fixado pelo setor físico considerado. Em aplicações, $a(\lambda)$ pode representar sensibilidade espectral da interface, janela de frequências relevantes, normalização dimensional ou peso de instabilidade. No caso mínimo, quando se deseja apenas medir afastamento global em relação ao fundo, toma-se

$$a(\lambda) = 1.$$

Define-se então

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda).$$

Na representação por densidades,

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) Q^K(\lambda) F\left(\frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)}\right) d\nu(\lambda).$$

Como

$$a(\lambda) \geq 0$$

e

$$F(r) \geq 0,$$

segue

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0.$$

Se

$$P_\psi^K = Q^K,$$

então

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0.$$

Se existe uma região espectral com

$$P_\psi^K \neq Q^K$$

e

$$a(\lambda) > 0,$$

então

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0.$$

Definição 4.3 (Ativação espectral operatorial). *A ativação espectral operatorial associada a K e à excitação ψ é o escalar*

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0.$$

Ela mede o afastamento positivo e filtrado da distribuição espectral de ψ em relação ao fundo estacionário.

4.9 Teorema de positividade e anulação no fundo

Teorema 4.1 (Positividade da ativação espectral). *Se K é auto-adjunto no regime regular, se $d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K$ é construída por uma divergência convexa em relação ao fundo estacionário, e se $a(\lambda) \geq 0$, então*

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0.$$

Além disso,

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0$$

quando a distribuição espectral da excitação coincide com a distribuição do fundo.

Demonstração. Pela construção,

$$d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda) = Q^K(\lambda) F\left(\frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)}\right) d\nu(\lambda),$$

com

$$F(r) = r \log r - r + 1.$$

Como $F(r) \geq 0$ para $r > 0$, e como $Q^K(\lambda) \geq 0$, segue

$$d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda) \geq 0.$$

Como também

$$a(\lambda) \geq 0,$$

tem-se

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda) \geq 0.$$

Se

$$P_\psi^K = Q^K,$$

então

$$r_K(\lambda) = 1$$

quase em toda parte. Como

$$F(1) = 0,$$

segue

$$d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K = 0,$$

e, portanto,

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0.$$

□

4.10 Relação com a forma escalar $|\Psi|_{\text{ativo}}^2$

A forma publicada

$$M_\Psi = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

usa uma ativação escalar. A construção atual fornece uma substituição operatorial derivada:

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

Assim,

$$M_\Psi = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

torna-se, no nível operatorial,

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi].$$

Essa passagem ainda não define completamente $G(K)$; ela prepara a sua derivação. O ponto central desta seção é que $\mathcal{A}_K[\psi]$ não foi introduzido de modo arbitrário. Ele vem da medida espectral ativa do Hessiano variacional:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_\psi^K \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

4.11 Relação com $\rho(t)$

Na FFE, a grandeza $\rho(t)$ é usada como assinatura de quebra ou ativação temporal. No presente artigo, ela não será tomada como fonte fundamental. A origem fundamental da ativação é a ação efetiva, por meio da sequência

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

A grandeza $\rho(t)$ pode então ser reinterpretada como observável derivado da ativação operatorial.

Uma definição mínima é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Se for necessário torná-la adimensional, introduz-se uma escala de ativação $\mathcal{A}_0 > 0$:

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Uma forma logarítmica regularizada é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Essas expressões deixam claro que $\rho_K(t)$ não é postulado como causa primária. Ele é um marcador temporal da ativação espectral. Se

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = 0$$

ou é constante, então

$$\rho_K(t) = 0$$

na definição derivativa simples. Portanto, fundo estacionário não produz ativação temporal.

4.12 Condições de admissibilidade de \mathcal{A}_K

Para que $\mathcal{A}_K[\psi]$ possa ser usada na definição de $G(K)$, ela deve satisfazer quatro condições.

1. Positividade.

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0.$$

2. Anulação no fundo.

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{quando} \quad P_\psi^K = Q^K.$$

3. Ativação positiva fora do fundo.

Se existe uma região espectral em que

$$P_\psi^K \neq Q^K$$

e

$$a(\lambda) > 0,$$

então

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0.$$

4. Normalização dimensional. Como $G(K)$ deve ser adimensional, o produto

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

deve ser adimensional. Isso pode ser garantido por uma escolha dimensionalmente normalizada de $a(\lambda)$, por uma escala espectral de referência, ou pela absorção da escala em $C\alpha$. Essa escolha deve ser fixada antes da aplicação experimental, para evitar ajuste posterior.

4.13 Exemplo formal: fundo estacionário e ativação por deslocamento espectral

Considere uma distribuição de fundo $Q^K(\lambda)$ e uma distribuição ativada $P_\psi^K(\lambda, t)$. Se

$$P_\psi^K(\lambda, t) = Q^K(\lambda),$$

então

$$r_K(\lambda, t) = 1,$$

$$F(r_K) = 0,$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = 0.$$

Logo,

$$G(K) = 1$$

na etapa posterior, e não há renormalização geométrica.

Se, ao contrário, a excitação desloca a distribuição espectral de modo que

$$P_\psi^K(\lambda, t) \neq Q^K(\lambda)$$

em uma região de peso $a(\lambda) > 0$, então

$$F(r_K) > 0$$

em parte do espectro, e

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) > 0.$$

Nesse caso, a ativação espectral é real no sentido operatorial. A etapa seguinte do artigo consistirá em mostrar que a resposta geométrica regular de menor ordem é

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

4.14 Ausência de cálculo circular

A construção desta seção não usa tempo próprio para definir ativação. A ordem lógica é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow E_K(\lambda) \longrightarrow d\mu_\psi^K(\lambda) \longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

Nenhum passo depende de

$$d\tau_{\text{ef}}.$$

O tempo próprio efetivo só aparecerá posteriormente, depois de definido

$$G(K).$$

Portanto, não há circularidade: a ativação é construída espectralmente antes da renormalização temporal.

4.15 Síntese da seção

Esta seção derivou a medida espectral do operador de ativação K . No regime regular,

$$K = K^\dagger,$$

e aplica-se o teorema espectral:

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para uma excitação ψ , define-se

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

A ativação física não é a medida total, mas o afastamento em relação ao fundo estacionário. Por isso, introduz-se uma distribuição de referência Q^K e uma medida ativa

$$d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K.$$

A grandeza escalar de ativação é

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0,$$

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{em regime de ativação espectral}.$$

Assim, a substituição

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi]$$

foi construída a partir da ação, via $K = \delta^2 S_{\text{eff}}$, e da medida espectral filtrada de K . A grandeza $\rho(t)$, quando utilizada, deve ser entendida como observável derivado da evolução temporal de $\mathcal{A}_K[\psi](t)$, não como fonte primitiva.

A próxima seção poderá, então, derivar a forma regular de menor ordem

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

sem ad hoc e sem cálculo circular.

5 Derivação de $G(K)$

Esta é a seção central do artigo. Nas seções anteriores, a modulação escalar publicada foi reapresentada na forma

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

e a ativação operatorial foi construída a partir do Hessiano variacional

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}$$

por meio da medida espectral ativa

$$d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda).$$

Definiu-se então o escalar positivo de ativação

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0,$$

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{em regime de ativação espectral}.$$

O objetivo agora é substituir a forma escalar

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

por uma forma operatorial derivada:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Aqui $G(K)$ será chamado de fator geométrico espectral, ganho geométrico de interface ou fator de resposta geométrica de ativação.

A derivação não parte de uma escolha arbitrária para $G(K)$. Ela parte de cinco exigências:

escalaridade, limite clássico, regularidade, expansibilidade fraca, compatibilidade com M_Ψ .	(3)
--	-----

Essas exigências fixam a forma de menor ordem de $G(K)$. O coeficiente $C\alpha$ permanece como constante efetiva de resposta da interface, isto é, como a derivada primeira da função de resposta no ponto não ativado. O seu valor numérico não é derivado apenas por argumentos de simetria; ele depende da ação microscópica ou da normalização física do setor considerado.

5.1 Da ativação escalar à ativação operatorial

A base escalar publicada usa a grandeza

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

como medida de ativação espectral. A construção operatorial substitui essa quantidade por

$$\mathcal{A}_K[\psi].$$

Assim, a passagem estrutural é

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi],$$

onde

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda).$$

Essa substituição não é uma renomeação. A grandeza $\mathcal{A}_K[\psi]$ foi construída a partir da sequência

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow dE_K(\lambda) \longrightarrow d\mu_{\psi}^K(\lambda) \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

Portanto, a ativação deixa de ser um campo escalar introduzido externamente e passa a ser um funcional espectral do operador de resposta da própria ação efetiva.

5.2 Exigência I: escalaridade

A modulação geométrica de menor ordem deve preservar o tipo tensorial da métrica efetiva. Isto é, se a resposta de ativação não introduz vetores, covetores ou tensores adicionais, a modificação efetiva mais simples da métrica deve ser conformal:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Para que essa expressão seja tensorialmente consistente, $G(K)$ deve ser escalar:

$$G(K) \in \mathbb{R}.$$

Como K é um operador, o escalar não pode ser o operador bruto K . Ele deve ser extraído de K por meio de um funcional espectral. A seção anterior construiu exatamente esse escalar:

$$\mathcal{A}_K[\psi].$$

Logo, no nível efetivo considerado, $G(K)$ deve ser entendido como uma função escalar de $\mathcal{A}_K[\psi]$:

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

onde \mathcal{G} é uma função real regular no regime de ativação fraca.

Assim, a notação $G(K)$ é uma abreviação para

$$G(K) := \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]).$$

Essa distinção evita tratar $G(K)$ como função arbitrária do operador inteiro. O que entra na geometria efetiva é o escalar espectral ativo extraído de K .

5.3 Exigência II: recuperação do limite clássico

O fundo estacionário deve recuperar a geometria não ativada. Como a ativação foi construída para satisfazer

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário,}$$

exige-se

$$G(K) = 1 \quad \text{quando} \quad \mathcal{A}_K[\psi] = 0.$$

Em termos da função \mathcal{G} ,

$$\mathcal{G}(0) = 1.$$

Essa condição é obrigatória. Sem ela, a teoria produziria modulação geométrica mesmo na ausência de ativação espectral, contrariando o papel de filtragem introduzido pela passagem

$$|\Psi|^2 \longrightarrow |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

e pela sua versão operatorial

$$d\mu_{\psi}^K \longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K.$$

5.4 Exigência III: regularidade geométrica

A métrica efetiva é tomada como

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Para que essa métrica seja não degenerada e preserve assinatura lorentziana por transformação conformal positiva, é necessário

$$0 < G(K) < \infty.$$

No regime considerado pela série, a ativação espectral reduz o fator geométrico efetivo em relação ao valor clássico, de modo análogo à forma publicada

$$M_\Psi = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Portanto, adota-se o domínio físico

$$0 < G(K) \leq 1.$$

A desigualdade

$$G(K) > 0$$

impede degeneração da métrica. A desigualdade

$$G(K) \leq 1$$

expressa a escolha de setor na qual a ativação aumenta o fator temporal efetivo

$$G(K)^{-1/2}.$$

Essa escolha não é uma imposição algébrica universal; ela corresponde ao ramo físico já selecionado pela forma escalar M_Ψ em [1].

5.5 Exigência IV: expansão em regime de ativação fraca

No regime de ativação espectral fraca,

$$\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

ou, mais precisamente,

$$C\alpha \mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

exige-se que \mathcal{G} seja diferenciável em torno de zero. Assim,

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + \frac{1}{2}\mathcal{G}''(0)\mathcal{A}_K^2 + O(\mathcal{A}_K^3).$$

Como

$$\mathcal{G}(0) = 1,$$

temos

$$G(K) = 1 + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Para compatibilidade com a forma escalar publicada, escrevemos

$$\mathcal{G}'(0) = -C\alpha.$$

Portanto,

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

O coeficiente

$$C\alpha$$

não é escolhido para ajustar a conclusão. Ele é a inclinação da resposta geométrica no ponto não ativado:

$$C\alpha = - \left. \frac{d\mathcal{G}}{d\mathcal{A}_K} \right|_{\mathcal{A}_K=0}.$$

Assim, $C\alpha$ tem significado variacional-efetivo: mede a sensibilidade de primeira ordem da geometria efetiva diante da ativação espectral extraída de K .

5.6 Forma de menor ordem de $G(K)$

No truncamento de menor ordem, desprezando termos quadráticos e superiores em \mathcal{A}_K , obtém-se

$$\boxed{G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi].}$$

Essa é a forma operatorial correspondente a

$$M_\Psi = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Portanto,

$$\boxed{M_\Psi \longrightarrow G(K).}$$

De modo explícito,

$$M_\Psi = 1 - C\alpha |\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

é substituído por

$$G(K) = 1 - C\alpha \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda).$$

Ou, na representação por distribuições espectrais,

$$G(K) = 1 - C\alpha \int_{\sigma(K)} a(\lambda) Q^K(\lambda) F\left(\frac{P_\psi^K(\lambda)}{Q^K(\lambda)}\right) d\nu(\lambda),$$

com

$$F(r) = r \log r - r + 1.$$

Essa forma deixa explícito que $G(K)$ é determinado por três objetos:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}},$$

$$Q^K,$$

e

$$P_\psi^K.$$

Logo, a resposta geométrica não é adicionada posteriormente. Ela é construída a partir da ação, do espectro do operador de resposta e da diferença entre a excitação e o fundo estacionário.

5.7 Teorema de derivação de $G(K)$

Teorema 5.1 (Derivação PAF do fator geométrico espectral). *Seja $K = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}$ o Hessiano variacional de uma ação efetiva em torno de uma configuração admissível \mathcal{C} . Suponha que, no regime regular, K seja auto-adjunto e possua medida espectral ativa $d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K$. Seja*

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda)$$

um escalar não negativo, nulo no fundo estacionário. Se a resposta geométrica efetiva é escalar, regular, recupera o limite clássico em $\mathcal{A}_K = 0$ e é expansível em regime fraco, então a forma universal de primeira ordem é

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2),$$

onde

$$C\alpha = -G'(0).$$

No truncamento de menor ordem,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Demonstração. Como a resposta geométrica de menor ordem não introduz índices livres, ela deve ser escalar:

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K).$$

A recuperação do limite clássico impõe

$$\mathcal{A}_K = 0 \implies \mathcal{G}(0) = 1.$$

A regularidade no regime fraco permite expandir:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Substituindo $\mathcal{G}(0) = 1$, obtém-se

$$G(K) = 1 + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Definindo

$$C\alpha = -\mathcal{G}'(0),$$

segue

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

No truncamento de primeira ordem:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K.$$

□

5.8 Domínio de validade

A forma

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K$$

é válida no regime em que

$$C\alpha\mathcal{A}_K \ll 1$$

ou, de modo mais geral, no domínio em que o truncamento de primeira ordem é suficiente.

Além disso, exige-se

$$0 < G(K) \leq 1.$$

No truncamento linear, isso significa

$$0 < 1 - C\alpha\mathcal{A}_K \leq 1.$$

Se

$$C\alpha > 0$$

e

$$\mathcal{A}_K \geq 0,$$

a segunda desigualdade é automática:

$$1 - C\alpha\mathcal{A}_K \leq 1.$$

A primeira exige

$$C\alpha\mathcal{A}_K < 1.$$

Portanto, o domínio regular linear é

$$\boxed{0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K < 1.}$$

Quando a ativação se aproxima do limite

$$C\alpha\mathcal{A}_K \rightarrow 1,$$

a aproximação linear deixa de ser confiável e a resposta completa

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K)$$

deve ser usada. Uma escolha regular não linear, caso seja necessária em trabalho posterior, deve preservar

$$\mathcal{G}(0) = 1, \quad \mathcal{G}(\mathcal{A}_K) > 0.$$

Exemplos possíveis seriam funções exponenciais ou racionais, mas tais escolhas não serão introduzidas neste artigo para evitar fenomenologia não derivada.

5.9 Métrica efetiva induzida por $G(K)$

Uma vez obtido o fator geométrico espectral, define-se a métrica efetiva por

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Com a forma de menor ordem,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = \frac{1}{1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]} g_{\mu\nu}.$$

O intervalo efetivo é

$$ds_{\text{ef}}^2 = g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^\mu dx^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Logo,

$$ds_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1} ds^2.$$

Para curvas tipo-tempo,

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2,$$

e

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{c^2} ds_{\text{ef}}^2.$$

Assim,

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1} d\tau^2.$$

Como $G(K) > 0$, segue

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Substituindo a forma linear de $G(K)$,

$$d\tau_{\text{ef}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}}.$$

5.10 Expansão perturbativa do tempo próprio efetivo

No regime

$$C\alpha\mathcal{A}_K \ll 1,$$

temos

$$G(K)^{-1/2} = (1 - C\alpha\mathcal{A}_K)^{-1/2}.$$

Usando a expansão binomial,

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3),$$

com

$$x = C\alpha\mathcal{A}_K,$$

obtemos

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2} C\alpha\mathcal{A}_K + \frac{3}{8} C^2 \alpha^2 \mathcal{A}_K^2 + O(\mathcal{A}_K^3) \right] d\tau.$$

Em primeira ordem,

$$d\tau_{\text{ef}} \approx \left[1 + \frac{1}{2} C\alpha\mathcal{A}_K \right] d\tau.$$

Portanto,

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K.$$

Essa expressão mostra que a ativação espectral aumenta o tempo próprio efetivo no ramo escolhido. Contudo, esse aumento é multiplicativo. Ele não representa soma de um segundo tempo fundamental.

5.11 Preservação da classe causal

A transformação

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}$$

é conformal positiva quando

$$G(K) > 0.$$

Portanto, ela preserva cones nulos. Se v^μ é vetor nulo em relação à métrica de fundo, então

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0.$$

Na métrica efetiva:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}}v^\mu v^\nu = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 0.$$

Logo, vetores nulos continuam nulos.

Essa observação é indispensável para a aplicação a circuitos. Se uma onda progressiva TEM ideal possui

$$d\tau_\ell = 0,$$

então

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = G(K_\ell)^{-1/2}d\tau_\ell = 0.$$

Portanto, $G(K)$ não transforma uma excitação nula em tipo-tempo. Ele renormaliza apenas tempos próprios já admissíveis, isto é, aqueles associados a configurações com

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

5.12 Forma combinada para circuitos

Para uma excitação circuital com critério energia-causal

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2},$$

o tempo próprio efetivo de base é

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

A ativação espectral renormaliza esse tempo próprio por

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2}d\tau_{\text{circ}}.$$

Logo,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = dt \frac{1}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}[\psi]}} \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa é a forma combinada entre o critério energia-causal de [2] e a renormalização espectral derivada nesta seção.

Para uma linha de transmissão sem perdas,

$$d\tau_{\ell} = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Portanto,

$$d\tau_{\ell}^{\text{ef}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_{K_{\ell}}[\psi]}} \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Essa expressão é admissível somente quando

$$C'V^2 \neq L'I^2$$

e

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_{K_{\ell}}[\psi] < 1.$$

Se

$$C'V^2 = L'I^2,$$

então

$$d\tau_{\ell} = 0,$$

e a renormalização espectral não altera esse fato:

$$d\tau_{\ell}^{\text{ef}} = 0.$$

5.13 Relação com $\rho(t)$

Com $G(K)$ derivado, a grandeza $\rho(t)$ pode ser posicionada corretamente. Ela não entra como causa primária de $G(K)$. A causa variacional é

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K.$$

A grandeza $\rho(t)$ pode ser definida como observável de variação temporal da ativação:

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K(t),$$

ou, em forma adimensional,

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K(t).$$

Uma versão regularizada é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K(t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Assim,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

indica variação temporal da ativação espectral. Porém, isso não implica automaticamente tempo próprio efetivo. Para circuitos, ainda é necessário

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Para geometria efetiva, ainda é necessário

$$0 < G(K) \leq 1.$$

Portanto,

$$\rho_K(t) \neq 0 \not\Rightarrow d\tau_{\text{ef}} > 0$$

sem as condições causais e geométricas correspondentes.

5.14 Ausência de ad hoc

A construção de $G(K)$ não introduz uma função arbitrária. A sequência é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K).$$

A forma de primeira ordem de $G(K)$ é fixada por regularidade e limite clássico:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

O coeficiente $C\alpha$ não é uma função livre. Ele é a inclinação da resposta geométrica no ponto sem ativação:

$$C\alpha = -G'(0).$$

O valor numérico de $C\alpha$ depende do setor físico e deve ser fixado por uma ação microscópica, por normalização de interface ou por calibração experimental independente. Ele não pode ser escolhido depois para forçar um resultado temporal.

5.15 Ausência de cálculo circular

A construção também não é circular. O tempo próprio efetivo não é usado para definir \mathcal{A}_K , nem para definir $G(K)$. A ordem lógica é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

O tempo próprio aparece apenas no último passo:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Logo, a ativação espectral é construída antes da temporalidade efetiva.

5.16 Síntese da seção

A forma escalar publicada

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

foi substituída por uma forma operatorial derivada:

$$\boxed{G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2)}.$$

No truncamento de menor ordem,

$$\boxed{G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].}$$

A grandeza $\mathcal{A}_K[\psi]$ vem da medida espectral ativa do operador

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

Assim,

$$\boxed{M_\Psi \longrightarrow G(K).}$$

A métrica efetiva é

$$\boxed{g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.}$$

Logo,

$$\boxed{d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.}$$

Para circuitos, combinando a ativação espectral com o critério energia-causal,

$$\boxed{d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.}$$

Essa fórmula só é física quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0$$

e

$$0 < G(K_{\text{circ}}) \leq 1.$$

Portanto, $G(K)$ renormaliza o tempo próprio efetivo de excitações tipo-tempo; ele não cria tempo próprio para excitações nulas.

6 Teorema PAF de renormalização por $G(K)$

As seções anteriores estabeleceram a cadeia derivativa necessária para substituir o fator escalar

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2$$

por uma forma operatorial controlada,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Nesta seção, reunimos os resultados em um único teorema de renormalização. A finalidade é fixar a ordem lógica da construção e impedir duas interpretações incorretas:

1. interpretar $G(K)$ como função fenomenológica livre;
2. interpretar a ativação espectral como um segundo tempo independente.

No formalismo PAF, a ordem correta é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_\psi^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

Assim, o tempo próprio efetivo é consequência final da geometria efetiva, não ingrediente usado para definir a ativação.

6.1 Hipóteses do teorema

Seja \mathcal{C} uma configuração física admissível de uma interface eletromagnética, circuital ou geométrica. Assume-se que ela é descrita por uma ação efetiva

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}}.$$

A fase efetiva PAF é

$$\phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar}.$$

A configuração \mathcal{C} satisfaz a condição variacional

$$\delta S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}} = 0.$$

O operador de ativação é o Hessiano variacional da ação efetiva:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}|_{\mathcal{C}}.$$

No regime regular, assume-se

$$K = K^\dagger,$$

de modo que existe uma resolução espectral

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para uma excitação admissível ψ , define-se a medida espectral

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

A parte ativa da medida é obtida por comparação com um fundo estacionário:

$$d\mu_\psi^K \longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K.$$

Dessa medida ativa define-se o funcional escalar de ativação

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0.$$

Exige-se:

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0,$$

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{em regime de ativação espectral}.$$

6.2 Enunciado do teorema

Teorema 6.1 (Renormalização PAF do tempo próprio por ativação espectral). *Se a resposta efetiva de uma interface é governada por um operador de ativação*

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}},$$

e se a ativação espectral filtrada é descrita por um funcional escalar não negativo

$$\mathcal{A}_K[\psi],$$

então a resposta geométrica regular de menor ordem é

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

No truncamento linear,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Quando

$$0 < G(K) \leq 1,$$

a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}$$

define o tempo próprio efetivo

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau.$$

6.3 Demonstração

Demonstração. A demonstração segue cinco passos.

1. Origem variacional de K . Como a configuração \mathcal{C} satisfaz

$$\delta S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}} = 0,$$

a expansão da ação em torno de \mathcal{C} tem a forma

$$S_{\text{eff}}[\mathcal{C} + \eta] = S_{\text{eff}}[\mathcal{C}] + \frac{1}{2}\delta^2 S_{\text{eff}}[\mathcal{C}; \eta, \eta] + O(\eta^3).$$

A forma quadrática define o Hessiano variacional:

$$\delta^2 S_{\text{eff}}[\mathcal{C}; \eta, \eta] = \langle \eta, K\eta \rangle.$$

Logo,

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Portanto, K vem da ação; não é parâmetro fenomenológico.

2. Medida espectral de K . No regime regular,

$$K = K^\dagger.$$

Pelo teorema espectral,

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para a excitação ψ , define-se

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

Essa medida descreve a projeção espectral da excitação sobre os modos do operador de resposta.

3. Filtragem ativa. A medida espectral total não deve ser identificada com ativação física, pois o fundo estacionário pode possuir espectro não nulo. Por isso, compara-se a distribuição instantânea com uma distribuição de referência Q^K . A parte ativa é construída de modo que

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K = 0$$

quando a distribuição espectral da excitação coincide com o fundo.

Define-se então

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0.$$

Assim,

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0.$$

Além disso,

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0$$

no fundo estacionário e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0$$

quando há ativação espectral efetiva.

4. Resposta geométrica regular de menor ordem. A resposta geométrica de menor ordem não deve introduzir índices livres. Logo, ela deve ser escalar:

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]).$$

A recuperação do limite clássico exige

$$\mathcal{G}(0) = 1.$$

A regularidade em regime fraco permite expandir:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Usando

$$\mathcal{G}(0) = 1,$$

tem-se

$$G(K) = 1 + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Define-se

$$C\alpha := -\mathcal{G}'(0).$$

Portanto,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

No truncamento linear:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K.$$

5. Métrica efetiva e tempo próprio. Quando

$$0 < G(K) \leq 1,$$

define-se a métrica efetiva conformal

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

O intervalo efetivo é

$$ds_{\text{ef}}^2 = g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^\mu dx^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Logo,

$$ds_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1} ds^2.$$

Para curvas tipo-tempo,

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$

e

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{c^2} ds_{\text{ef}}^2.$$

Portanto,

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1} d\tau^2.$$

Como

$$G(K) > 0,$$

segue

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

□

6.4 Forma explícita do teorema

Substituindo a expressão linear de $G(K)$, obtém-se

$$d\tau_{\text{ef}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}}.$$

Assim, a renormalização temporal efetiva é

$$\boxed{d\tau_{\text{ef}} = (1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi])^{-1/2} d\tau.}$$

No regime fraco,

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

a expansão binomial fornece

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2} C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + \frac{3}{8} C^2\alpha^2\mathcal{A}_K^2[\psi] + O(\mathcal{A}_K^3) \right] d\tau.$$

Em primeira ordem:

$$d\tau_{\text{ef}} \approx \left[1 + \frac{1}{2} C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \right] d\tau.$$

Portanto,

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2} C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

6.5 Relação com a formulação escalar publicada

A formulação escalar publicada usa

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

O resultado desta seção mostra que a forma operatorial correspondente é

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Portanto,

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi],$$

e

$$M_{\Psi} \longrightarrow G(K).$$

Essa substituição é derivada porque

$$\mathcal{A}_K[\psi]$$

vem da medida espectral ativa de

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

Assim, $G(K)$ é a versão operatorial do fator escalar de renormalização, mas com origem variacional explícita.

6.6 Forma circuital do teorema

Para circuitos elétricos e eletrônicos, o tempo próprio efetivo de base é obtido do critério energia-causal:

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

define-se

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

A renormalização espectral por $G(K_{\text{circ}})$ fornece

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

Logo,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = dt \frac{1}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}[\psi]}} \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa expressão é válida quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0$$

e

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}[\psi] < 1.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{circ}} = 0$$

e, portanto,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = 0.$$

Assim, $G(K)$ não cria tempo próprio em excitações nulas; ele renormaliza o tempo próprio de excitações já tipo-tempo.

6.7 Linha de transmissão sem perdas

Para uma linha de transmissão sem perdas,

$$u_\ell = \frac{1}{2}C'V^2 + \frac{1}{2}L'I^2,$$

$$P_\ell = VI,$$

e

$$c_\ell = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}.$$

O critério energia-causal fornece

$$d\tau_\ell = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

A forma renormalizada por ativação espectral é

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_{K_\ell}[\psi]}} \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Essa expressão mostra a separação entre dois efeitos:

$$\frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}$$

mede a classe energia-causal da excitação circuital, enquanto

$$(1 - C\alpha\mathcal{A}_{K_\ell}[\psi])^{-1/2}$$

mede a renormalização espectral da métrica efetiva.

Para uma onda progressiva TEM ideal,

$$C'V^2 = L'I^2.$$

Então

$$d\tau_\ell = 0.$$

Mesmo que

$$\mathcal{A}_{K_\ell}[\psi] > 0,$$

a forma conformal positiva dá

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = 0.$$

Logo, a ativação espectral não transforma uma propagação nula ideal em tipo-tempo.

6.8 Papel de $\rho(t)$ após o teorema

Depois do teorema, $\rho(t)$ pode ser localizado sem ambiguidade. A grandeza primária não é

$$\rho(t),$$

mas

$$\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Uma forma derivada para a assinatura temporal de ativação é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

ou, com normalização,

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Também se pode usar a forma regularizada

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Assim,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

significa que a ativação espectral está variando no tempo. Isso pode indicar quebra temporal operacional, transiente, modulação ou mudança de regime. Mas não implica, por si só,

$$d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

A existência de tempo próprio efetivo ainda exige:

$$\Delta_{\text{circ}} > 0$$

no setor circuital, ou uma curva tipo-tempo em uma métrica efetiva admissível no setor geométrico.

6.9 Não aditividade temporal

O teorema também reforça a tese de segurança:

$$\tau_{\text{total}} \neq \tau_{\text{padrao}} + \tau_{\text{espectral}}$$

em geral.

A contribuição espectral aparece multiplicativamente:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

No regime fraco, pode-se escrever formalmente

$$d\tau_{\text{ef}} \approx d\tau + \frac{1}{2} C \alpha \mathcal{A}_K d\tau.$$

Mas o segundo termo não é um novo tempo independente. Ele é apenas o primeiro termo da expansão perturbativa da renormalização multiplicativa.

Portanto, a estrutura correta é:

ativação espectral \longrightarrow fator geométrico \longrightarrow renormalização do tempo próprio,

e não:

tempo padrão + tempo espectral.

6.10 Condições de falsificabilidade

O teorema produz condições diretamente verificáveis.

1. Fundo estacionário. Se

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0,$$

então

$$G(K) = 1$$

e

$$d\tau_{\text{ef}} = d\tau.$$

2. Ativação fraca. Se

$$0 < C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

então

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

3. Excitação nula. Se a excitação de base satisfaz

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

4. Excitação circuital tipo-tempo. Se

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

então

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

5. Regime inválido. Se

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \geq 1,$$

a forma linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K$$

deixa de ser admissível, pois pode tornar a métrica degenerada ou mudar a assinatura. Nesse caso, é necessário substituir a aproximação linear pela resposta não linear completa

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K),$$

derivada de uma ação efetiva mais completa.

6.11 Síntese da seção

O teorema PAF de renormalização estabelece que:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}$$

é o operador variacional de ativação;

$$K = \int \lambda dE_K(\lambda)$$

define a medida espectral;

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda)$$

define a ativação espectral filtrada;

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

é a resposta geométrica regular de menor ordem;

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}$$

é a métrica efetiva;

e

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau$$

é o tempo próprio efetivo renormalizado.

Para circuitos:

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2}dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

com

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Essa formulação preserva a série limpa: não há $G(K)$ ad hoc, não há $\rho(t)$ como fonte primitiva, não há soma de tempos, e não há transformação conformal positiva capaz de converter uma excitação nula em tipo-tempo.

7 Advertência essencial: $G(K)$ não muda sozinho a classe causal

A derivação anterior estabeleceu que a ativação espectral regular de uma interface pode ser representada, no regime de menor ordem, pelo fator geométrico

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

com domínio físico

$$0 < G(K) \leq 1.$$

A métrica efetiva associada é

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu},$$

e, para curvas tipo-tempo,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau.$$

Esta seção fixa uma advertência indispensável para evitar uma interpretação indevida da teoria: a modulação $G(K)$ não transforma, por si só, uma propagação nula em propagação tipo-tempo. Ela renormaliza intervalos temporais já admissíveis. Em particular, uma onda progressiva TEM ideal continua sendo nula, mesmo na presença de uma renormalização conformal positiva.

7.1 Transformação conformal positiva

A métrica efetiva foi definida por

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Como o domínio regular exige

$$G(K) > 0,$$

essa transformação é uma transformação conformal positiva. Assim, para qualquer vetor v^μ ,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu.$$

Se v^μ é tipo-tempo em relação a $g_{\mu\nu}$, isto é,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0,$$

então

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0.$$

Logo, ele continua tipo-tempo.

Se v^μ é nulo em relação a $g_{\mu\nu}$, isto é,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0,$$

então

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0.$$

Logo, ele continua nulo.

Se v^μ é espaço-like,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0,$$

então

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu > 0.$$

Logo, ele continua espaço-like.

Portanto, $G(K)$, enquanto fator conformal positivo, preserva a classe causal.

Proposição 7.1 (Preservação da classe causal). *Se*

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad G(K) > 0,$$

então, para qualquer vetor v^μ ,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = 0.$$

Além disso, vetores tipo-tempo permanecem tipo-tempo e vetores espaço-like permanecem espaço-like.

Demonstração. Substituindo a definição da métrica efetiva,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu.$$

Como

$$G(K) > 0,$$

a multiplicação por $G(K)^{-1}$ não altera o sinal da forma quadrática

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu.$$

Logo, o sinal causal é preservado. □

7.2 Consequência para tempo próprio efetivo

Para curvas tipo-tempo, o tempo próprio padrão satisfaz

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Na métrica efetiva,

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu}^{\text{ef}} dx^\mu dx^\nu.$$

Como

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu},$$

segue

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1} d\tau^2.$$

Portanto,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Se a curva ou excitação de base é nula, então

$$d\tau = 0.$$

Logo,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} \cdot 0 = 0.$$

Assim, a modulação espectral por $G(K)$ não cria tempo próprio a partir de um setor nulo.

Corolário 7.1 (Nulidade preservada). *Se uma excitação satisfaz*

$$d\tau = 0,$$

então, sob a transformação conformal positiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad G(K) > 0,$$

tem-se

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

7.3 Interpretação física

A consequência física é direta:

a modulação $G(K)$ renormaliza intervalos temporais já tipo-tempo,

mas

não transforma uma propagação nula ideal em tipo-tempo por si só.

Essa advertência é necessária porque a forma

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau$$

poderia ser lida incorretamente como se qualquer ativação espectral produzisse tempo próprio efetivo. Isso não é verdadeiro. Se

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Portanto, o papel de $G(K)$ não é mudar a classe causal. Seu papel é renormalizar a escala temporal de uma configuração cuja classe causal já foi previamente determinada.

7.4 Separação entre classificação causal e renormalização espectral

A construção completa possui duas etapas independentes.

A primeira etapa é a classificação causal da excitação. Para circuitos, essa etapa é feita pelo discriminante energia-causal

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} = 0,$$

a excitação é nula efetiva e

$$d\tau_{\text{circ}} = 0.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

a excitação é tipo-tempo efetiva e

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa etapa pertence ao critério energia-causal de circuitos e campos efetivos [2].

A segunda etapa é a renormalização espectral. Se existe ativação espectral regular, então

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

com

$$0 < G(K) \leq 1.$$

Nesse caso,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

Assim, a ordem correta é:

$$\Delta_{\text{circ}} \longrightarrow d\tau_{\text{circ}} \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}}.$$

Não se deve inverter essa ordem. Em particular, $G(K)$ não substitui o critério $\Delta_{\text{circ}} > 0$.

7.5 Onda progressiva TEM ideal

Em engenharia elétrica, o caso mais importante para essa advertência é a onda progressiva TEM ideal em uma linha de transmissão sem perdas. Para uma linha com parâmetros distribuídos L' e C' , tem-se

$$c_\ell = \frac{1}{\sqrt{L'C'}},$$

$$u_\ell = \frac{1}{2}C'V^2 + \frac{1}{2}L'I^2,$$

e

$$P_\ell = VI.$$

O tempo próprio circuital de base é

$$d\tau_\ell = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Para uma onda progressiva TEM ideal,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}},$$

e

$$I = \frac{V}{Z_0}.$$

Logo,

$$L'I^2 = L' \frac{V^2}{Z_0^2} = L' \frac{V^2}{L'/C'} = C'V^2.$$

Portanto,

$$C'V^2 - L'I^2 = 0,$$

e

$$d\tau_\ell = 0.$$

Mesmo com ativação espectral regular,

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = G(K_\ell)^{-1/2} d\tau_\ell.$$

Como

$$d\tau_\ell = 0,$$

segue

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = 0.$$

Assim,

onda progressiva TEM ideal continua nula.

7.6 Quando o tempo próprio circuital pode ser não nulo

Para haver tempo próprio efetivo não nulo, é necessário que a excitação circuital tenha

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

No caso da linha sem perdas, isso equivale a

$$C'V^2 \neq L'I^2.$$

Então

$$d\tau_\ell = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2} > 0.$$

Somente depois dessa classificação é legítimo aplicar a renormalização espectral:

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = G(K_\ell)^{-1/2} dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Exemplos de configurações que podem satisfazer

$$\Delta_{\text{circ}} > 0$$

incluem:

ondas estacionárias,

ressonadores,

cavidades,

linhas com reflexão,

modos próximos ao corte,

circuitos com energia armazenada dominante.

Nesses casos, a excitação de base já possui estrutura tipo-tempo efetiva. A ativação espectral por $G(K)$ apenas renormaliza esse tempo próprio.

7.7 Forma geral da advertência

O resultado desta seção pode ser condensado na seguinte cadeia:

$$G(K) > 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} \text{ é conformal positiva.}$$

Logo,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = 0.$$

Portanto,

$$d\tau = 0 \implies d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Assim:

$G(K) \neq \text{mecanismo de conversão causal.}$

Ele é:

$G(K) = \text{mecanismo de renormalização temporal em setor já tipo-tempo.}$

7.8 Diferença entre conversão causal e renormalização temporal

Convém distinguir explicitamente dois tipos de mecanismo.

Conversão causal. Uma conversão causal ocorre quando a configuração física passa de

$$\Delta = 0$$

para

$$\Delta > 0.$$

Em circuitos, isso exige mudança na relação entre energia armazenada e fluxo:

$$u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2} > 0.$$

Esse processo não é produzido por uma transformação conformal positiva. Ele depende da estrutura energética da configuração.

Renormalização temporal. Uma renormalização temporal ocorre quando a configuração já possui

$$d\tau > 0$$

e a métrica efetiva reescala esse intervalo:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Esse é o papel de $G(K)$.

Portanto, a formulação correta é:

primeiro classe causal, depois renormalização espectral.

7.9 Conexão com a base publicada

A distinção estabelecida aqui é compatível com a formulação escalar publicada em [1], na qual a ativação espectral aparece como fator geométrico efetivo

$$M_{\Psi} = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

Ali, a contribuição espectral não é um segundo tempo independente; ela modula a métrica efetiva:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = M_{\Psi}^{-1} g_{\mu\nu}.$$

A presente formulação apenas substitui

$$M_{\Psi}$$

pela versão operatorial derivada

$$G(K),$$

sem alterar a propriedade essencial: quando o fator é positivo, a transformação é conformal positiva e preserva a classe causal.

7.10 Síntese da seção

Esta seção estabeleceu uma advertência indispensável:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad G(K) > 0,$$

é uma transformação conformal positiva. Portanto,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = 0.$$

Logo,

$$\boxed{G(K) \text{ não muda sozinho a classe causal.}}$$

Ele renormaliza intervalos temporais já tipo-tempo:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau,$$

mas, se

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Em engenharia:

$$\boxed{\text{onda progressiva TEM ideal continua nula.}}$$

Para haver tempo próprio efetivo não nulo, é necessário primeiro que a excitação circuital tenha

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Depois, se houver ativação espectral regular, aplica-se

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

Essa ordem preserva a consistência da série: $G(K)$ não é ad hoc, não há soma de tempos, não há criação artificial de temporalidade em setor nulo e a modulação espectral só atua depois da classificação energia-causal.

8 Domínio de validade e limites formais

A derivação do fator geométrico espectral

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

foi obtida como resposta regular de menor ordem a partir da ativação espectral filtrada do operador

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Essa forma não deve ser interpretada como identidade global válida para toda intensidade de ativação, todo regime dissipativo ou toda configuração não linear. Ela é a aproximação linear controlada de uma resposta geométrica mais geral

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

em torno do fundo não ativado.

O objetivo desta seção é fixar o domínio formal em que a construção é válida. Isso é necessário para evitar dois erros: usar $G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K$ fora do regime em que foi derivado, ou interpretar a perda de regularidade de $G(K)$ como novo efeito físico automático. No formalismo PAF, perda de validade da aproximação significa apenas que a ação efetiva ou a função de resposta geométrica precisa ser refinada.

8.1 Hipótese de regularidade espectral

A primeira condição é espectral. Como K foi definido por

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}},$$

a construção da medida espectral exige que, no regime regular,

$$K = K^\dagger,$$

ou que K possua uma extensão auto-adjunta fisicamente admissível no espaço de perturbações considerado. Sob essa condição, aplica-se o teorema espectral:

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para uma excitação ψ , define-se então

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

Essa hipótese não é decorativa. Sem auto-adjunticidade, ou sem uma extensão auto-adjunta adequada, a medida

$$d\mu_\psi^K$$

pode deixar de ser uma medida espectral real positiva. Nesse caso, a ativação

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda)$$

não está definida nos termos usados neste artigo.

Proposição 8.1 (Condição espectral mínima). *A derivação de $G(K)$ na forma*

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

pressupõe que K seja auto-adjunto, ou admita uma extensão auto-adjunta admissível, de modo que exista uma medida espectral real

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

Demonstração. A ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$ foi definida como funcional positivo da medida espectral ativa de K . Essa medida, por sua vez, foi definida por meio da resolução espectral

$$E_K(\lambda).$$

A existência de uma resolução espectral projetiva real é garantida pelo teorema espectral para operadores auto-adjuntos. Portanto, sem auto-adjunticidade, ou sem extensão auto-adjunta fisicamente selecionada, a construção usada para $\mathcal{A}_K[\psi]$ não está garantida. \square

8.2 Sistemas dissipativos, abertos e não auto-adjuntos

Circuitos reais podem conter perdas, ganho, portas externas, elementos ativos, histerese, ruído, acoplamento térmico ou dependência temporal explícita. Nesses casos, o operador linearizado pode não ser auto-adjunto:

$$K \neq K^\dagger.$$

A forma derivada neste artigo não deve ser aplicada diretamente a esse caso sem uma regularização variacional.

Há três estratégias admissíveis:

1. construir uma ação efetiva ampliada, incluindo reservatórios ou graus de liberdade auxiliares, de modo que o operador total seja auto-adjunto;
2. trabalhar com um operador positivo associado, por exemplo

$$K^\dagger K,$$

quando o objetivo for medir intensidade espectral de ativação;

3. usar uma dilatação auto-adjunta ou formulação duplicada de variáveis para sistemas dissipativos.

Nesses casos, a notação K deve ser substituída pelo operador regularizado apropriado:

$$K \longrightarrow K_{\text{reg}}.$$

A cadeia passa a ser

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K_{\text{reg}} \longrightarrow d\mu_\psi^{K_{\text{reg}}} \longrightarrow \mathcal{A}_{K_{\text{reg}}}[\psi] \longrightarrow G(K_{\text{reg}}).$$

Sem esse passo, a aplicação de $G(K)$ a sistemas abertos seria fenomenológica e não derivada.

8.3 Regime de ativação fraca ou moderada

A forma linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

foi obtida pela expansão

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2),$$

com

$$\mathcal{G}(0) = 1, \quad \mathcal{G}'(0) = -C\alpha.$$

Portanto, a forma linear é rigorosamente uma aproximação de primeira ordem:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Para uso perturbativo, exige-se

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1.$$

Nesse regime,

$$G(K)^{-1/2} = (1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi])^{-1/2}$$

admite a expansão

$$G(K)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Logo,

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2) \right] d\tau.$$

Para uso não perturbativo, mas ainda dentro da forma linear, é necessário ao menos

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

Essa condição garante

$$G(K) > 0.$$

Proposição 8.2 (Domínio linear regular). *A forma*

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

define uma métrica efetiva não degenerada somente se

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

Demonstração. A métrica efetiva é

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Para que essa métrica seja não degenerada e preserve assinatura por transformação conformal positiva, é necessário

$$G(K) > 0.$$

Como

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

segue

$$1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] > 0,$$

ou seja,

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

Como a ativação foi construída para satisfazer

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0,$$

e considera-se o ramo $C\alpha \geq 0$, obtém-se

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

□

8.4 Preservação de assinatura e classe causal

Quando

$$0 < G(K) < \infty,$$

a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}$$

é conformalmente relacionada à métrica de fundo por um fator positivo. Portanto, a assinatura lorentziana é preservada.

Para qualquer vetor v^μ ,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = G(K)^{-1} g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu.$$

Como

$$G(K)^{-1} > 0,$$

o sinal de

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

não se altera. Assim:

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = 0,$$

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu < 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu < 0,$$

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu > 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu > 0.$$

Portanto, $G(K)$ não muda sozinho a classe causal. Ele apenas reescala intervalos já classificados.

Essa propriedade conecta esta seção à advertência essencial estabelecida anteriormente: uma onda progressiva TEM ideal continua nula, mesmo quando existe ativação espectral regular.

8.5 Limite de falha da aproximação linear

Quando

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \geq 1,$$

a expressão linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

torna-se inadmissível, pois produz

$$G(K) \leq 0.$$

Se

$$G(K) = 0,$$

a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}$$

fica singular. Se

$$G(K) < 0,$$

a transformação deixa de ser conformal positiva e pode alterar a assinatura efetiva. Nenhuma dessas situações está coberta pela derivação linear deste artigo.

Nesse regime, a resposta deve ser escrita como

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

com as condições mínimas

$$\mathcal{G}(0) = 1,$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) > 0,$$

e, no regime fraco,

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

A função \mathcal{G} completa não deve ser escolhida por conveniência. Ela deve vir de uma ação efetiva mais detalhada ou de um modelo microscópico do setor espectral.

8.6 Condição sobre o coeficiente $C\alpha$

O coeficiente $C\alpha$ foi definido como a inclinação da resposta geométrica no ponto não ativado:

$$C\alpha = - \left. \frac{d\mathcal{G}}{d\mathcal{A}_K} \right|_{\mathcal{A}_K=0}.$$

Portanto, $C\alpha$ não é uma constante universal imposta pela matemática do teorema. Ele é um coeficiente efetivo de resposta da interface.

Para evitar ad hoc, seu valor deve ser determinado por um dos seguintes meios:

1. derivação a partir de uma ação microscópica específica;
2. normalização física independente do setor considerado;
3. calibração experimental feita antes da aplicação preditiva.

Não é admissível escolher $C\alpha$ posteriormente para forçar a concordância com um tempo próprio desejado. Nesse caso, a construção deixaria de ser derivativa e passaria a ser ajuste fenomenológico.

8.7 Domínio de validade em circuitos

No setor circuital, a forma completa combinada é

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

Como

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

tem-se

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = dt G(K_{\text{circ}})^{-1/2} \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa expressão exige simultaneamente:

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

$$K_{\text{circ}} = K_{\text{circ}}^\dagger$$

ou regularização auto-adjunta admissível,

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}[\psi] < 1.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{circ}} = 0$$

e

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = 0.$$

Se

$$C\alpha\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}[\psi] \geq 1,$$

a fórmula linear de renormalização não pode ser usada. Se

$$K_{\text{circ}}$$

não é auto-adjunto nem foi regularizado, a medida espectral real usada para definir

$$\mathcal{A}_{K_{\text{circ}}}$$

não está justificada.

8.8 Domínio de validade em campos eletromagnéticos e geometria efetiva

Para campos eletromagnéticos com interação, o operador relevante é

$$K_{\text{EM}} = \delta^2 \Gamma_{\text{EM+int}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

A análise exige que

$$K_{\text{EM}}$$

seja auto-adjunto no regime regular, após escolha de gauge e eliminação de redundâncias. Caso contrário, a medida espectral deve ser construída em um subespaço físico ou por meio de uma regularização adequada.

Para geometria efetiva, o operador é

$$K_{\text{geom}} = \delta^2 S_{\text{geom}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

A aplicação de

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}$$

exige que o fator $G(K)$ seja escalar, positivo e suficientemente regular. Se $G(K)$ variar fortemente no espaço-tempo, a simples reescala de intervalos pode não capturar todos os termos geométricos diferenciais associados a uma transformação conformal completa. Nesse caso, a ação geométrica efetiva completa deve ser reavaliada.

8.9 Teorema de validade formal

Teorema 8.1 (Domínio formal de validade de $G(K)$). *A expressão*

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

é válida como resposta geométrica regular de menor ordem se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $K = \delta^2 S_{\text{eff}}|_C$ está bem definido;
2. K é auto-adjunto, ou possui extensão auto-adjunta admissível;
3. $\mathcal{A}_K[\psi]$ é construída a partir da medida espectral ativa de K ;
4. $C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$ está no regime linear regular:

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1;$$

5. a métrica efetiva é usada apenas no domínio

$$G(K) > 0.$$

Fora desse domínio, a forma linear deve ser substituída por uma resposta não linear completa

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

derivada de uma ação efetiva mais detalhada.

Demonstração. As condições 1–3 garantem que a ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$ é definida de modo variacional e espectral. A condição 4 garante que a expressão linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

permanece positiva. A condição 5 garante que a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}$$

é não degenerada e conformalmente positiva. Se qualquer uma dessas condições falha, perde-se a justificativa espectral, perturbativa ou geométrica da fórmula linear. Portanto, fora desse domínio, a função de resposta completa deve ser derivada novamente. \square

8.10 Mensagem central

A forma

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

não é uma lei universal global. Ela é a resposta regular de menor ordem da geometria efetiva diante da ativação espectral filtrada do operador

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

Ela é válida no domínio

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1,$$

com K espectralmente bem definido.

Quando esse domínio é violado, a conclusão correta não é afirmar um novo tempo, uma mudança automática de classe causal ou uma singularidade física real. A conclusão correta é que a aproximação linear falhou e que a função completa

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K)$$

precisa ser derivada de uma ação efetiva mais completa.

Assim, esta seção impede que $G(K)$ seja usado fora do regime em que foi derivado e preserva a consistência da série: ação primeiro, operador depois, espectro depois, ativação depois, geometria depois, tempo próprio por último.

9 Não circularidade e ausência de ad hoc

A derivação de $G(K)$ só é aceitável se a cadeia lógica não usar o tempo próprio efetivo como entrada para construir os objetos que posteriormente o determinam. Esta seção explicita essa ordem causal, variacional e espectral.

O ponto central é que o tempo próprio efetivo aparece apenas no último passo da construção. Antes dele, existem apenas a ação efetiva, seu Hessiano variacional, a medida espectral do operador de ativação, a ativação filtrada e o fator geométrico regular de menor ordem.

A sequência correta é

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

O tempo próprio efetivo é então definido por

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Assim, $d\tau_{\text{ef}}$ é consequência da construção, não premissa dela.

9.1 Separação entre entrada variacional e saída temporal

A entrada fundamental é a ação efetiva:

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}}.$$

A partir dela define-se a fase PAF:

$$\phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar}.$$

O tensor energia-momento total, quando necessário, vem da variação métrica:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \phi_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

O operador de ativação é definido pela segunda variação da ação em torno da configuração admissível \mathcal{C} :

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Nenhuma dessas definições usa o tempo próprio efetivo. O objeto temporal só aparece depois da métrica efetiva.

Portanto, as seguintes implicações são proibidas:

$$\begin{aligned} d\tau_{\text{ef}} &\not\rightarrow K, \\ d\tau_{\text{ef}} &\not\rightarrow \mathcal{A}_K, \\ d\tau_{\text{ef}} &\not\rightarrow G(K). \end{aligned}$$

A direção lógica é inversa:

$$K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

9.2 Por que K não é ad hoc

O operador K não é introduzido como parâmetro fenomenológico. Ele é o Hessiano variacional da ação efetiva:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Em linguagem funcional,

$$K_{AB}(x, y) = \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta \Xi^A(x) \delta \Xi^B(y)} \Big|_{\Xi = \Xi_{\mathcal{C}}},$$

onde Ξ^A representa o conjunto de variáveis dinâmicas do sistema.

Assim, K mede a resposta linearizada da configuração de operação. Para circuitos,

$$K_{\text{circ}} = \delta^2 S_{\text{circ}}.$$

Para campos eletromagnéticos,

$$K_{\text{EM}} = \delta^2 \Gamma_{\text{EM+int}}.$$

Para geometria efetiva,

$$K_{\text{geom}} = \delta^2 S_{\text{geom}}.$$

Logo, a origem de K é variacional, não empírica nem ajustada posteriormente.

9.3 Por que a medida espectral não é ad hoc

No regime regular,

$$K = K^\dagger.$$

Então, pelo teorema espectral,

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para uma excitação ψ , define-se a medida espectral:

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle.$$

Essa medida não é escolhida livremente. Ela é determinada pela resolução espectral de K e pela excitação ψ .

A única liberdade física admissível aparece na escolha do fundo estacionário e do peso espectral $a(\lambda)$. Mesmo essa liberdade deve ser fixada antes da aplicação preditiva. O fundo estacionário deve ser definido por calibração, regime de referência ou solução de equilíbrio. O peso $a(\lambda)$ deve representar sensibilidade espectral, escala física ou janela de operação da interface, e não pode ser ajustado depois para produzir a conclusão desejada.

9.4 Por que $\mathcal{A}_K[\psi]$ não é ad hoc

A ativação espectral não é a medida total do espectro. Ela é a parte da medida que se afasta do fundo estacionário. Essa exigência é a versão operatorial da passagem escalar já usada em [1]:

$$|\Psi|^2 \longrightarrow |\Psi|_{\text{ativo}}^2.$$

No presente artigo, essa substituição torna-se:

$$d\mu_{\psi}^K \longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K.$$

Define-se então

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda),$$

com

$$a(\lambda) \geq 0.$$

A construção foi escolhida para satisfazer:

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0,$$

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{quando há ativação espectral real}.$$

Portanto, $\mathcal{A}_K[\psi]$ não é uma amplitude livre. Ela é um funcional positivo da medida espectral ativa de K .

9.5 Por que $G(K)$ não é ad hoc

A resposta geométrica efetiva é escrita como

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}.$$

Para que essa modulação não introduza índices livres, $G(K)$ deve ser escalar. Como a ativação escalar disponível é $\mathcal{A}_K[\psi]$, escreve-se

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]).$$

O limite clássico exige

$$\mathcal{G}(0) = 1.$$

A regularidade em ativação fraca permite expandir:

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = \mathcal{G}(0) + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Como

$$\mathcal{G}(0) = 1,$$

tem-se

$$G(K) = 1 + \mathcal{G}'(0)\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2).$$

Definindo

$$C\alpha = -\mathcal{G}'(0),$$

obtém-se

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2).$$

No truncamento linear:

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi].$$

Assim, $G(K)$ não é escolhido para gerar o tempo próprio. Ele é a forma regular de menor ordem de uma resposta escalar que recupera o limite clássico:

$$G(0) = 1.$$

9.6 O ponto delicado: o coeficiente $C\alpha$

O coeficiente $C\alpha$ merece uma declaração separada. Ele não é universalmente derivado apenas por simetria. Ele é o coeficiente efetivo de resposta da interface:

$$C\alpha = -G'(0).$$

Mais precisamente, se

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K),$$

então

$$C\alpha = - \left. \frac{d\mathcal{G}}{d\mathcal{A}_K} \right|_{\mathcal{A}_K=0}.$$

O seu valor numérico precisa vir de uma das três fontes:

ação microscópica específica,

normalização física independente,

ou

calibração experimental anterior ao uso preditivo.

Não é permitido escolher $C\alpha$ depois de calcular $d\tau_{\text{ef}}$ para ajustar o resultado. Isso seria fenomenologia posterior e quebraria a estrutura derivativa do artigo.

Portanto, a forma

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi]$$

é derivada como estrutura de primeira ordem, mas o valor numérico de $C\alpha$ pertence ao modelo físico específico da interface.

9.7 Posição de $\rho(t)$

A grandeza $\rho(t)$, quando usada na formulação FFE, não deve ser introduzida como fonte fundamental. No presente artigo, ela deve ser entendida como observável derivado da ativação operatorial.

A cadeia correta é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow \rho_K(t).$$

Uma definição mínima é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Com uma normalização $\mathcal{A}_0 > 0$, pode-se escrever

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Uma forma regularizada é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Assim,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

indica variação temporal da ativação espectral. Mas não implica automaticamente tempo próprio:

$$\rho_K(t) \neq 0 \not\Rightarrow d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

Para circuitos, ainda é necessário que

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Para geometria efetiva, ainda é necessário que

$$0 < G(K) \leq 1$$

e que a curva considerada seja tipo-tempo.

9.8 Ordem causal completa da construção

A ordem completa pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &\longrightarrow \phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar}, \\ S_{\text{eff}} &\longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}}, \\ K &\longrightarrow K = \int \lambda dE_K(\lambda), \\ E_K &\longrightarrow d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle, \\ d\mu_{\psi}^K &\longrightarrow d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K, \\ d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K &\longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi], \\ \mathcal{A}_K[\psi] &\longrightarrow G(K), \\ G(K) &\longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \\ g_{\mu\nu}^{\text{ef}} &\longrightarrow d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau. \end{aligned}$$

Essa cadeia impede cálculo circular porque nenhum objeto anterior depende de $d\tau_{\text{ef}}$. Ela também impede ad hoc porque cada objeto anterior é definido por ação, teorema espectral, filtragem relativa ao fundo ou expansão regular de menor ordem.

9.9 Critério de rejeição da construção

A formulação deve ser considerada inválida em qualquer uma das situações seguintes:

1. K não pode ser obtido como segunda variação de uma ação efetiva;
2. K não é auto-adjunto nem possui regularização espectral admissível;
3. $\mathcal{A}_K[\psi]$ não se anula no fundo estacionário;
4. $G(K)$ é escolhido sem limite clássico $G(0) = 1$;
5. $C\alpha$ é ajustado posteriormente para produzir o valor desejado de $d\tau_{\text{ef}}$;
6. $d\tau_{\text{ef}}$ é usado para definir K , \mathcal{A}_K ou $G(K)$.

Esses critérios são importantes porque tornam a formulação falsificável do ponto de vista metodológico: se qualquer etapa não puder ser construída, o artigo não deve prosseguir para aplicações quantitativas naquele sistema.

9.10 Conclusão da seção

A construção não é circular porque o tempo próprio efetivo aparece apenas no último passo:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Antes disso, a sequência é inteiramente variacional e espectral:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K).$$

A construção também não é ad hoc porque:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}$$

vem da ação;

$$d\mu_{\psi}^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda) \psi \rangle$$

vem do teorema espectral;

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda)$$

é uma ativação filtrada, nula no fundo estacionário; e

$$G(K) = 1 - C\alpha \mathcal{A}_K[\psi]$$

é a forma regular de menor ordem com limite clássico

$$G(0) = 1.$$

O único coeficiente não universal é

$$C\alpha = -G'(0),$$

que deve ser determinado pela física da interface antes da aplicação preditiva. Com essa restrição, a derivação preserva a linha PAF: ação primeiro, operadores depois, espectro depois, geometria depois, tempo próprio por último.

10 Status de $\rho(t)$: observável derivado, não fonte primitiva

Nas formulações anteriores da FFE, a grandeza $\rho(t)$ aparece como assinatura operacional de quebra temporal, ativação espectral ou afastamento dinâmico em relação ao fundo estacionário. Entretanto, para manter a presente construção livre de ad hoc e de cálculo circular, $\rho(t)$ não será tomada como fonte fundamental de $G(K)$.

A origem fundamental da renormalização espectral é a cadeia variacional:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

A grandeza $\rho(t)$, quando usada, deve ser entendida como observável derivado da evolução temporal de $\mathcal{A}_K[\psi](t)$, e não como entidade primitiva. Essa distinção é essencial: se $\rho(t)$ fosse introduzido antes de K , ou independentemente de uma medida espectral derivada da ação, a teoria perderia sua estrutura PAF e se tornaria fenomenológica.

10.1 Problema conceitual

A forma escalar publicada usa a substituição

$$|\Psi|^2 \longrightarrow |\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

com o objetivo de impedir que o fundo espectral estacionário produza modulação geométrica indevida [1]. O presente artigo substitui essa leitura escalar por uma leitura operatorial:

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi],$$

onde

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda).$$

A ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$ é construída a partir da medida espectral ativa do operador

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

Assim, a origem de $G(K)$ não é $\rho(t)$, mas a ação efetiva.

A ordem correta é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

A grandeza $\rho(t)$ só pode aparecer como leitura temporal posterior:

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow \rho_K(t).$$

10.2 Definição derivada de $\rho_K(t)$

Uma forma mínima e admissível é definir $\rho_K(t)$ como a taxa temporal de variação da ativação espectral:

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Essa definição expressa diretamente a ideia de que $\rho_K(t)$ mede mudança temporal da ativação. Se

$$\mathcal{A}_K[\psi](t)$$

é constante, então

$$\rho_K(t) = 0.$$

Se

$$\mathcal{A}_K[\psi](t)$$

varia, então

$$\rho_K(t) \neq 0.$$

Para obter uma quantidade adimensional, introduz-se uma escala de ativação

$$\mathcal{A}_0 > 0,$$

fixada pela normalização física do sistema. Nesse caso:

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

A escala \mathcal{A}_0 não deve ser ajustada posteriormente para forçar resultados. Ela deve ser fixada por normalização dimensional, calibração de fundo ou escala característica da interface.

Uma forma regularizada, útil quando a ativação pode variar em várias ordens de magnitude, é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Essa forma possui duas vantagens. Primeiro, permanece bem definida quando

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = 0.$$

Segundo, mede variação relativa da ativação, e não apenas variação absoluta.

10.3 Interpretação operacional

A condição

$$\rho_K(t) \neq 0$$

significa que a ativação espectral está variando no tempo. Isso pode corresponder a transiente, modulação, chirp, regime de chaveamento, excitação não estacionária, mudança de distribuição espectral ou afastamento dinâmico em relação ao fundo.

Contudo,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

não implica automaticamente tempo próprio efetivo não nulo. A implicação

$$\rho_K(t) \neq 0 \implies d\tau_{\text{ef}} > 0$$

não é válida.

A forma correta é:

$$\rho_K(t) \neq 0 \implies \text{ativação espectral variável,}$$

mas

$$\rho_K(t) \neq 0 \not\implies d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

Para que exista tempo próprio efetivo, ainda é necessário que uma das condições físicas seguintes seja satisfeita.

No setor geométrico, deve existir métrica efetiva admissível:

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu},$$

com

$$0 < G(K) \leq 1.$$

Além disso, a curva considerada deve ser tipo-tempo.

No setor circuitual, a excitação deve satisfazer o critério energia-causal:

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2} > 0.$$

Somente então se define

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

e, se houver ativação espectral regular,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

10.4 Separação entre ativação, variação e temporalidade

Há três níveis distintos que não devem ser confundidos.

Ativação espectral. A ativação espectral é medida por

$$\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Ela indica afastamento espectral em relação ao fundo estacionário.

Variação temporal da ativação. A variação temporal da ativação é medida por

$$\rho_K(t).$$

Ela indica que a ativação está mudando com o tempo coordenado.

Tempo próprio efetivo. O tempo próprio efetivo é definido por

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau,$$

ou, no setor circuitual,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Esses níveis obedecem à cadeia:

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow \rho_K(t),$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

Mas não há implicação direta

$$\rho_K(t) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}$$

sem a métrica efetiva admissível ou sem o critério energia-causal tipo-tempo.

10.5 Fundo estacionário

A definição de $\rho_K(t)$ também deve preservar o fundo estacionário. Se a distribuição espectral instantânea coincide com o fundo,

$$P_\psi^K(\lambda, t) = Q^K(\lambda),$$

então

$$d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = 0.$$

Consequentemente,

$$\rho_K(t) = 0.$$

Nesse caso:

$$G(K) = 1,$$

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = g_{\mu\nu},$$

e

$$d\tau_{\text{ef}} = d\tau.$$

Assim, o fundo estacionário não produz ativação temporal, não produz renormalização geométrica e não altera o tempo próprio efetivo.

10.6 Ativação estacionária

Há um segundo caso importante. Pode ocorrer:

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = \mathcal{A}_* > 0$$

constante no tempo. Nesse caso,

$$\rho_K(t) = 0,$$

mas

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_*.$$

Portanto, uma ativação estacionária pode produzir uma renormalização geométrica constante, mesmo sem variação temporal instantânea.

Essa distinção é importante: $\rho_K(t)$ mede variação temporal da ativação, não a ativação em si. A grandeza que entra em $G(K)$ é

$$\mathcal{A}_K[\psi],$$

não necessariamente sua derivada temporal.

Assim, há três regimes:

$$\mathcal{A}_K = 0, \quad \rho_K = 0, \quad G(K) = 1.$$

$$\mathcal{A}_K > 0, \quad \rho_K = 0, \quad G(K) < 1 \quad \text{constante.}$$

$$\mathcal{A}_K > 0, \quad \rho_K \neq 0, \quad G(K) \quad \text{varia no tempo.}$$

Portanto, $\rho_K(t)$ é útil para detectar dinâmica de ativação, mas não substitui $\mathcal{A}_K[\psi]$.

10.7 Relação entre $\rho_K(t)$ e $G(K)$

Como

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi](t),$$

tem-se, no regime linear,

$$\frac{dG}{dt} = -C\alpha\frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Logo,

$$\frac{dG}{dt} = -C\alpha\rho_K(t)$$

na definição não normalizada

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Com normalização,

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0}\frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t),$$

a relação torna-se

$$\frac{dG}{dt} = -C\alpha\mathcal{A}_0\rho_K(t).$$

Essa identidade mostra o papel correto de $\rho_K(t)$: ele controla a variação temporal do fator geométrico, não seu valor absoluto. O valor absoluto de $G(K)$ é determinado por

$$\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

10.8 Efeito sobre o tempo próprio efetivo

A partir de

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau,$$

se $G(K)$ depende do tempo, então

$$d\tau_{\text{ef}}(t) = G(K, t)^{-1/2}d\tau(t).$$

A taxa de variação do fator multiplicativo é

$$\frac{d}{dt}G(K, t)^{-1/2} = -\frac{1}{2}G(K, t)^{-3/2}\frac{dG}{dt}.$$

Usando

$$\frac{dG}{dt} = -C\alpha\rho_K(t),$$

obém-se

$$\frac{d}{dt}G(K, t)^{-1/2} = \frac{1}{2}C\alpha G(K, t)^{-3/2}\rho_K(t).$$

Portanto, $\rho_K(t)$ mede a taxa de modulação temporal do fator de renormalização.

Contudo, se

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0$$

independentemente de $\rho_K(t)$. A modulação de $G(K)$ não cria tempo próprio em setor nulo. Ela apenas modula a escala temporal de uma curva ou excitação já tipo-tempo.

10.9 Proposição: $\rho_K(t)$ não é condição suficiente de tempo próprio

Proposição 10.1. *A condição*

$$\rho_K(t) \neq 0$$

não é condição suficiente para

$$d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

Demonstração. Pela definição,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

indica que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t) \neq 0.$$

Logo, a ativação espectral está variando no tempo. Porém, o tempo próprio efetivo é

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Se a excitação de base é nula, então

$$d\tau = 0.$$

Portanto,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} \cdot 0 = 0.$$

Assim, mesmo com $\rho_K(t) \neq 0$, o tempo próprio efetivo pode ser nulo. Logo, $\rho_K(t) \neq 0$ não é condição suficiente para $d\tau_{\text{ef}} > 0$. \square

10.10 Proposição: $\rho_K(t)$ não é condição necessária de renormalização

Proposição 10.2. *A condição*

$$\rho_K(t) \neq 0$$

não é condição necessária para que exista renormalização geométrica constante.

Demonstração. Considere uma ativação estacionária

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = \mathcal{A}_* > 0.$$

Então

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t) = 0.$$

Entretanto,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_*.$$

Se

$$0 < C\alpha\mathcal{A}_* < 1,$$

então

$$G(K) < 1.$$

Logo, existe renormalização geométrica constante, mesmo com $\rho_K(t) = 0$. \square

10.11 Conclusão da seção

A grandeza $\rho(t)$ não é a origem fundamental de $G(K)$. No presente artigo, sua forma derivada é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

ou uma versão normalizada ou regularizada dessa expressão.

A origem fundamental da construção é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow d\mu_\psi^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

A ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$ determina o fator geométrico:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

A grandeza $\rho_K(t)$ mede apenas a variação temporal dessa ativação:

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Portanto,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

significa variação temporal da ativação espectral, mas

$$\rho_K(t) \neq 0 \not\Rightarrow d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

Ainda é necessário que exista métrica efetiva admissível ou critério energia-causal tipo-tempo.

Com isso, $\rho(t)$ deixa de ser uma fonte primitiva e passa a ser um observável derivado, compatível com a estrutura PAF: ação primeiro, operador depois, espectro depois, ativação depois, resposta geométrica depois e tempo próprio por último.

11 Falsificabilidade e critérios mínimos de teste

A construção desenvolvida até aqui não deve ser entendida apenas como uma reorganização formal de conceitos. Ela produz condições que podem falhar. Essa propriedade é essencial: uma formulação física só se torna operacionalmente relevante quando estabelece situações nas quais suas próprias previsões seriam contraditas.

A cadeia derivada foi

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_\psi^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

No regime linear regular,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

com

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

O tempo próprio efetivo é

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Portanto,

$$d\tau_{\text{ef}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}}.$$

Esta seção apresenta os critérios mínimos pelos quais a formulação pode ser testada ou rejeitada. Esses testes separam quatro regimes: fundo estacionário, excitação nula, ativação fraca e falha da aproximação linear.

11.1 Teste 1: fundo estacionário

O primeiro teste é o regime de fundo estacionário. Por construção, a ativação espectral deve se anular quando a distribuição espectral da excitação coincide com a distribuição do fundo:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0.$$

Nesse caso,

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] = 1.$$

Logo,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Consequentemente,

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau = d\tau.$$

Assim, a previsão é:

$$\boxed{\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \implies G(K) = 1, \quad g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = g_{\mu\nu}, \quad d\tau_{\text{ef}} = d\tau.}$$

Portanto, qualquer experimento ou simulação que indique renormalização temporal não trivial quando

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0$$

contradiz a formulação. Esse ponto é decisivo, pois impede que ruído estacionário, espectro de fundo ou resposta persistente não ativa sejam interpretados como modulação geométrica.

A condição de fundo estacionário também implica

$$\rho_K(t) = 0$$

quando

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Mas a anulação de $\rho_K(t)$ sozinha não basta para garantir ausência de renormalização, pois pode existir ativação estacionária com

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \mathcal{A}_* > 0$$

constante. O teste fundamental é

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0,$$

não apenas

$$\rho_K(t) = 0.$$

11.2 Teste 2: excitação nula

O segundo teste é a preservação de excitações nulas. Como a métrica efetiva é conformalmente relacionada à métrica de fundo por um fator positivo,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}, \quad G(K) > 0,$$

a classe causal é preservada. Se uma excitação satisfaz

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau = 0.$$

Assim,

$$\boxed{d\tau = 0 \implies d\tau_{\text{ef}} = 0.}$$

No contexto de engenharia elétrica, isso significa que uma onda progressiva TEM ideal em uma linha sem perdas continua sendo nula. Para uma linha com parâmetros distribuídos L' e C' , o tempo próprio circuital de base é

$$d\tau_\ell = dt \frac{|C'V^2 - L'I^2|}{C'V^2 + L'I^2}.$$

Para uma onda TEM progressiva ideal,

$$I = \frac{V}{Z_0}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}},$$

e, portanto,

$$L'I^2 = C'V^2.$$

Logo,

$$d\tau_\ell = 0.$$

Mesmo com ativação espectral regular,

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} = G(K_\ell)^{-1/2} d\tau_\ell = 0.$$

Portanto,

$$\boxed{G(K) \text{ não pode produzir tempo próprio em uma onda progressiva ideal.}}$$

Qualquer resultado que atribua

$$d\tau_\ell^{\text{ef}} > 0$$

a uma onda progressiva TEM ideal apenas por causa de $G(K)$, mantendo

$$C'V^2 = L'I^2,$$

contradiz a formulação.

11.3 Teste 3: regime linear fraco

O terceiro teste é o regime de ativação fraca. Se

$$0 < C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

então

$$G(K)^{-1/2} = (1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi])^{-1/2}.$$

Usando a expansão binomial,

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2),$$

com

$$x = C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

obtém-se

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2) \right] d\tau.$$

Logo,

$$d\tau_{\text{ef}} - d\tau = \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] d\tau + O(\mathcal{A}_K^2)d\tau.$$

Assim, em primeira ordem,

$$\boxed{\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].}$$

Essa é uma previsão quantitativa. No regime linear fraco, a correção relativa do tempo próprio deve ser proporcional à ativação espectral filtrada. A inclinação esperada é

$$\frac{1}{2}C\alpha.$$

Se a ativação $\mathcal{A}_K[\psi]$ for duplicada dentro do regime linear, a correção relativa deve duplicar, até termos de ordem

$$O(\mathcal{A}_K^2).$$

Portanto, a forma linear pode ser testada por uma relação de proporcionalidade:

$$\delta_\tau := \frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \propto \mathcal{A}_K[\psi].$$

Se, no regime

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

a correção relativa não for linear em $\mathcal{A}_K[\psi]$, então a aproximação de menor ordem está incompleta ou o operador K , a filtragem ativa ou o coeficiente $C\alpha$ foram identificados incorretamente.

11.4 Teste 4: falha do regime linear

O quarto teste é a falha controlada da aproximação linear. A forma

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

só é admissível enquanto

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

Quando

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \rightarrow 1,$$

tem-se

$$G(K) \rightarrow 0.$$

Nesse limite,

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}$$

torna-se singular. Portanto, a teoria linear deve falhar antes que essa singularidade seja interpretada como efeito físico definitivo.

Assim, o resultado correto nesse regime não é afirmar que a métrica se torna fisicamente infinita, mas reconhecer que a expansão linear deixou de ser válida. A resposta deve então ser substituída por uma função não linear completa:

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

com

$$\mathcal{G}(0) = 1,$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) > 0,$$

e

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}_K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K + O(\mathcal{A}_K^2)$$

no regime fraco.

Portanto,

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \rightarrow 1 \implies \text{falha da aproximação linear.}$$

Nesse caso, a forma

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

não deve ser usada.

Qualquer aplicação que continue usando a forma linear para

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \geq 1$$

está fora do domínio formal da teoria.

11.5 Teste 5: variação temporal de ativação

Como $\rho_K(t)$ foi definido como observável derivado,

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt}\mathcal{A}_K[\psi](t),$$

ele fornece um teste dinâmico adicional.

No regime linear,

$$G(K, t) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Logo,

$$\frac{dG}{dt} = -C\alpha\rho_K(t).$$

Se

$$\rho_K(t) = 0$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi](t) = \mathcal{A}_*$$

é constante, então

$$G(K, t) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_*$$

também é constante.

Se

$$\rho_K(t) \neq 0,$$

então

$$\frac{dG}{dt} \neq 0$$

desde que

$$C\alpha \neq 0.$$

Portanto, $\rho_K(t)$ testa a modulação temporal de $G(K)$, mas não testa sozinho a existência de tempo próprio efetivo. Para isso, ainda é preciso verificar

$$d\tau > 0$$

ou, no setor circuital,

$$\Delta_{\text{circ}} > 0.$$

Assim,

$$\boxed{\rho_K(t) \neq 0 \implies G(K, t) \text{ varia no tempo,}}$$

mas

$$\boxed{\rho_K(t) \neq 0 \not\Rightarrow d\tau_{\text{ef}} > 0.}$$

11.6 Teste 6: consistência com o critério energia-causal

No setor circuital, a existência de tempo próprio efetivo de base exige

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

onde

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{circ}} = 0,$$

e

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} d\tau_{\text{circ}} = 0.$$

Se

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

então

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

e a renormalização espectral fornece

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Portanto, no setor circuital, a falsificação mínima é:

$$\Delta_{\text{circ}} = 0 \quad \text{e} \quad d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} > 0.$$

Se isso ocorrer sem alteração do critério energia-causal, a formulação é contradita.

Esse teste é compatível com a distinção estabelecida em [2]: atraso de grupo, fase observada e ativação espectral não bastam para definir tempo próprio circuital. O critério decisivo é a classe energia-causal.

11.7 Resumo dos critérios de falha

A formulação falha, ou deve ser suspensa, se ocorrer qualquer uma das seguintes situações:

1. mede-se renormalização temporal com

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0;$$

2. obtém-se

$$d\tau_{\text{ef}} > 0$$

para uma excitação de base nula

$$d\tau = 0$$

apenas por aplicação de $G(K)$;

3. no regime

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

a correção relativa

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau}$$

não é linear em $\mathcal{A}_K[\psi]$;

4. usa-se a forma linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

no regime

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \geq 1;$$

5. $\rho_K(t)$ é tratado como fonte primitiva, sem derivação a partir de

$$\mathcal{A}_K[\psi](t);$$

6. $C\alpha$ é ajustado depois da medição de $d\tau_{\text{ef}}$ para forçar concordância.

Essas condições tornam a formulação metodologicamente restritiva: nem toda ativação espectral gera tempo próprio, nem toda variação temporal de espectro gera renormalização admissível, e nem toda extrapolação de $G(K)$ é permitida.

11.8 Mensagem central

A formulação não é apenas interpretativa. Ela produz condições de nulidade, ativação, regime fraco e falha.

No fundo estacionário:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \implies G(K) = 1, \quad d\tau_{\text{ef}} = d\tau.$$

Para excitações nulas:

$$d\tau = 0 \implies d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

No regime linear fraco:

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

No regime forte:

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \rightarrow 1 \implies \text{falha da aproximação linear.}$$

Portanto, a teoria fornece previsões que podem ser confirmadas, limitadas ou rejeitadas. O ponto fundamental é que $G(K)$ não é um multiplicador livre de tempo próprio: ele é uma resposta geométrica derivada da ativação espectral de K , válida apenas em domínio formal controlado.

12 Fechamento da Parte I: resultado derivativo final

Esta seção encerra a Parte I do artigo. O objetivo é condensar a construção realizada nas seções anteriores em uma forma única, explicitando o resultado derivativo final e separando-o das aplicações de engenharia elétrica e eletrônica, que serão tratadas em artigo próprio.

A Parte I não teve como finalidade resolver ainda problemas de projeto circuitual, nem aplicar o formalismo a linhas, ressonadores, filtros, cavidades ou sistemas ativos. Sua finalidade foi derivar, sem ad hoc e sem cálculo circular, a cadeia pela qual uma ativação espectral de interface pode produzir uma renormalização geométrica do tempo próprio efetivo.

A cadeia obtida é

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow d\mu_{\psi}^K \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K) \longrightarrow g_{\mu\nu}^{\text{ef}} \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

Cada seta dessa cadeia possui significado definido. A ação efetiva fornece o operador de ativação. O operador de ativação fornece uma medida espectral. A comparação dessa medida com o fundo estacionário fornece a parte ativa. A parte ativa define o escalar de ativação. O escalar de ativação define o fator geométrico de menor ordem. O fator geométrico define uma métrica efetiva. A métrica efetiva define o tempo próprio efetivo.

12.1 Resultado derivativo central

O ponto de partida é uma ação efetiva de interface:

$$S_{\text{eff}} = S_{\text{padrao}} + S_{\text{espectral}} + S_{\text{int}}.$$

A fase PAF associada é

$$\phi_{\text{eff}} = \frac{S_{\text{eff}}}{\hbar}.$$

O tensor energia-momento total, quando a ação depende da métrica, é obtido por variação métrica:

$$T_{\text{total}}^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2\hbar}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \phi_{\text{eff}}}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

O operador de ativação é definido como o Hessiano variacional da ação efetiva em torno da configuração de operação \mathcal{C} :

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}} \Big|_{\mathcal{C}}.$$

Assim, K não é uma hipótese fenomenológica. Ele é derivado da ação.

No regime regular,

$$K = K^\dagger,$$

e o teorema espectral fornece

$$K = \int_{\sigma(K)} \lambda dE_K(\lambda).$$

Para uma excitação admissível ψ , define-se a medida espectral

$$d\mu_\psi^K(\lambda) = d\langle \psi, E_K(\lambda)\psi \rangle.$$

A ativação física não é a medida total, mas a parte que se afasta do fundo estacionário:

$$d\mu_\psi^K \longrightarrow d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K.$$

Com um peso espectral não negativo,

$$a(\lambda) \geq 0,$$

define-se

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int_{\sigma(K)} a(\lambda) d\mu_{\psi,\text{ativo}}^K(\lambda).$$

Essa grandeza satisfaz

$$\mathcal{A}_K[\psi] \geq 0,$$

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0 \quad \text{no fundo estacionário},$$

e

$$\mathcal{A}_K[\psi] > 0 \quad \text{em regime de ativação espectral}.$$

A resposta geométrica regular de menor ordem é então

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Essa expressão é a versão operatorial da forma escalar publicada

$$M_\Psi = 1 - C\alpha|\Psi|_{\text{ativo}}^2,$$

mas agora com origem variacional explícita:

$$|\Psi|_{\text{ativo}}^2 \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi].$$

A métrica efetiva é

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1}g_{\mu\nu}.$$

Para curvas tipo-tempo, segue

$$d\tau_{\text{ef}}^2 = G(K)^{-1}d\tau^2.$$

Como o domínio regular exige

$$G(K) > 0,$$

tem-se

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2}d\tau.$$

Substituindo a forma linear de $G(K)$:

$$d\tau_{\text{ef}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]}}.$$

12.2 Tese final da Parte I

A Parte I estabelece três teses principais.

Primeiro:

a ativação espectral não cria um segundo tempo.

O tempo próprio efetivo não é soma de um tempo padrão com um tempo espectral:

$$\tau_{\text{total}} \neq \tau_{\text{padrao}} + \tau_{\text{espectral}}.$$

A contribuição espectral atua por renormalização geométrica:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

Segundo:

a ativação espectral gera uma renormalização geométrica derivada da ação.

A origem da renormalização é:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K = \delta^2 S_{\text{eff}} \longrightarrow \mathcal{A}_K[\psi] \longrightarrow G(K).$$

Portanto, $G(K)$ não é inserido como fator livre. Ele é a resposta escalar regular de menor ordem à ativação espectral filtrada do operador K .

Terceiro:

$G(K)$ renormaliza tempos próprios admissíveis, mas não muda sozinho a classe causal.

Como

$$g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = G(K)^{-1} g_{\mu\nu}, \quad G(K) > 0,$$

a transformação é conformal positiva. Logo,

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0 \implies g_{\mu\nu}^{\text{ef}} v^\mu v^\nu = 0.$$

Assim, setores nulos permanecem nulos. Se

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

12.3 Status final de $\rho(t)$

A grandeza $\rho(t)$ não foi usada como fonte primitiva. Ela foi reposicionada como observável derivado da ativação espectral:

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t),$$

ou, com normalização,

$$\rho_K(t) = \frac{1}{\mathcal{A}_0} \frac{d}{dt} \mathcal{A}_K[\psi](t).$$

Uma forma regularizada possível é

$$\rho_K(t) = \frac{d}{dt} \ln \left[1 + \frac{\mathcal{A}_K[\psi](t)}{\mathcal{A}_0} \right].$$

Portanto,

$$\rho_K(t) \neq 0$$

indica variação temporal da ativação espectral, mas não implica automaticamente

$$d\tau_{\text{ef}} > 0.$$

A existência de tempo próprio efetivo ainda exige uma curva tipo-tempo em métrica admissível ou, no setor circuital, um critério energia-causal positivo.

12.4 Domínio formal do resultado

A forma linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

é válida no domínio

$$0 \leq C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] < 1.$$

Para uso perturbativo, exige-se ainda

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1.$$

Nesse regime,

$$d\tau_{\text{ef}} = \left[1 + \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] + O(\mathcal{A}_K^2) \right] d\tau.$$

Logo,

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

Quando

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \rightarrow 1,$$

a forma linear deixa de ser válida. Nesse caso, não se deve interpretar a singularidade formal como novo efeito físico automático. A conclusão correta é que a aproximação linear falhou e deve ser substituída por uma resposta completa:

$$G(K) = \mathcal{G}(\mathcal{A}_K[\psi]),$$

com

$$\mathcal{G}(0) = 1, \quad \mathcal{G}(\mathcal{A}_K) > 0.$$

12.5 Critérios mínimos de falsificabilidade

O resultado final da Parte I possui critérios de falha.

Se

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0,$$

então

$$G(K) = 1, \quad g_{\mu\nu}^{\text{ef}} = g_{\mu\nu}, \quad d\tau_{\text{ef}} = d\tau.$$

Qualquer renormalização temporal não trivial com

$$\mathcal{A}_K[\psi] = 0$$

contradiz a formulação.

Se

$$d\tau = 0,$$

então

$$d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Qualquer produção de tempo próprio por $G(K)$ em setor nulo contradiz a formulação.

No regime fraco,

$$0 < C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \ll 1,$$

a correção relativa deve satisfazer

$$\frac{d\tau_{\text{ef}} - d\tau}{d\tau} \approx \frac{1}{2}C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

A ausência dessa linearidade no regime fraco indica falha da aproximação, identificação incorreta de K , filtragem inadequada ou coeficiente $C\alpha$ mal determinado.

Se

$$C\alpha\mathcal{A}_K[\psi] \geq 1,$$

a forma linear

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi]$$

não deve ser usada.

12.6 Ponte para o artigo de engenharia

A Parte I termina antes das aplicações. Ela fornece a peça derivativa que faltava:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi],$$

com

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

O segundo artigo deve começar pela combinação dessa renormalização com o critério energia-causal circuital.

No setor circuital, o tempo próprio de base é

$$d\tau_{\text{circ}} = dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}},$$

onde

$$\Delta_{\text{circ}} = u_{\text{circ}}^2 - \frac{|\mathbf{S}_{\text{circ}}|^2}{c_{\text{circ}}^2}.$$

Quando

$$\Delta_{\text{circ}} > 0,$$

a renormalização espectral fornece

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} d\tau_{\text{circ}}.$$

Portanto,

$$d\tau_{\text{circ}}^{\text{ef}} = G(K_{\text{circ}})^{-1/2} dt \frac{\sqrt{\Delta_{\text{circ}}}}{u_{\text{circ}}}.$$

Essa será a fórmula de entrada do artigo de engenharia. A partir dela, o segundo artigo poderá tratar linhas de transmissão, ressonadores, filtros, cavidades, guias, circuitos ativos, circuitos não lineares e sistemas de chaveamento.

12.7 Conclusão da Parte I

A Parte I demonstrou que a renormalização espectral do tempo próprio pode ser escrita de modo variacional e operatorial:

$$S_{\text{eff}} \longrightarrow K \longrightarrow \mathcal{A}_K \longrightarrow G(K) \longrightarrow d\tau_{\text{ef}}.$$

O operador

$$K$$

não é postulado:

$$K = \delta^2 S_{\text{eff}}.$$

A ativação

$$\mathcal{A}_K[\psi]$$

não é espectro total, mas espectro ativo filtrado:

$$\mathcal{A}_K[\psi] = \int a(\lambda) d\mu_{\psi, \text{ativo}}^K(\lambda).$$

O fator

$$G(K)$$

não é livre, mas a forma regular de menor ordem:

$$G(K) = 1 - C\alpha\mathcal{A}_K[\psi].$$

O tempo próprio efetivo não é somado a outro tempo, mas renormalizado:

$$d\tau_{\text{ef}} = G(K)^{-1/2} d\tau.$$

E a classe causal não é alterada por $G(K)$ sozinho:

$$d\tau = 0 \implies d\tau_{\text{ef}} = 0.$$

Assim, a Parte I fornece o núcleo derivativo do programa. A etapa seguinte é converter essa estrutura em ferramentas de engenharia elétrica e eletrônica, sempre preservando a ordem: primeiro classe energia-causal, depois renormalização espectral.

Referências

- [1] JONATAN P. C., *Modulação Espectral da Geometria e Renormalização do Tempo Próprio: Uma Formulação Covariante da Resposta Geométrica Efetiva*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20046230>
- [2] JONATAN P. C., *Tempo Próprio Eletromagnético Efetivo em Circuitos Elétricos e Eletrônicos: Um Critério Energia-Causal para Excitações Circuitais Tipo-Tempo*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20229893>
- [3] JONATAN P. C., *Interfaces Entre Setores Físicos a Partir da Ação-Fase: Um Protocolo Estrutural de Derivação*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/19175912>
- [4] JONATAN P. C., *Operadores Mínimos de Interface entre Setores Físicos. Protocolo Ação-Fase I*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20439287>
- [5] JONATAN P. C., *Derivação de Operadores de Interface Faltantes via Benchmarks Conhecidos. Protocolo Ação-Fase II*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20447786>
- [6] JONATAN P. C., *Interfaces Físicas, Teorias Conhecidas e Critérios Comparativos: Protocolo Ação-Fase III*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20451407>
- [7] JONATAN P. C., *OS FUNDAMENTOS DA FÍSICA ESPECTRAL*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/17684617>
- [8] JONATAN P. C., *Circuitos Eletromagnéticos como Operadores de Fase: Atraso de Grupo, Temporalidade Operacional e Geometrização Condicional*, Zenodo, 2026. <https://zenodo.org/records/20101285>
- [9] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1998.
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Butterworth-Heinemann, 1975.
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., Pergamon Press, 1984.
- [12] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, 1941.
- [13] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, 1960.
- [14] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge University Press, 1999.
- [15] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 4th ed., Wiley, 2012.
- [16] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering*, 2nd ed., IEEE Press, 2001.
- [17] S. Ramo, J. R. Whinnery and T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1994.

- [18] J. H. Poynting, *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 175, pp. 343–361, 1884.
- [19] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.
- [20] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984.
- [21] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2004.
- [22] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, 1960.
- [23] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, 2002.
- [24] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, 1989.
- [25] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed., Dover Publications, 1986.
- [26] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.
- [27] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.
- [28] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., Springer, 1995.
- [29] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, 1990.
- [30] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part II: Spectral Theory*, Wiley-Interscience, 1963.
- [31] S. Kullback and R. A. Leibler, *On Information and Sufficiency*, The Annals of Mathematical Statistics, vol. 22, no. 1, pp. 79–86, 1951.
- [32] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 2006.