

## 14.

## Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. N. H. Abel.)

(Suite du mémoire Nr. 12. tom. II. cah. 2. de ce journal \*).

## §. VIII.

Expression algébrique de la fonction  $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$  dans le cas,  
ou  $e=c=1$ . Application à la lemniscate.

34.

Dans le cinquième prargraphe nous avons traité l'équation  $P_n=0$ , d'où dépend la détermination des fonctions  $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$  et  $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ . Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paroît guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de  $e$  et  $c$ ; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités  $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$  et  $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$  en fonctions de  $e$  et  $c$ . C'est ce qui arrive toujours, si  $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$  peuvent être exprimés rationnellement par  $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$  et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de  $\frac{c}{e}$ . Dans tous ces cas l'équation  $P_n=0$  peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition  $e=c=1$  et  $n=4\nu+1$ . Dans ce cas on aura

$$208. \quad \begin{cases} \alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} & \text{où } x = \varphi\alpha, \\ f\alpha = \sqrt{1-\varphi^2\alpha}; & F\alpha = \sqrt{1+\varphi^2\alpha}. \end{cases}$$

De même

$$209. \quad \varphi(\alpha i) = i \cdot \varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant  $\alpha i$  au lieu de  $i$ . Cette formule donne ensuite:

$$210. \quad f(\alpha i) = F\alpha; \quad F(\alpha i) = f\alpha.$$

\*) L'auteur a fait parvenir cette continuation au rédacteur sous le date de 12. Février 1828.

Ces deux quantités  $e$  et  $c$  étant égales entres elles, il est clair, qu'il en sera de même de deux quantités que nous avons désignées par  $\omega$  et  $\varpi$ . En effet on aura

$$211. \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{V(1-x^4)}.$$

35.

En posant dans les formules (10.)  $\beta i$  au lieu de  $\beta$ , on en tirera, en ayant égard aux équations 209. et 210.:

$$212. \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + \beta i) = \frac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + i \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}, \\ f(\alpha + \beta i) = \frac{f\alpha \cdot F\beta - i \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot F\alpha \cdot f\beta}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}, \\ F(\alpha + \beta i) = \frac{F\alpha \cdot f\beta + i \cdot \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\beta}{1 - \varphi^2\alpha \cdot \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Donc, pour trouver les fonctions  $\varphi$ ,  $f$ ,  $F$  pour une valeur quelconque imaginaire de la variable, il suffira d'en connoître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant  $\alpha = m\delta$ ,  $\beta = \mu\delta$ , on voit que  $\varphi(m + \mu i)\delta$ ;  $f(m + \mu i)\delta$ ;  $F(m + \mu i)\delta$  pourront être exprimés rationnellement par les six fonctions suivantes:

$$\varphi(m\delta), \quad \varphi(\mu\delta), \quad f(m\delta), \\ f(\mu\delta), \quad F(m\delta), \quad F(\mu\delta)$$

et par suite aussi par des fonctions rationnelles des trois fonctions  $\varphi\delta$ ,  $f\delta$ ,  $F\delta$ ; si  $m$  et  $\mu$  sont des nombres entiers.

En suivant ce développement, on voit également et sans peine que dans le cas, où  $m + \mu$  est un nombre impair, on aura:

$$\varphi(m + \mu i)\delta = \varphi(\delta) \cdot T,$$

où  $T$  est une fonction rationnelle de  $(\varphi\delta)^2$ ,  $(f\delta)^2$ ,  $(F\delta)^2$ , c'est-à-dire de  $(\varphi\delta)^2$ .

Donc en faisant  $\varphi\delta = x$ , on aura

$$\varphi(m + \mu i)\delta = x \cdot \psi(x^2).$$

En changeant  $\delta$  en  $\delta i$ ,  $\varphi\delta$  se changera en  $\varphi(\delta i) = i\varphi(\delta) = ix$ , et la fonction  $\varphi(m + \mu i)\delta$  en  $i\varphi(m + \mu i)\delta$ ; donc:

$$\varphi(m + \mu i)\delta = x \cdot \psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir  $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$ ; ce qui fait voir que la fonction  $\psi(x^2)$  ne contient que des puissances de la forme  $x^{4n}$ . Donc on aura

$$213. \quad \varphi(m + \mu i)\delta = x \cdot T,$$

où  $T$  est une fonction rationnelle de  $x^4$ .

Cherchons p. ex. l'expression de  $\varphi(2+i)\delta$  en  $x$ .

On a d'après les formules (212.), en faisant  $\alpha = 2\delta$  et  $\beta = \delta$ :

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta \cdot f\delta \cdot F\delta + i\varphi\delta \cdot f2\delta \cdot F2\delta}{1 - (\varphi^2\delta)^2 \cdot \varphi^2\delta}.$$

Or (10.) donne:

$$\varphi(2\delta) = \frac{2\varphi\delta \cdot f\delta \cdot F\delta}{1 + (\varphi\delta)^4}; \quad f(2\delta) = \frac{(f\delta)^2 - (\varphi\delta)^2 \cdot (F\delta)^2}{1 + (\varphi\delta)^4};$$

$$F(2\delta) = \frac{(F\delta)^2 + (\varphi\delta)^2 \cdot (f\delta)^2}{1 + (\varphi\delta)^4};$$

c'est-à-dire, en remarquant que  $\varphi\delta = x$ ,  $f\delta = \sqrt{1-x^2}$  et  $F\delta = \sqrt{1+x^2}$ ,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x \cdot \sqrt{1-x^4}}{1+x^4}; \quad f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}; \quad F(2\delta) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra:

$$215. \quad \varphi(2+i)\delta = x \cdot \frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi \cdot \frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de  $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ .

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre  $4\nu+1$  en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4\nu + 1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de  $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ ; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de  $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ .

La somme des deux carrés  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  étant impaire, l'un des nombres  $\alpha$  et  $\beta$  sera pair et l'autre impair. Donc la somme  $\alpha+\beta$  est impaire. Donc en vertu de 113., on aura

$$216. \quad \varphi(\alpha+\beta i)\delta = x \cdot \frac{T}{S},$$

où  $T$  et  $S$  sont des fonctions entières de  $x^4 = (\varphi\delta)^4$ .

En supposant  $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$ , le premier membre de 216. se réduit à zéro, et par conséquent  $x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$  sera une racine de l'équation

$$217. \quad T = 0.$$

Donc on aura la valeur de  $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$  au moyen de la résolution de cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation  $T=0$  à l'aide de la fonction  $\varphi$  de la manière suivante:

Si  $T=0$ , on doit avoir

$$\varphi(\alpha + \beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27.):

$$(\alpha + \beta i)\delta = m\omega + \mu i\omega = (m + \mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega$$

et,

$$218. \quad x = \varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right).$$

Dans cette expression sont conséquemment contenues toutes les racines de l'équation  $T=0$ . On les trouvera en donnant à  $m$  et  $\mu$  toutes les valeurs entières depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ .

Or je dis que les valeurs de  $x$ , qui sont différentes entre elles, peuvent être représentées par la formule

$$218'. \quad x = \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i}\right),$$

où  $\varrho$  a toutes les valeurs entières depuis  $-\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$  jusqu'à  $+\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$ .

Pour démontrer cela, soient  $\lambda$  et  $\lambda'$  deux nombres entiers, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$219. \quad \beta \cdot \lambda - \alpha \cdot \lambda' = 1;$$

soit de plus  $t$  un nombre entier indéterminé et faisons

$$220. \quad k = -\mu\lambda + t\alpha; \quad k' = +\mu\lambda' - t\beta;$$

on en déduira sans peine:

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0,$$

et si l'on fait

$$\varrho = m + \alpha k - \beta k',$$

on vérifiera aisément l'équation

$$\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} = \frac{\varrho}{\alpha + \beta i} - k - k' i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right) = \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i} - k\omega - k' i\omega\right)$$

or suivant (22.) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'} \cdot \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i}\right),$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right) = (-1)^{-k-k'} \cdot \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\pm\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de  $\varrho$  deviendra, en y substituant les valeurs de  $k$  et  $k'$ :

$$\varrho = m \mp \mu(\lambda\alpha + \lambda'\beta) + t \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$$

d'où l'on voit, qu'on peut prendre  $t$  tel que la valeur de  $\varrho$ , positive ou négative, soit inférieure à  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ . Donc etc.

Cela posé: soit  $\varrho$  plus grand que  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{4} - 1 (= \nu - 1)$  et faisons

$$\varrho = \nu + \theta.$$

Toutes les racines de l'équation  $T=0$  seront représentées par la formule (218'); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit p. ex.

$$\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

on auroit selon (31.), (en remarquant que  $\varpi = \omega$ )

$$\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n} \cdot \frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i} + (m+ni)\omega,$$

d'où l'on tire:

$$\alpha n + \beta m = 0; \quad \varrho = (-1)^{m+n} \cdot \varrho' + \alpha m - \beta n.$$

La première de ces équations donne  $n = -\beta t$ ;  $m = \alpha t$ , où  $t$  est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de  $\varrho$  deviendrait:

$$\varrho = (-1)^{m+n} \cdot \varrho' + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varrho + \varrho'}{\alpha^2 + \beta^2} = t,$$

ce qui est impossible, en remarquant que  $\varrho, \varrho'$  sont tous deux inférieurs à  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ .

Donc les racines différentes entre elles de l'équation  $T=0$  sont au nombre de  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$ . Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant (216.) on en tirera, en remarquant que  $\partial\varphi\alpha = \partial\alpha \cdot f\alpha \cdot F\alpha$ :

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta i) \cdot f(\alpha + \beta i) \delta \cdot F(\alpha + \beta i) \delta \cdot S + \left(\frac{\partial S}{\partial \delta}\right) \cdot \varphi(\alpha + \beta i) \delta \\ & = x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot f\delta \cdot F\delta + T \cdot f\delta \cdot F\delta. \end{aligned}$$

Si maintenant  $T$ , a des facteurs égaux, il faut que  $T$  et  $\frac{\partial T}{\partial x}$  soient égaux

à zero en même tems; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha + \beta i)\delta.F(\alpha + \beta i)\delta = 0;$$

or on a  $\Phi(\alpha + \beta i)\delta = 0$ , donc  $f(\alpha + \beta i)\delta = \pm 1 = F(\alpha + \beta i)\delta$ , et par conséquent

$$S = 0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que  $T$  et  $S$  n'aient point de facteur communs. Par là on voit que l'équation

$$T = 0$$

est du degré  $\alpha^2 + \beta^2 - 1$  par rapport à  $x$ , et aura pour racines les quantités:

$$\pm \Phi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right); \pm \Phi\left(\frac{2\omega}{\alpha + \beta i}\right) \dots \pm \Phi\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} \cdot \frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

En faisant  $x^2 = r$ , on aura une équation

$$219. R = 0$$

du degré  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} = 2\nu$ , et dont les racines seront

$$220. \Phi^2(\delta), \Phi^2(2\delta), \Phi^2(3\delta) \dots \Phi^2(2\nu\delta),$$

ou pour abrégé on a supposé  $\delta = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$ .

Cela posé, on peut aisément résoudre l'équation  $R = 0$ , à l'aide de la méthode de M. Gauss.

Soit  $\varepsilon$  une racine primitive de  $\alpha^2 + \beta^2$ , je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

$$221. \Phi^2(\delta), \Phi^2(\varepsilon\delta), \Phi^2(\varepsilon^2\delta), \Phi^2(\varepsilon^3\delta) \dots \Phi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta).$$

En effet, en faisant

$$222. \varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha^2 + \beta^2),$$

où  $a_m$  est moindre que  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ , on aura:

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \Phi\left(\pm a_m\delta + \frac{t(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha + \beta i}\omega\right) = \Phi(\pm a_m\delta + t(\alpha - \beta i)\omega),$$

c'est-à-dire, en vertu de (22.):

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \pm \Phi(a_m\delta),$$

et par suite:

$$\Phi^2(\varepsilon^m\delta) = \Phi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2\nu-1}$$

sont inégaux entre eux. En effet soit p. ex.  $a_m = a_n$ , on aura

$$223. \varepsilon^n = \pm a_m + t'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Des deux équations (222.) et (223.) on tire, en éliminant  $a_m$ ,

$$\frac{\varepsilon^m + \varepsilon^n}{\alpha^2 + \beta^2} = \text{à un nombre entier.}$$

Donc, en multipliant par  $\varepsilon^m + \varepsilon^n$ ; on trouve que  $\frac{\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}$  est entier, et par suite  $\frac{\varepsilon^{2m-2n} - 1}{\alpha^2 + \beta^2}$ , ce qui est impossible, car  $\varepsilon$  est la racine primitive de  $\alpha^2 + \beta^2$  et  $2m - 2n$  est moindre que  $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ .

Donc les  $2\nu$  nombres 1,  $\alpha$ , etc. sont différentes entre eux et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivans:

$$1, 2, 3, 4 \dots 2\nu - 1.$$

On voit par la formule  $\varphi^2(\varepsilon^m \delta) = \varphi^2(\alpha_m \delta)$ , que les quantités (220.) et (221.) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra résoudre l'équation  $R = 0$  parfaitement de la même manière que l'équation (106.).

On trouvera (116.)

$$224. \quad \varphi^2(\varepsilon^m \delta) = \frac{1}{2\nu} \cdot \left\{ +A + \theta^{-m} \cdot v^{\frac{1}{2\nu}} + s_2 \theta^{-2m} \cdot v^{\frac{2}{2\nu}} + \dots + s_{\nu-1} \theta^{-(\nu-1)m} \cdot v^{\frac{\nu-1}{2\nu}} \right\},$$

où  $\theta$  est une racine imaginaire de l'équation  $\theta^{2\nu} - 1 = 0$ , et  $v, s_2, s_3 \dots \dots s_{\nu-1}$  seront déterminés par les expressions:

$$v = \{ \varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2\nu-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta) \}^{2\nu},$$

$$s_k = \frac{\varphi^2(\delta) + \theta^k \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^{2k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{(2\nu-1)k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta)}{\{ \varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2\nu-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta) \}^k}.$$

$$A = \varphi^2(\delta) + \varphi^2(\varepsilon \delta) + \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta),$$

qui par le procédé tome II. de ce journal pag. 143., 144., 145. peuvent être exprimés rationnellement par les coefficients de l'équation  $R = 0$ , qui seront de la forme  $A + Bi$ , où  $A$  et  $B$  sont des nombres rationels. Donc la formule (224.) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation  $R = 0$ , et par conséquent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \dots \dots \varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ , on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{4\nu + 1}\right),$$

comme il suit.

La valeur de  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i}\right)$  donnera celle de  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha - \beta i}\right)$  en changeant seulement  $i$  en  $-i$ . De là on tire la valeur de  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i} + \frac{m\omega}{\alpha - \beta i}\right)$

par la formule (10.), savoir

$$226. \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right) \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)} + \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)}}{1 - \varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)},$$

$$\text{or } \frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i} = \frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1};$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de  $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$  où  $n$  a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer  $m$  et  $t$  de la manière que

$$n = 2m\alpha - (4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres  $2\alpha$  et  $4\nu+1$  sont premiers entre eux; car alors on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1} + t\omega\right) = (-1)^t \cdot \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant p. ex.  $n=1$ , on aura la valeur de  $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ .

38.

Le cas, où  $4\nu+1$  a la forme  $1+2^n$ , est le plus remarquable; car alors l'expression de  $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$  ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas  $2\nu = 2^{n-1}$ , et par suite la formule (224.) fait voir qu'on peut déduire  $\varphi(\varepsilon^m \delta)$  de  $\theta$  et  $\nu$  en extrayant seulement des racines carrées. Or  $\nu$  est une fonction rationnelle de  $\theta$  et  $\sqrt{-1}$ , et  $\theta$  est déterminée par l'équation  $\theta^{2^{n-1}} - 1$ , d'où l'on tire  $\theta$  par des racines carrées; donc on trouve aussi  $\nu$  et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m \delta) = \varphi\left(\frac{\alpha_m \cdot \omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

Connoissant de cette manière  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ , on aura de même  $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$  et de là, par la formule (226.) la valeur de  $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$ ; en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, où la valeur de  $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$  peut être déterminée par des racines carrées est celui où  $n$  est une puissance de 2, comme nous l'a-

22\*

vons vu No. 13. Donc on connoit les fonctions:

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right); \quad \Phi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right),$$

où dans la dernière  $1+2^n$  est un nombre premier.

Soient maintenant  $1+2^{n_1}$ ,  $1+2^{n_2}$ ,  $1+2^{n_3}$ , . . . .  $1+2^{n_\mu}$  plusieurs nombres premiers, on connoit les fonctions:

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right); \quad \Phi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right); \quad \Phi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right); \quad \dots \quad \Phi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

et de là la fonction:

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{m}{2^n} + \frac{m_1}{1+2^{n_1}} + \frac{m_2}{1+2^{n_2}} + \dots + \frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega \\ &= \Phi\left(\frac{m'\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2})\dots(1+2^{n_\mu})}\right), \end{aligned}$$

où  $m'$  est un nombre entier, qui, à cause des indéterminés  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ , . . .  $m_\mu$  peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: „La valeur de la fonction  $\Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$  peut être exprimée par „des racines carrées toutes les fois que  $n$  est un nombre de la forme „ $2^n$  ou  $1+2^n$ , le dernier nombre étant premier, ou même un produit „de plusieurs nombres de ces deux formes.”

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé no. 22.

Soit l'arc  $AM$  (Fig. 1.)  $= \alpha$  et la corde  $AM = x$ , on aura

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x = \sqrt{(\cos 2\theta)},$$

d'où

$$\partial \theta = - \frac{\partial x \cdot \sqrt{(\cos 2\theta)}}{\sin 2\theta}$$

et

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 + x^2 \cdot \partial \theta^2,$$

donc

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{x^2 \cdot \cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2} \right\};$$

mais de  $x = \sqrt{(\cos 2\theta)}$  on tire  $\cos 2\theta = x^2$ ,  $\cos^2 2\theta = x^4$ ,  $1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$ , donc

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 \left\{ 1 + \frac{x^4}{1-x^4} \right\} = \frac{\partial x^2}{1-x^4},$$

et par suite

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

et

$$x = \Phi(\alpha).$$

Si l'on suppose  $x = 1$ , on aura  $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$ . Donc la circonférence  $AMBN = \omega$ . Supposons maintenant qu'il s'agit de diviser cette circonférence en  $n$  parties égales, et soit l'arc  $AM = \frac{m}{n} \cdot AMBN = \frac{m}{n} \omega$ , on aura

$$AM = \Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Done on aura la corde, et par suite le  $m^{\text{me}}$  point de division, si l'on connoît la fonction  $\Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ ; or c'est cela qui a toujours lieu, lorsque  $n$  est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et  $1 + 2^n$ , comme nous l'avons vu dans le no. précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

### §. IX.

Usage des fonctions  $\Phi$ ,  $f$ ,  $F$  dans la transformation des fonctions elliptiques.

#### 41.

M. Legendre a fait voir dans ses exercices de calc. int., comment l'intégrale  $\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}}$ , qui, en faisant  $\sin \varphi = x$ , se change en  $\int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$ , peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par  $\alpha$  la quantité  $\frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\pi i}{2n+1}$ , où au moins l'un des deux nombres entiers  $m$  et  $\mu$  est premier avec  $2n+1$ , on aura:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2 y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2 x^2)(1+e^2 x^2)]}}, \\
 & \text{où} \\
 227. & \begin{cases} y = f.x \cdot \frac{(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2 \varphi^2 \alpha . x^2)(1+e^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1+e^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)}, \\ \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \frac{f}{e} \left\{ \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + \alpha\right) \cdot \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + 2\alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega i}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ a = f(\varphi \alpha \cdot \varphi 2\alpha \cdot \varphi 3\alpha \dots \varphi n\alpha)^2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$f$  étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités  $c_1$ ,  $e_1$ ,  $c$ ,  $e$ .

Les quantités  $e^2$  et  $c^2$  pourront être positives ou négatives.

Par ce théorème on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de M. Legendre.

## 42.

Soient  $m$  et  $\mu$  deux nombres entiers, et faisons pour abrégé :

$$228. \quad \alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\omega i}{2n+1},$$

où l'on suppose que l'un des deux nombres  $m$ ,  $\mu$  soit premier avec  $2n+1$ .

En désignant par  $\theta$  une quantité quelconque, il viendra, en vertu de (22.)

$$229. \quad \varphi[\theta + (2n+1)\alpha] = \varphi\theta.$$

En mettant  $\theta - n\alpha$  au lieu de  $\theta$ , on obtiendra :

$$230. \quad \varphi[\theta + (n+1)\alpha] = \varphi(\theta - n\alpha).$$

Cela posé, considérons l'expression suivante

$$231. \quad \varphi_1(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta + \alpha) + \varphi(\theta + 2\alpha) + \dots + \varphi(\theta + n\alpha) + \dots \\ \dots + \varphi(\theta + 2n\alpha).$$

En mettant  $\theta + \alpha$  au lieu de  $\theta$ , il viendra à cause de l'équation (229.):

$$232. \quad \varphi_1(\theta + \alpha) = \varphi_1(\theta),$$

donc si  $m$  désigne un nombre entier quelconque :

$$233. \quad \varphi_1(\theta + m\alpha) = \varphi_1(\theta).$$

En vertu de l'équation 230. on peut écrire l'expression de  $\varphi_1(\theta)$ , comme il suit :

$$234. \quad \varphi_1(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta + \alpha) + \varphi(\theta - \alpha) + \varphi(\theta + 2\alpha) + \varphi(\theta - 2\alpha) + \dots \\ \dots + \varphi(\theta + n\alpha) + \varphi(\theta - n\alpha),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule

$$\varphi(\theta + \nu\alpha) + \varphi(\theta - \nu\alpha) = \frac{2 \cdot \varphi\theta \cdot f(\nu\alpha) \cdot F(\nu\alpha)}{1 + e^2 c^2 (\varphi\theta)^2 [\varphi(\nu\alpha)]^2},$$

$$235. \quad \varphi_1(\theta) = \varphi\theta + \frac{2\varphi\theta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \theta} + \frac{2\varphi\theta \cdot f2\alpha \cdot F2\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot \varphi^2 \theta} + \dots + \frac{2\varphi\theta \cdot fn\alpha \cdot Fn\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot \varphi^2 \theta}.$$

En faisant  $\varphi\theta = x$ ,  $\varphi_1(\theta)$  devient une fonction rationnelle de  $x$ . En la désignant par  $\psi(x)$ , on aura :

$$236. \quad \psi(x) = x \cdot \left\{ 1 + \frac{2f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2} + \dots + \frac{2fn\alpha \cdot Fn\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2} \right\}.$$

43.

Maintenant soit  $\varepsilon$  une quantité quelconque, je dis qu'on aura

$$237. \quad 1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon} = \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2\alpha)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2)(1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)}.$$

En effet il est clair, que la fonction

$$238. \quad R = \left(1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon}\right) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)$$

sera entière et du degré  $2n + 1$ ; mais en faisant  $x = \varphi\varepsilon$ ,  $\psi x$  deviendra  $= \varphi_1 \varepsilon$ , et par suite  $R$  se réduira à zéro pour cette valeur de  $x$ . De même en faisant  $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$ , où  $m$  est entier, on aura  $\psi x = \varphi_1(\varepsilon + m\alpha)$ , c'est à dire, en vertu de (233.),  $\psi x = \varphi_1 \varepsilon$ . Donc  $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon} = 0$ , et par conséquent  $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$  sera une racine de l'équation  $R = 0$ , quel que soit le nombre entier  $m$ . Or généralement toutes les quantités

239.  $\varphi\varepsilon, \varphi(\varepsilon + \alpha), \varphi(\varepsilon + 2\alpha), \dots, \varphi(\varepsilon + 2n\alpha)$  sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\varphi(\varepsilon + m'\alpha) = \varphi(\varepsilon + \mu'\alpha),$$

il en suivrait en vertu de (31.)

$$\varepsilon + m'\alpha = (-1)^{k+k'} \{\varepsilon + \mu'\alpha\} + k\omega + k'\pi i,$$

d'où

$$k + k' = 2k'',$$

$$k = k'' + l; \quad k' = k'' - l,$$

$$(m' - \mu')\alpha = (k'' + l)\omega + (k'' - l)\pi i.$$

De là, en substituant la valeur de  $\alpha = \frac{(m + \mu)\omega + (m - \mu)\pi i}{2n + 1}$ , on tire

$$(m' - \mu')(m + \mu) = (2n + 1)(k'' + l),$$

$$(m' - \mu')(m - \mu) = (2n + 1)(k'' - l)$$

et

$$m' - \mu' = (2n + 1) \cdot \frac{k''}{m} = (2n + 1) \frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parceque nous avons supposé, que l'un des deux nombres  $m$  et  $\mu$  soit premier avec  $2n+1$ , et  $m'-\mu'$  est toujours moindre que  $2n+1$ . Maintenant les  $2n+1$  quantités (239.) étant différentes entre elles, elles sont précisément les  $2n+1$  racines de l'équation  $R=0$ . Donc on a

$$240. R = A \left(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right),$$

où  $A$  est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à  $x$  une valeur particulière; p. ex. en faisant  $x=0$ , on a  $R=A$ ; or l'équation (238.) donne pour  $x=0$ :  $R=1$ , donc  $A=1$ , et par conséquent l'équation (237.) a lieu.

En multipliant cette équation par  $\Phi \varepsilon$  et faisant ensuite  $\varepsilon=0$ , il viendra:

$$241. \psi(x) = g x \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi \alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)},$$

où  $g$  est la valeur de  $\frac{\varphi_1 \varepsilon}{\varphi \varepsilon}$  pour  $\varepsilon=0$ . En faisant  $\theta=0$ , après avoir divisé par  $\Phi \theta$ , on trouve l'expression suivante de cette constante:

$$242. g = 1 + 2f\alpha . F\alpha + 2f2\alpha . F2\alpha + \dots + 2fn\alpha . Fn\alpha.$$

En faisant dans (230.)  $\theta = n\alpha - (m' + 1)\alpha$ , on trouve

$$\Phi(2n\alpha - m'\alpha) = \Phi[-(m' + 1)\alpha] = -\Phi(m' + 1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de  $\psi x$  comme il suit:

$$243. \psi x = g . x . \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 \alpha}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)}.$$

#### 44.

Maintenant faisons dans l'expression de  $1 - \frac{\psi x}{\varphi \varepsilon}$ ,  $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ . En supposant pour abrégé

$$244. \varrho = (1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2),$$

on aura

$$1 - \frac{\psi x}{\varphi \frac{\omega}{2}} = \left(1 - \frac{x}{\varphi \frac{\omega}{2}}\right) \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\} \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2n\alpha\right)}\right\} \cdot \frac{1}{\varrho};$$

or, en faisant dans (230.)

$$\theta = \frac{\omega}{2} + (n - m' - 1)\alpha,$$

on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - (m' + 1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (voy. 17.):

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right),$$

il viendra:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m' + 1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de  $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$  comme il suit:

$$\begin{aligned} 245. \quad 1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}} \\ = (1 - cx) \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho}. \end{aligned}$$

En mettant  $-x$  au lieu de  $+x$ , on aura semblablement

$$\begin{aligned} 246. \quad 1 + \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}} \\ = (1 + cx) \cdot \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho}. \end{aligned}$$

Donc si l'on fait

$$247. \quad y = k \cdot \psi x; \quad c_1 = \frac{1}{k \cdot \varphi_1 \frac{\omega}{2}},$$

où  $k$  est indéterminé, et

$$248. \quad \begin{cases} t = \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right), \\ t_1 = \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right), \end{cases}$$

on aura:

$$249. \quad 1 - c_1 y = (1 - cx) \cdot \frac{t^2}{\varrho}; \quad 1 + c_1 y = (1 + cx) \frac{t_1^2}{\varrho}.$$

De la même manière, en faisant

$$250. \quad \begin{cases} s = \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right), \\ s_1 = \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right), \end{cases}$$

et

$$251. e_1 = \pm \frac{i}{k \cdot \varphi_1 \left( \frac{\varpi}{2} i \right)},$$

on trouvera ces deux équations:

$$252. 1 \mp e_1 i y = (1 - e i x) \cdot \frac{s_1^2}{\rho}; \quad 1 \pm e_1 i y = (1 + e i x) \cdot \frac{s_1^2}{\rho}.$$

Les équations 249. et 252. donneront:

$$(1 - c_1^2 y^2) = (1 - c^2 x^2) \cdot \frac{t_1^2 t_1^2}{\rho^2}; \quad (1 + e_1^2 y^2) = (1 + e^2 x^2) \cdot \frac{s_1^2 s_1^2}{\rho^2}$$

et par conséquent:

$$253. \sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]} = \pm \frac{t_1 s_1 s_{s_1}}{\rho^2} \sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}.$$

Maintenant l'expression de  $y$  donne  $dy = \frac{P}{\rho^2} dx$ , où  $P$  sera une fonction entière de  $x$  du degré  $4n$ , donc:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm \frac{P}{t_1 s_1 s_{s_1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

Or je dis que la fonction  $\frac{P}{t_1 s_1 s_{s_1}}$  se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1 - c_1 y = (1 - c x) \cdot \frac{t^2}{\rho};$$

en différentiant, et mettant pour  $dy$  sa valeur  $\frac{P dx}{\rho^2}$ , on aura

$$P = \frac{t}{c_1} \left\{ c t \rho - (1 - c x) \left( 2 \rho \frac{dt}{dx} - t \frac{d\rho}{dx} \right) \right\}.$$

On voit de là que  $P$  est divisible par  $t$ . De la même manière on prouvera que  $P$  est divisible par les trois fonctions  $t_1$ ,  $s$ ,  $s_1$ . Donc si deux quelconques des quatre fonctions  $t$ ,  $t_1$ ,  $s$ ,  $s_1$  n'ont point de facteur commun,  $P$  sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc  $\frac{P}{t t_1 s s_1}$  est une fonction entière de  $x$ . Or  $P$  est du degré  $4n$ ; et chacune des fonctions  $t$ ,  $t_1$ ,  $s$ ,  $s_1$  est du degré  $n$ . Donc il est prouvé, que  $\frac{P}{t t_1 s s_1}$  est une quantité constante. En la désignant par  $a$ , il viendra

$$254. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

Pour déterminer  $a$  il suffit d'attribuer à  $x$  une valeur particulière. En faisant p. ex.  $x = 0$ , on aura

$$t = t_1 = s = s_1 = 1; \quad P = \rho^2 \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial y}{\partial x} = k \cdot \psi' x.$$

Or en différentiant l'expression de  $\psi x$ , et faisant ensuite  $x = 0$ , il viendra  $\psi'x = g$ , donc

$$255. \quad a = k.g.$$

On peut donner d'autres formes plus simples aux expressions de  $c_1$ ,  $e_1$ ,  $g$ ,  $a$ , et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Par la formule 240. on voit que le coefficient de  $x^{2n+1}$  dans la fonction  $R$  est  $-\frac{A}{\varphi \varepsilon . \varphi(\varepsilon + \alpha) \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}$ ; or d'après 238. le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1 \varepsilon} \cdot \frac{g}{(\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2},$$

donc en remarquant que  $A = 1$ :

$$\varphi_1(\varepsilon) = \frac{(-1)^n . g}{(\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2} . \varphi \varepsilon . \varphi(\varepsilon + \alpha) . \varphi(\varepsilon + 2\alpha) \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha).$$

En faisant dans (236.), (243.)  $x = \frac{1}{2}$ , après avoir divisé par  $x$ , on obtiendra deux valeurs de  $\frac{\psi x}{x}$ , savoir

$$1 \text{ et } \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n} (\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2},$$

donc, en les égalant:

$$256. \quad g = (-1)^n . (ec)^{2n} (\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2,$$

et par conséquent:

$$257. \quad \varphi_1(\varepsilon) = (ec)^{2n} (\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2 \varphi \varepsilon . \varphi(\varepsilon + \alpha) . \varphi(\varepsilon + 2\alpha) \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha) \\ = \varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon + \alpha) + \varphi(\varepsilon + 2\alpha) + \dots + \varphi(\varepsilon + 2n\alpha).$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction  $\varphi$ . En y posant  $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$  et  $\varepsilon = \frac{\omega}{2}i$ , on obtiendra

$$258. \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{k c_x} = (ec)^{2n} . \delta^2 \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) . \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2n\alpha\right), \\ \varphi_1\left(\frac{\omega}{2}i\right) &= \frac{\pm 1}{k e_x} = (ec)^{2n} . \delta^2 \varphi\left(\frac{\omega}{2}i\right) . \varphi\left(\frac{\omega}{2}i + \alpha\right) \dots \varphi\left(\frac{\omega}{2}i + 2n\alpha\right), \end{aligned} \right.$$

où l'on a fait pour abréger

$$259. \quad \delta = \varphi \alpha . \varphi 2\alpha . \varphi 3\alpha \dots \varphi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m' + 1)\alpha\right)$$

et

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}i + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}i + (m' + 1)\alpha\right),$$

et faisant

$$260. \quad k(e^2 c^2)^n \cdot \delta^2 = f^2,$$

on tire de ces équations

$$261. \quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \pm \frac{f}{e} \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right) \right\}^2. \end{cases}$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18.)

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right) = \frac{i}{ec};$$

on obtiendra

$$\pm \frac{1}{c_1 e_1} = \frac{(-1)^n \cdot f^2}{(ec)^{2n+1}},$$

d'où

$$262. \quad c_1 e_1 = \pm \frac{(ec)^{2n+1} \cdot (-1)^n}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra:

$$263. \quad \begin{cases} \pm \frac{e_1}{c_1} = (-1)^n \cdot \frac{e}{c} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^4, \\ \pm \frac{c_1}{e_1} = (-1)^n \cdot \frac{c}{e} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right) \right\}^4, \end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé  $a = k \cdot g$ , et  $g = (-1)^n \cdot (ec)^{2n} \delta^4$ , donc

$$264. \quad a = f \cdot \delta^2 \cdot (-1)^n.$$

Également nous avons trouvé  $y = k \cdot \psi(x)$ , donc en vertu de (243.)

$$265. \quad y = (-1)^n f \cdot x \frac{(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)(\varphi^2 3\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2)(1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)}.$$

Donc ces valeurs précédentes de  $c_1$ ,  $e_1$ ,  $a$  et  $y$  donneront:

$$266. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm \frac{a \partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}},$$

et de là

$$267. \quad \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm a \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

45.

Les formules (261.) donnent les valeurs des quantités  $c_1$  et  $e_1$ , exprimées en  $c$  et  $e$  à l'aide de la fonction  $\Phi$ . Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \right\}^2 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{f\alpha}{F\alpha} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1 - c^2 \varphi^2 \alpha}{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}$$

et

$$\left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right) \right\}^2 = -\frac{1}{e^2} \left( \frac{F\alpha}{f\alpha} \right)^2 = -\frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}{1 - c^2 \varphi^2 \alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de  $c_1$  et  $e_1$  pourront être exprimées en

fonctions rationnelles et symétriques des quantités  $\Phi\alpha, \Phi 2\alpha, \dots, \Phi n\alpha$ . Donc si  $2n+1$  est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu §. V., déterminer  $c_1$  et  $e_1$  à l'aide d'une équation algébrique du  $(2n+2)^{\text{me}}$  degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où  $2n+1$  est un nombre composé. Alors on peut même déterminer  $c_1$  et  $e_1$  à l'aide d'une équation d'un degré moindre que  $2n+2$ .

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes pour chaque valeur de  $2n+1$ .

## 46.

On a supposé dans ce qui précède que  $e$  et  $c$  soient des quantités réelles et positives; mais ayant exprimé  $c_1$  et  $e_1$  en  $e$  et  $c$  par des équations algébriques, il est clair que la formule (266.) aura lieu également en donnant à  $e$  et  $c$  des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où  $e^2, c^2$  sont réelles, on peut même se servir des expressions (261.), (265.). Mais alors  $\omega$  et  $\varpi$  ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités  $c_1$  et  $e_1$ , à cause de l'indéterminée  $f$ , peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

## 47.

Si l'on suppose  $c$  et  $e$  réels et  $2n+1$  premier, les valeurs de  $c_1$  et  $e_1$  seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond à

$$\alpha = \frac{2m \cdot \omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha = \frac{2\mu \varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha = + \frac{2m \cdot \omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261.):

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2 \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \right\}^2.$$

Soit  $\mu \cdot 2m = (2n+1)t \pm a_m$ , où  $t$  est entier et positif, et moindre que  $\frac{2n+1}{2}$ , on aura

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \mu \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) &= \Phi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m \omega}{2n+1} + \frac{t\omega}{2}\right) = (-1)^t \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m \omega}{2n+1}\right) \\ &= \pm \Phi\left(\frac{2n+1-2a_m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

Or les nombres  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  seront les mêmes que les suivants 1, 2, 3,  $\dots, n$ ; mais dans un ordre différent; donc l'expression de  $\frac{1}{c_r}$  pourra être mise sous la forme

$$268. \frac{1}{c_r} = \frac{f}{c} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2.$$

De même l'équation (263.) donnera

$$269. \frac{e_i}{c_r} = \pm (-1)^n \cdot \frac{e}{c} \cdot (ec)^{2n} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^4,$$

Soit maintenant  $c = 1, c_1 = 1$ , on aura, en posant  $\pm (-1)^n = 1$ :

$$269'. e_i = e^{2n+1} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^4,$$

$$270. \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \pm a \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

$$271. y = (-1)^n f x \cdot \frac{\left\{ \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \left\{ \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \dots \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\}},$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}},$$

$$272. a = f \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \dots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) \right\}^2 (-1)^n$$

ou bien

$$273. a = \left\{ \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \dots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\}^2 \cdot (-1)^n.$$

Si l'on suppose  $e$  moindre que l'unité ou égale à l'unité,  $e_1$  sera toujours moindre que  $e$ , et lorsque  $2n+1$  est un très grand nombre,  $e_1$  sera extrêmement petit.

48.

Le signe du second membre de l'équation 270. dépend de la grandeur de  $x$ .

Il pourra être jugé aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]} = \pm \frac{t t_1 s s_1}{\rho^2} \sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}.$$

En supposant  $x$  réel,  $\rho^2$  sera toujours fini et positif, de même que  $\sqrt{(1+e_1^2 y^2)}$  et  $\sqrt{(1+e^2 x^2)}$ . Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$t t_1 s s_1 \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)};$$

maintenant on a

$$s.s_1 = \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}i + n\alpha\right)}\right);$$

or  $\Phi\left(\frac{\omega}{2}i + \alpha\right) = \frac{i}{e} \cdot \frac{F\alpha}{f\alpha}$  etc.,

donc

$$s.s_1 = \left\{1 + \left(\frac{f\alpha \cdot x}{e \cdot F\alpha}\right)^2\right\} \dots \left\{1 + \left(\frac{fn\alpha \cdot x}{e \cdot Fn\alpha}\right)^2\right\},$$

donc, en remarquant que  $\alpha$  est réel dans le cas que nous considérons, on voit que  $s.s_1$  sera toujours une quantité positive; or  $t.t_1$  est réel, donc la quantité  $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$  sera positive également, et par conséquent le signe, dont il s'agit, sera le même, que celui de la quantité  $tt_1$ . Il n'est pas difficile de voir qu'en vertu de (248.) et en mettant pour  $\alpha$  sa valeur  $\frac{2m\omega}{2n+1}$ , on aura

$$tt_1 = \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\} \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\}$$

quantité qui est positive depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=\Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ , négative depuis  $x=\Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$  jusqu'à  $x=\Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ , positive depuis  $x=\Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$  jusqu'à  $x=\Phi\left(\frac{5}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$  etc. Si  $x$  est plus grand que l'unité,  $tt_1$  aura toujours le même signe, savoir  $(-1)^n$ .

Donc, dans ce cas l'équation (270.) donnera, en intégrant et commençant l'intégrale par  $x=1$ :

$$274. \int_1^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(y^2-1)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(x^2-1)(1+e^2 x^2)]}}.$$

Si la valeur de  $x$  est moindre que l'unité, on aura

$$275. \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites

$$x = \Phi\left(\frac{4m-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \text{ et } x = \Phi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$$

et

$$276. -\int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites  $x = \Phi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$  et  $x = \Phi\left(\frac{4m+3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ .

Si p. ex. on suppose  $x$  renfermé entre les limites

$$-\phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \text{ et } +\phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant et commençant l'intégrale par  $x=0$ ,

$$277. \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

En faisant  $x = \phi\left(\frac{\omega}{(2n+1) \cdot 2}\right)$ , on aura  $y = (-1)^n$ , et par suite:

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \frac{a \cdot \omega}{2(2n+1)} (-1)^n,$$

d'où

$$278. (-1)^n \cdot a = \frac{4n+2}{\omega} \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}}.$$

Cette expression de  $a$  est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre  $e_1^2$ , on obtiendra

$$279. (-1)^n \cdot a = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours  $e_1^2$  la formule (277.) donnera

$$280. \begin{cases} \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} = \frac{\omega}{(2n+1)\pi} \cdot \text{arc. sin.}(y), \\ y = (2n+1) \frac{\pi}{\omega} \cdot x \frac{\left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}}{\left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) x^2\right\} \dots \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2\right\}}. \end{cases}$$

B. Dans le cas  $\alpha = \frac{2\mu\pi i}{2n+1}$ , on trouvera de la même manière la formule suivante

$$281. \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} = a' \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1} \cdot \left\{ \phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \dots \phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \right\}^4},$$

$$a' = \frac{1}{e^n \left\{ \phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \cdot \phi\left(\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \dots \phi\left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\pi i}{2}\right) \right\}},$$

$$y = \frac{e^{n+i}}{\sqrt{e_1}} \cdot x \frac{\left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{\pi i}{2n+1}\right)\right\} \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{2\pi i}{2n+1}\right)\right\} \dots \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{n\pi i}{2n+1}\right)\right\}}{\left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\pi i}{2n+1}\right) x^2\right\} \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{2\pi i}{2n+1}\right) x^2\right\} \dots \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\pi i}{2n+1}\right) x^2\right\}},$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de  $x$  moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudroit connoître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer, qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles, contenues dans la formule ci-dessus, même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Ce théorème dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

§. X.

Sur l'intégration de l'équation séparée

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+\mu y^2)]}} = a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+\mu x^2)]}}.$$

50.

On peut toujours comme on sait présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante  $a$  est un nombre rationel, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de  $\mu$ . Mais si  $a$  n'est pas un nombre rationel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivans:

**Théorème I.** En supposant  $a$  réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que  $a$  soit un nombre rationel.

**Théorème II.** En supposant  $a$  imaginaire, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que  $a$  soit de la forme  $m \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n}$ , où  $m$  et  $n$  sont des nombres rationels. Dans ce cas la quantité  $\mu$  n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de  $\mu$  satisfait à la question.

La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paroitra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270.) on pose

$$e = \frac{1}{e},$$

et si à la place de  $x$ , il viendra

$$282. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = a \sqrt{-1} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

où

$$283. y = \pm \sqrt{-1} \cdot e^{\frac{\pi}{2n+1}} x \frac{\left\{ \varphi^2 \left( \frac{\omega}{2n+1} \right) - x^2 \right\} \dots \left\{ \varphi^2 \left( \frac{n\omega}{2n+1} \right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2 \left( \frac{\omega}{2n+1} \right) - x^2 \right\} \dots \left\{ 1 + e^2 \varphi^2 \left( \frac{n\omega}{2n+1} \right) - x^2 \right\}}$$

est déterminé par l'équation (269') qui deviendra

$$284. \begin{cases} 1 = e^{n+1} \cdot \left\{ \varphi \left( \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2} \right) \dots \varphi \left( \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2} \right) \right\}^2 \\ \text{et } a \text{ par:} \\ a = \left\{ \frac{\varphi \left( \frac{\omega}{2n+1} \right) \dots \varphi \left( \frac{n\omega}{2n+1} \right)}{\varphi \left( \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2} \right) \dots \varphi \left( \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2} \right)} \right\}^2 \cdot \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Donc on connoit une intégrale particulière de l'équation (282.) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de  $a$  est  $\sqrt{2n+1}$ ; ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282.)  $y = z\sqrt{-1}$ , et intégrant entre les limites zéro et  $\varphi \left( \frac{\omega}{4n+2} \right)$ , il viendra

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2 z^2)]}} = a \cdot \frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de  $z$  seront zéro et  $\frac{1}{e}$ . En faisant de même  $x = z\sqrt{-1}$ , et intégrant entre les limites zéro et  $\frac{1}{e}$ , on trouvera que les limites de  $y$  seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = \frac{\omega}{2} = a \cdot \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2 z^2)]}} = a \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2} = a \cdot \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire

$$285. a = \sqrt{2n+1},$$

$$286. \frac{\omega}{\pi} = \sqrt{2n+1}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra:

$$287. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{(2n+1)} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où  $n=1$  et  $n=2$ .

A. Si  $n=1$ , on aura:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = \sqrt{-3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}},$$

$$y = \sqrt{-1} \cdot e \cdot x \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) \cdot x^2}.$$

$e$  est déterminé par l'équation:

$$1 = e^2 \left\{ \varphi\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{6}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{\sqrt{[1 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)]}}{\sqrt{[1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)]}},$$

donc

$$1 = e^2 \cdot \frac{1 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{e^2 - e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}.$$

Maintenant on trouvera en combinant les deux équations et remettant pour  $a$  sa valeur  $\sqrt{3}$ :

$$\sqrt{3} = e \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1 = \frac{e^2 - e\sqrt{3}}{1 + e\sqrt{3}},$$

de là

$$e^2 - 2\sqrt{3} \cdot e = 1$$

et

$$e = \sqrt{3} + 2.$$

Ayant trouvé  $e$ , on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Donc on aura l'équation différentielle:

$$288. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 y^2)]}} = \sqrt{-3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 x^2)]}},$$

24\*

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique:

$$y = \sqrt{-1} \cdot x \frac{\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) \cdot x^2}{1 + \sqrt{3}(2 + \sqrt{3}) \cdot x^2}.$$

Si l'on pose  $x\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$  au lieu de  $x$ , et  $y\sqrt{(2 - \sqrt{3})} \cdot \sqrt{-1}$  au lieu de  $y$ , on obtiendra l'équation:

$$289. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - 2\sqrt{3} \cdot y^2 - y^4)]}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 + 2\sqrt{3} \cdot x^2 - x^4)]}},$$

qui sera satisfaite par

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{3} - x^2}{1 + \sqrt{3} \cdot x^2}.$$

B. Si  $n = 2$ , on aura l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 + e^2 y^2)]}} = \sqrt{-5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 + e^2 x^2)]}},$$

où

$$y = \sqrt{-1} \cdot e^2 \cdot x \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot x^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot x^2},$$

$$290. 1 = e^3 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right); \quad \sqrt{5} = e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).$$

On a

$$291. \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}, \\ \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right) - \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right) + e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right) + \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right) - e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

En multipliant ces valeurs de  $\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$  et  $\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$  entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\omega}{5}\right) = -f\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\omega}{5}\right) = F\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$-P = \frac{P^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1 - e^4 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot P^2},$$

où l'on a fait pour abrégér

$$P = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Cela posé, les équations (290., 291.) donneront

$$1 = e^3 \cdot P^2, \quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\frac{1}{e^3} - \frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{e}} = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

et de là

$$\sqrt{e} = \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

$$e^3 - 1 - (5 + 2\sqrt{5})e(e - 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e = 1, \quad e = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})}, \quad e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})}.$$

La dernière de ces racines

$$e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})} = \left[ \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2} \right]^2$$

répond à la question, car l'équation

$$1 = e^3 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que  $e$  doit être plus grand que l'unité. Connoissant  $e$ , on trouve

la valeur des quantités  $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$  et  $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$  comme il suit:

Nous avons

$$1 = e^3 \cdot P^2 = e^3 \cdot \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant  $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \alpha$  et  $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \beta$ , on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 - \alpha^2; \quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 - \beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \alpha^2; \quad F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \beta^2,$$

donc:

$$\begin{aligned}(1 + e^2 \alpha^2)(1 + e^2 \beta^2) &= e^3(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), \\ 1 + e^2(\alpha^2 + \beta^2) + e^4 \alpha^2 \beta^2 &= e^3 - e^3(\alpha^2 + \beta^2) + e^3 \alpha^2 \beta^2, \\ e^3 - 1 - e^3(e - 1) \cdot \alpha^2 \beta^2 &= e^3(e + 1) \cdot (\alpha^2 + \beta^2); \end{aligned}$$

or nous avons trouvé plus haut  $\alpha^2 \beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$ , donc:

$$e^3 - 1 - e(e - 1)\sqrt{5} = e^2(e + 1)\{\alpha^2 + \beta^2\}.$$

Donc on connoit  $\alpha^2 \beta^2$  et  $\alpha^2 + \beta^2$  et par suite  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de  $y$ , qui satisfait à l'équation:

$$\begin{aligned} 292. \quad & \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5}))^2} \cdot y^2)]}} \\ &= \sqrt{-5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5}))^2} \cdot x^2)]}}. \end{aligned}$$

Si l'on pose  $\frac{x}{\sqrt{e}}$  au lieu de  $x$ , et  $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$  au lieu de  $y$ , on obtiendra l'équation

$$293. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[1 - 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} \cdot y^2 - y^4]}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[1 + 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} \cdot x^2 - x^4]}},$$

où

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5}) \cdot x^2 + x^4}}{1 + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5}) \cdot x^2 + x^4}}.$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, il n'étoit pas difficile de trouver la valeur de la quantité  $e$ , mais la valeur de  $n$  étant plus grande, on parviendra à des équations algébriques, qui peut être ne seront pas résolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de  $e$  par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici:

En faisant dans la formule (206.) du VII<sup>me</sup> §.  $\alpha = 1$ , on aura, en remarquant que  $c = 1$ ,  $\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}$ ,

$$e\omega = 4\pi \left\{ \frac{e^4}{e^2 + 1} + \frac{e^3}{e^6 + 1} + \frac{e^5}{e^{10} + 1} + \dots \right\},$$

où

$$e = h^{\frac{\omega}{2} \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204.):  $\alpha = \frac{\omega}{2}i$ , on aura  $\varphi\left(\frac{\omega}{2}i\right) = \frac{i}{e}$ ;  $\varepsilon = h^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ , donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\pi}{\omega} \cdot \left\{ \frac{i - \frac{1}{i}}{r + r^{-1}} - \frac{i^3 - i^{-3}}{r^3 + r^{-3}} + \dots \right\},$$

c'est-à-dire

$$\omega = 4\pi \cdot \left\{ \frac{r}{r^2 + 1} + \frac{r^3}{r^6 + 1} + \frac{r^5}{r^{10} + 1} + \dots \right\},$$

où

$$r = h^{\frac{\omega}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\omega} = \sqrt{(2n+1)},$$

et par conséquent

$$292. \quad \omega = 4\pi\sqrt{(2n+1)} \cdot \left\{ \frac{h^{\frac{\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{\pi\sqrt{(2n+1)}} + 1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{3\pi\sqrt{(2n+1)}} + 1} + \dots \right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Ensuite on aura la valeur de  $e$  par la formule qui, en substituant pour

$\varrho$  sa valeur  $h^{\frac{\omega}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \cdot \frac{\pi}{2}}$ , donne

$$293. \quad e = \frac{4\pi}{\omega} \left\{ \frac{h^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{\pi}{\sqrt{(2n+1)}}} + 1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{3\pi}{\sqrt{(2n+1)}}} + 1} + \dots \right\}.$$

$h$  est le nombre 2,7182818....

### Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. T. Jacobi, insérée dans le No. 123. année 1827. du recueil de Mr. Schumacher, qui a pour titre „*Astronomische Nachrichten*,” m'est venu sous les yeux. Mr. Jacobi donne le théorème suivant:

Soit  $p$  un nombre impair et  $\theta$  un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale  $\int \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}}$  prise de 0 jusqu'à  $\theta$ , par  $F(k, \theta)$ :

$$F(k, \theta') = \frac{1}{p} \cdot F(k, 90^\circ);$$

et en général  $\theta^{(m)}$  un angle tel, qu'on ait

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot F(k, 90^\circ):$$

soit déterminé encore l'angle  $\psi$  par l'équation

$$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\psi) = \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \cdots \frac{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} + \theta)}{\tan \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} - \theta)} \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\theta),$$

on aura :

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(\lambda, \psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si  $p$  est de la forme  $4n+1$ , et le signe inférieur, si  $p$  est de la forme  $4n-1$ .  $\psi$  doit être pris entre  $\frac{m}{2}\pi$  et  $\frac{m+1}{2}\pi$ , si  $\theta$  tombe entre  $\theta^{(m)}$  et  $\theta^{(m+1)}$ . Les constantes  $\mu$  et  $\lambda$  se déterminent de différentes manières. On a p. ex.

$$\mu = \frac{1}{2(\operatorname{cosec} \theta' - \operatorname{cosec} \theta'' + \dots + \cos \theta^{(p-2)} + \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin \theta' - \sin \theta'' + \dots + \sin \theta^{(p-2)} + \frac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant, que M. Jacobi donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227.) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270.)

Nous allons démontrer cela.

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}},$$

$$x = \sin \theta,$$

on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{\partial \theta}{\sqrt{[(1-k^2 \sin^2 \theta)]}},$$

mais

$$x = \varphi \alpha,$$

donc:

$$\alpha = F(k, \theta) \text{ donne } \sin \theta = \varphi \alpha.$$

Si  $\theta = 90^\circ$ , on a  $x = 1$ , donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

Donc en faisant  $\theta = \theta^{(m)}$ , on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2} \text{ et } \sin \theta^{(m)} = \varphi \left( \frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2} \right).$$

Cela posé, faisons dans (269'. et 270.):

$$e_x^2 = -\lambda^2, \quad e^2 = -k^2, \quad \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n \cdot \sin \theta, \quad y = \sin \psi, \quad 2n+1 = p,$$

il viendra :

$$(1.) \int \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} = \pm \mu \int \frac{\partial \psi}{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)}} + C,$$

où les quantités  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  sont déterminés par les équations

$$\lambda = k^{2n+1} \cdot \{\sin \theta' \cdot \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(2n-1)}\}^2,$$

$$\mu = \frac{\{\sin \theta' \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(2n-1)}\}^2}{\{\sin \theta' \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(2n)}\}},$$

$$\sin \psi = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \theta \frac{\{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta\} \{\sin^2 \theta'' - \sin^2 \theta\} \dots \{\sin^2 \theta^{(2n)} - \sin^2 \theta\}}{\{1 - k^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \theta\} \{1 - k^2 \sin^2 \theta'' \sin^2 \theta\} \dots \{1 - k^2 \sin^2 \theta^{(2n)} \sin^2 \theta\}}.$$

Nous supposons  $k$  moindre que l'unité, car dans le cas contraire  $\omega$  sera une quantité imaginaire.

Cela posé, considérons les équations 249. En remarquant que  $c_1 = c = 1$ , on en tire

$$\sqrt{\left(\frac{1-y}{1+y}\right)} = \frac{t}{t_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)},$$

où

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) + x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) + x} \dots \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) + x},$$

c'est-à-dire en faisant  $\alpha = \frac{2m\alpha}{2n+1}$  et  $m = -1$ :

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x} \dots \frac{(-1)^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x}{(-1)^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x}.$$

Maintenant on a

$$x = (-1)^n \cdot \sin \theta, \text{ et } \varphi\left(\frac{m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) = \sin \theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin \psi}{1+\sin \psi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1-(-1)^n \cdot \sin \theta}{1+(-1)^n \cdot \sin \theta}\right)} \cdot \frac{\sin \theta' - \sin \theta}{\sin \theta' + \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta'' + \sin \theta}{\sin \theta'' - \sin \theta} \dots \frac{\sin \theta^{(2n-1)} + (-1)^n \sin \theta}{\sin \theta^{(2n-1)} - (-1)^n \sin \theta},$$

et de là

$$\begin{aligned} & \tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) \\ &= \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \dots \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} + (-1)^n \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} - (-1)^n \theta)} \tan [45^\circ - (-1)^n \theta]. \end{aligned}$$

C'est précisément la formule de Mr. Jacobi.

Dans la formule (1.), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm \partial \psi = \frac{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)}}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} \cdot \partial \theta.$$

En supposant  $\theta$  toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur  $\psi$  de sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même tems avec  $\theta$ , on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0 \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} = \mu \int_0 \frac{\partial \psi}{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)}},$$

ou bien

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(\lambda, \psi).$$

De la remarque que  $\psi$  doit être croissant et décroissant en même tems avec  $\theta$ , et en ayant égard à la formule, on tirera aisément la conséquence que  $\psi$  doit tomber entre  $\frac{m}{2}\pi$  et  $\frac{m+1}{2}\pi$ , si  $\theta$  tombe entre  $\theta^{(m)}$  et  $\theta^{(m+1)}$

Quant aux quantités  $\lambda$  et  $\mu$ , il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de Mr. Jacobi. Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que  $\lambda$  est extrêmement petit, si  $h$  est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule 257.