

Das homogene Gravitationsfeld und die Lorentztransformationen.

Von **Karl Bollert** in Berlin-Friedenau.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 4. Juni 1922.)

Der Zusammenhang zwischen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist dadurch hergestellt, daß es in einem beliebigen Gravitationsfeld für die Umgebung eines jeden Weltpunktes lokale starre Bezugssysteme gibt, in denen die spezielle Relativitätstheorie gilt. Es sind das diejenigen infinitesimalen Bezugssysteme, welche frei beweglich sind, und daher an der Gravitationsbewegung teilnehmen. In bezug auf diese ist für alle freibeweglichen Körper, deren Massen so klein sind, daß ihre Rückwirkung auf das Feld vernachlässigt werden kann, die Gravitationsbeschleunigung in der Umgebung des Weltpunktes gleich Null. In einem solchen lokalen Inertialsystem ist also kein Gravitationsfeld mehr vorhanden. Freibewegliche Körper bewegen sich nach dem Trägheitsgesetz, Uhren und Maßstäbe verhalten sich den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie entsprechend. Die relativ zu dem ursprünglichen Gravitationsfeld ruhenden Gegenstände, hängende Lampen usw., führen eine der Gravitationsrichtung entgegengesetzte beschleunigte Bewegung aus, deren Ursache von einem in dem Inertialsystem ruhenden Beobachter in den elastischen Spannungen der Aufhängevorrichtung gefunden wird.

Die lokalen Inertialsysteme haben in einem beliebigen Gravitationsfeld, der von Weltpunkt zu Weltpunkt variierenden Beschaffenheit des Feldes entsprechend, selbst eine relative Beschleunigung in bezug aufeinander: Es ist also im allgemeinen nicht möglich für einen endlichen Bereich das Gravitationsfeld fortzutransformieren. Unter einem homogenen Gravitationsfeld soll ein solches verstanden werden, dessen Feldwirkung für seine ganze Ausdehnung, von einem geeigneten starren System aus betrachtet, verschwindet. Nach der klassischen Mechanik würden in diesem starren Inertialsystem alle in dem ursprünglichen Gravitationsfeld ruhenden Körper gleiche, von Ort und Zeit unabhängige Beschleunigungen haben. Da in dem Inertialsystem die spezielle Relativitätstheorie gelten soll, ist, wie wir gleich sehen werden, ein solches Verhalten unmöglich. Wir wollen uns die Verhältnisse in dem Inertialsystem anschaulich vor Augen führen, indem wir nach dem Beispiel von Minkowski uns auf die Vorgänge in einer Ebene beschränken. Wir erhalten dadurch die Möglichkeit, uns die aufeinanderfolgenden zeitlichen Zustände durch Übereinander-

schichten im dreidimensionalen Raume graphisch darzustellen (Fig. 1). Wir wollen das Inertialsystem so wählen, daß es zu Beginn der Zeit-zählung mit dem Ruhssystem zusammenfällt. Die Weltlinien von freibeweglichen Massenpunkten, die zur Zeit $t = 0$ relativ zu dem Gravitationssystem ruhten, sind dann zur t -Achse parallele Gerade, und mit ihnen verbundene objektiv gleiche Uhren, die zu Beginn

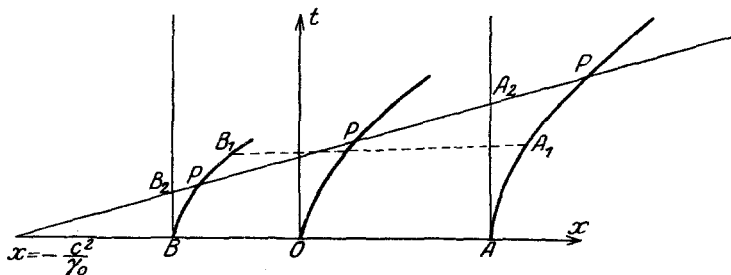


Fig. 1.

der Zeit-zählung die gleiche Zeigerstellung hatten, werden in jeder zur t -Achse senkrechten Ebene wieder eine gleiche Zeigerstellung aufweisen. Die Weltlinien der relativ zum Gravitationsfeld ruhenden Gegenstände würden nach der klassischen Mechanik Parabeln sein, deren Gleichungen in dem Minkowskischen Körper die Form

$$s = (x - x_0) = \frac{1}{2} \gamma t^2 \quad (1)$$

besitzen würden, wo γ eine konstante Größe ist.

Für beliebige Werte von t ist das in der speziellen Relativitätstheorie ohne weiteres ausgeschlossen, da dann die Geschwindigkeit dieser materiellen Punkte P über jede Grenze hinauswachsen würde. Aber auch für hinreichend kleine t können die Bewegungsgleichungen nicht die erwähnte Form mit konstantem γ besitzen, denn das würde bedeuten, daß die Ruhbeschleunigung der starr miteinander verbundenen Punkte der x -Achse konstant ist. Ihre Weltlinien würden also, wie Herr M. Born ermittelt hat, kongruente Hyperbeln sein, und die Länge eines starren, in der Bewegungsrichtung liegenden Stabes wäre für den Beobachter im Inertialsystem unabhängig von seiner Geschwindigkeit. Ein solcher Stab AB von der Ruhlänge dx muß aber, wenn er die Geschwindigkeit v erlangt hat, die Lorentzverkürzung

$$dx \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

aufweisen. Dies ist offenbar nur möglich, wenn sein für den Inertialbeobachter vorderes Ende in derselben Zeit einen kleineren Weg

zurücklegt als sein hinteres Ende. Bezeichnen wir die Koordinate seines vorderen Endes A zu Beginn der Bewegung mit x_a , seines hinteren Endes B mit x_b , die Geschwindigkeiten entsprechend mit v_a und v_b , wo v_a und v_b nicht nur Funktionen von t sondern auch von x_a beziehungsweise von x_b sind, zwischen denen für dasselbe t die Beziehung besteht $v_a = v_b + \frac{\partial v_b}{\partial x} dx$, so ist hiernach die Lorentzkontraktion

$$s_b - s_a = \int_0^t v_b dt - \int_0^t v_a dt \quad \text{oder} \\ - \int_0^t \frac{\partial v_b}{\partial x} dx dt = dx \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

Durch Division von dx und Differentiation nach t ergibt sich

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)}{\partial t} = \frac{\frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Durch nochmalige Differentiation nach t unter Vertauschung der Differentiationsfolge auf der linken Seite folgt daraus

$$-\frac{\partial \frac{\partial v}{\partial t}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{v}{c \sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \frac{v}{c \sqrt{c^2 - v^2}}}{\partial t}.$$

Für den langsam bewegten Punkt ergibt sich

$$-\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = \frac{\dot{v}^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad -\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} = \frac{\partial x}{c^2}.$$

Die Integration ergibt $\frac{1}{v} = \frac{x}{c^2} + C$. Für $x = 0$ finden wir $C = \frac{1}{v_0}$.

Es besteht also zwischen der Ruhbeschleunigung im Koordinatenanfangspunkt γ_0 und der Ruhbeschleunigung γ in der Entfernung x die Beziehung

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}. \quad (2)$$

Da es sich nur um die Ermittlung der Ruhbeschleunigung handelt, hätten wir die Rechnung einfacher gestalten können, wenn wir, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß γ eine Funktion von x ist, von der Gleichung (1) ausgegangen wären.

Es wäre dann $s = \frac{\gamma}{2} t^2$ und

$$s_b - s_a = \frac{\gamma}{2} t^2 - \left(\frac{\gamma + d\gamma}{2} \right) t^2 = dx \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

$$\text{Also } \frac{d\gamma t^2}{dx} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Setzen wir $v = \gamma t$, so ergibt sich für $t = 0$

$$-\frac{d\gamma}{dx} = \frac{\gamma^2}{c^2}$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung oben. Setzen wir also in (1) für γ den Wert (2) ein, so ist (1) für kleine t die Gleichung eines der starr verbundenen im Gravitationsfeld ruhenden Punkte der x -Achse.

Die zweite Aufgabe, die wir zu lösen haben, ist die Bestimmung der Zeitfläche für den im Gravitationsfeld befindlichen Beobachter, d. h. die Ermittlung des Ortes aller derjenigen Weltpunkte, die für diesen Beobachter gleichzeitige Ereignisse darstellen. Auch hierfür liefert uns die spezielle Relativitätstheorie die notwendigen Grundlagen. Der eigentliche Gehalt der Lorentztransformationen liegt in der Verschiedenheit der Zeitmessung für zwei Beobachter, die relativ zueinander eine Geschwindigkeit haben. Lägen für beide die gleichzeitigen Ereignisse auf derselben Zeitebene, so würde ein Lichtkegel, der vor dem Koinzidenzpunkt der beiden Beobachter sich ausbreitete, von der Zeitebene in Kreisen geschnitten werden, die für den bewegten Beobachter exzentrisch sind. Dieser würde sich also nicht im Mittelpunkt der Kugelwellen befinden, sondern die Lichtgeschwindigkeit würde in irgend einem Punkte der x -Achse in der positiven Richtung eine andere sein als in der negativen. Die Zeitebene muß deshalb für den bewegten Beobachter so geneigt sein, daß auch dieser sich dauernd im Mittelpunkt der Lichtwelle befindet. Dieses Axiom von der Umkehrbarkeit des Lichtweges, welches schon der speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegt, wollen wir in die allgemeine mit herübernehmen. Um die Zeitfläche für den Gravitationsbeobachter zu erhalten, müssen wir also durch den Raum-Zeit-Körper diejenige Fläche legen, die aus allen infinitesimalen Lichtkegeln Ellipsen ausschneidet, deren Mittelpunkte auf den durch die Scheitelpunkte gehenden Weltlinien der im Gravitationssystem ruhenden materiellen Punkten P liegen. Die Gleichungen dieser materiellen Punkte sind zu Beginn der Bewegung dargestellt durch die Gleichungen (1). Die

Tangenten dieser Kurven sind für den Gravitationsbeobachter die momentanen Zeitachsen. In der Umgebung eines im Gravitations-system ruhenden Weltpunktes müssen also die von diesem Punkt ausgehenden beiden Seitenlinien des Lichtkegels zwei zugeordnete, die Tangente in diesem Punkt und die in der Zeichenebene liegende Spur der

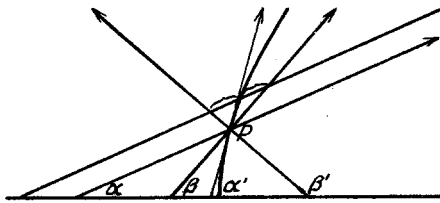


Fig. 2.

Zeitfläche die beiden anderen zugeordneten Strahlen eines harmonischen Büschels bilden. Das sind offenbar die Bedingungen, daß das zwischen den beiden Seitenlinien liegende Stück einer zur Spur parallelen Strecke von der Tangente halbiert wird.

Bezeichnen wir die Richtungswinkel der 4 durch $P(xt)$ gehenden harmonischen Strahlen wie in Fig. 2, so ist der analytische Ausdruck für diese Forderung:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta_1 = 0$$

Von diesen Richtungskoeffizienten $\frac{dt}{dx}$ sind $\operatorname{tg} \beta$ und $\operatorname{tg} \beta_1$ bekannt als die reziproken Werte der Geschwindigkeit des Lichtes in der positiven und negativen Richtung der x -Achse und $\operatorname{tg} \alpha_1$ nach Gleichung (1) als die Geschwindigkeit des Punktes P . Es ist also

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{c}, \quad \operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{1}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}{\gamma_0 t} \quad (\text{Für kleine Werte von } t).$$

Die Differentialgleichung unserer Zeitfläche lautet also

$$\frac{dt}{dx} \frac{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}{\gamma_0 t} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Die Integration ergibt $\ln t = \ln \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \right) + C$, für $x = 0$ erhalten wir $\ln t_0 = C$.

Die Gleichung der Zeitfläche lautet also für kleine Werte von t

$$t = t_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \right). \quad (3)$$

Unter denselben Voraussetzungen sind t und t_0 nicht verschieden von den Eigenzeiten $d\tau$ der mit den Punkten P verbundenen Uhren und es ist x zugleich die mit starren Maßstäben im Gravitations-

system gemessene Entfernung vom Anfangspunkt. In der Gleichung $d\tau = d\tau_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)$ sind also keine auf das ursprüngliche Inertialsystem sich beziehenden Größen mehr vorhanden. Sie ist also nicht mehr an den Zeitpunkt zu Beginn der Fallbewegung des von uns gerade gewählten Ruhesystems gebunden, sondern gilt, wie das bei den stationären Verhältnissen im Gravitationssystem auch selbstverständlich ist, ohne Einschränkung. Die Verhältnisse im Gravitationsystem gestalten sich jetzt sehr anschaulich. Bezogen auf das momentane Ruhesystem dreht sich die Zeitebene, wie aus Fig. 1 hervorgeht, um den Punkt $x = -\frac{c^2}{\gamma_0}$. Die der gravitierenden Masse näher liegenden

Ereignisse verlaufen also langsamer. Die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}{\gamma_0 t}$

geht mit Benutzung von (3) über in $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{t_0}{\gamma_0}$. Die Weltlinien der Punkte P werden also von der Zeitebene unter gleichem Winkel geschnitten. Sie bilden daher in bezug auf den Drehpunkt eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Kurven. Die in unserer graphischen Darstellung in Fig. 1 vorhandene Dehnung der Abstände zweier Punkte P ist also für den Gravitationsbeobachter nicht vorhanden, da seine Maßstäbe sich entsprechend vergrößern. In seinem Raum gilt die euklidische Geometrie. Die Invariante des homogenen Feldes ist nach allem also

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)^2 d\tau_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (4)$$

Zum Schluß wollen wir noch das Fallgesetz für das Gravitationsystem angeben. Es lautet für den langsam bewegten Punkt $s = \frac{1}{2} \gamma_x t_x^2$ oder unter Benutzung von 1 und 3: $s = \frac{1}{2} \gamma_0 \tau_0^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)$. Die Ruhbeschleunigung ist also

$$\frac{d^2 s}{d\tau_0^2} = -\gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right). \quad (5)$$

Diese Werte hätten wir übrigens auch aus (4) erhalten können. Die Weltlinien von freibeweglichen materiellen Punkten A_1 und B_1 sind charakterisiert durch die Gleichung $\delta \int ds = 0$, wo

$$ds = d\tau_0 \sqrt{c^2 \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau_0}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau_0}\right)^2} = H d\tau_0$$

ist.

Die erste der dazugehörigen Lagrangeschen Gleichungen lautet

$$\frac{d}{d\tau_0} \frac{\partial H}{\partial q_x} - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\tau_0} \left(-\frac{dx}{H d\tau_0} \right) - \frac{\left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \right) \gamma_0}{H} = 0$$

Für kleine Geschwindigkeiten $H = c \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \right)$ also

$$\frac{d^2 x}{d\tau_0^2} = - \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \right) \gamma_0.$$

In Beginn hatten wir gefunden, daß ein beschleunigter starrer Stab die Lorentzverkürzung aufweist, wenn die Beschleunigung seines hinteren Endes das $\left(1 + \frac{\gamma x}{c^2} \right)$ fache seines vorderen Endes beträgt. Für den Gravitationsbeobachter haben die Beschleunigungen des freifallenden Stabes A, B diese Eigenschaft, wenn wir bedenken, daß für ihn A das hintere Ende ist (Fig. 1). Es ergibt sich also auch für ihn eine Lorentzkontraktion.

Bei der Benutzung von $\delta \int ds = 0$ sind die Punkte des Stabes AB so behandelt, als wenn jeder für sich fiel. Wir kommen also zu dem richtigen Fallgesetz (5), wenn wir annehmen, daß ein ausgedehnter Körper in einem homogenen Felde spannungsfrei fällt. Von hier aus fällt ein neues Licht auf die Entstehung der Lorentzkontraktion. Wir finden nämlich für den bewegten Körper dieselben Verhältnisse wie für den einzelnen Punkt. Daß ein solcher im Inertialfelde sich nach dem Trägheitsgesetz bewegt und im Gravitationsfelde nach den Gravitationsgesetzen, sind nicht zwei verschiedene Tatsachen, sondern ist nach dem Äquivalenzprinzip nur eine Tatsache, von zwei verschiedenen Bezugssystemen aus betrachtet. Genau so müssen bewegte starre Körper im Inertialsystem die Lorentzkontraktion aufweisen, damit solche im Gravitationssystem spannungsfrei fallen können und umgekehrt. Letzten Endes ist die Lorentzkontraktion, die einer von zwei relativ zueinander beschleunigten Stäben aufweist, auf die Natur der Spannungen zurückzuführen, die in einem von diesen Stäben immer vorhanden sein müssen, und zwar sind dies im Inertialsystem die elastischen Spannungen des beschleunigten Stabes und im Gravitationssystem die ihnen entsprechenden Gravitationsspannungen des im Felde ruhenden Bezugssystems. Denken wir uns als x -Achse einen mit den gravitierenden Massen fest verbundenen Stab von dem Querschnitt 1 und der homogenen Massendichte m , der über den Koordinatenanfangspunkt um die Länge l hinausragen möge. Die für den Inertialbeobachter in ihm vorhandenen elastischen Spannungen lassen

sich einfach berechnen, wenn wir m so klein annehmen, daß die Rückwirkungen des Stabes auf das Feld nicht in Rechnung gesetzt zu werden brauchen. Die Spannungen im Punkte x sind dann gleich dem Gewicht des Stabendes von der $l-x$ oder $\int_x^l m \gamma dx$. Wir erhalten die Spannungen nur richtig, wenn wir für γ nicht den Wert 5, den γ für den Gravitationsbeobachter annimmt, wenn er sich bei den Messungen seiner im Anfangspunkt befindlichen Uhr bedient, sondern den natürlich gemessenen Wert einführen. Unter diesem natürlich gemessenen Wert von γ verstehen wir den Wert der Beschleunigung an einem Punkt, verglichen mit einer dort befindlichen Uhr, denn diese lokalen Uhren, die im Inertialsystem alle die gleiche Geschwindigkeit anzeigen, sind es, mit denen in diesem System die Zeit gemessen wird. Da $s = \frac{1}{3} \gamma_x t_x^2$ ist, ist die natürliche Beschleunigung

$$\gamma_x = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}.$$

Wir haben also für die Größe der Spannungen, die der Inertialbeobachter an dem Stab feststellt, den Wert

$$t_x = \int_x^l \frac{m \gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}} dx = m c^2 \ln \frac{\left(1 + \frac{\gamma_0 l}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right)}.$$

Hieraus ergibt sich wieder mit Hilfe des Impulssatzes¹⁾

$$- \operatorname{div} t_x = \frac{dmv}{dt} = - \frac{\partial t_x}{\partial x}$$

der Ausdruck 2.

Man kann die Frage aufwerfen, wie sich denn ein solches Inertialsystem, wie wir es bei unseren Überlegungen benutzt haben, im Prinzip realisieren läßt. Würde man die obere Verbindung einer im Felde hängenden Stange oder die untere einer aufgerichteten einfach lösen, so würde ein solches System sich erst Punkt für Punkt sukzessive entspannen, ehe es frei fällt. Es würde daher für unsere Zwecke nicht geeignet sein. Wir können uns aber etwa folgende Vorrichtung denken: auf einen starken, länglichen Körper mit großem Elastizitäts-

¹⁾ Aus der Drehung der Zeitebene in einem homogenen Gravitationsfelde ergibt sich auch, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe (Die Einsteinsche Gravitationstheorie und ihre Stellung im System der Gesamterfahrung, S. 24 usw.), eine einfache Erklärung des Uhrenparadoxons.

modul werde, während er senkrecht zum Felde, also in seiner Längsrichtung ungespannt ruht, eine Anzahl sehr dünner Leisten mit geringem Elastizitätsmodul in einem solchen Zustand der Dehnung geleimt, daß sie beim Aufrichten dieser Vorrichtung spannungsfrei sind. Eine solche Leiste denken wir uns in ihrer ganzen Ausdehnung für den Gravitationsbeobachter gleichzeitig, also in den Weltpunkten P gelöst. Da keine Ruhespannungen in diesen Leistungen vorhanden sind, sind auch in bewegtem Zustande in der Richtung der x -Achse keine vorhanden, denn diese Spannungen in der x -Richtung sind eine Invariante der Lorentztransformation. Nach Fig. 1 bewegen sich die Punkte P auf den durch P gelegten Tangenten, die nach Fig. 1 untereinander parallel sind. In der gleichen Weise sei auch schon das ursprüngliche Inertialsystem sowie eine Reihe weiterer hergestellt. Eine solche Vorrichtung kann also als Paradigma für die Beschleunigung eines Stabes, ohne seinen inneren Zustand zu ändern, dienen. Alle diese relativ zueinander bewegten Bezugssysteme weisen, wie wir im Vorhergehenden bewiesen haben, wenn die relative Geschwindigkeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden klein ist, die Lorentzkontraktion auf. Dasselbe muß also auch für zwei in der Reihe beliebig auseinanderstehende Bezugssysteme gelten (nach dem Einsteinschen Additionstheorem von Geschwindigkeiten). Zusammenfassend können wir jetzt folgendes sagen: die Entstehung der Lorentzverkürzung ist kausal bedingt durch elastische Spannungen. Dafür aber, daß ein Stab, wenn er aus der beschleunigten Bewegung in die gleichförmige übergegangen ist, diese Lorentzverkürzung behält, läßt sich keine Ursache angeben, sondern nur einen Grund, und dieser Grund liegt in der verschiedenen Art der Zeitmessung in den beiden Systemen. Die fertige Kontraktion ist also nicht durch einen besonderen Spannungszustand ermöglicht, sondern phänomenologisch bedingt, genau wie man in der alten Physik dafür, daß im Euklidischen Raum ein Stab aus der Ruhelage in die Drehbewegung übergeht, eine Ursache angeben müßte, während es für die damit verbundene Änderung der Länge der Projektionen dieses Stabes in bezug auf irgendwelche Ebenen, nur einen mathematischen Grund gibt¹⁾.

Vergleich mit der allgemeinen Theorie. Nach der Einsteinschen Gravitationslehre sind die physikalischen Verhältnisse eines beliebigen Gravitationsfeldes bestimmt durch eine Grundinvariante

von der Form $ds^2 = \sum_1^4 h_{ik} dx_i dx_k$. Da das homogene Feld zu den

¹⁾ Über diesen Unterschied vergleiche I. c., S. 63.

stationären gehört, müssen g_{14} , g_{24} , g_{34} verschwinden und die übrigen g_{ik} dürfen die Zeitkoordinate dx_4 nicht enthalten. Wählen wir das Koordinatensystem so, daß die Richtung der x_1 -Achse mit der Richtung der Gravitationsbeschleunigung zusammenfällt und die x_2 - und x_3 -Achse sowohl zur x_1 -Achse wie zueinander senkrecht stehen, so sind die g_{ik} nur noch Funktionen von x_1 . Im anderen Fall würde nämlich eine Parallelverschiebung des Anfangspunktes in der (x_2, x_3) -Ebene die Invariante ändern. Ein homogenes Feld ist aber dadurch charakterisiert, daß alle Punkte in einer solchen Ebene sich gleich verhalten. Ebenso wie gegen eine solche Verschiebung muß die Invariante einer Drehung des Bezugssystems um die x -Achse gegenüber unverändert bleiben. Die Invariante hat also notwendig die Form

$$ds^2 = g_{44} dx_4^2 + g_{11} dx_1^2 + g_{22} (dx_2^2 + dx_3^2).$$

Da sie zuletzt auch durch eine Verschiebung auf der x_1 -Achse wieder in einen Ausdruck von derselben Form übergehen muß, kann g_{22} nur eine Konstante sein, die bei passender Wahl der Maßeinheiten von dx_2 und dx_3 gleich -1 gesetzt werden kann. Die Funktionen g_{44} und g_{11} sind nun so zu bestimmen, daß dem Einsteinschen Gravitationsgesetz genügt wird. Dieses lautet für den materiefreien Raum:

$$R_{ki} = \sum \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} km \\ m \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ m \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_m} + \sum_{mn} \left\{ \begin{smallmatrix} kn \\ m \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} lm \\ n \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ m \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} mn \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 0,$$

wo

$$\left\{ \begin{smallmatrix} jk \\ l \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_i g^{il} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right).$$

Wir wollen für g_{44} den Wert V^2 schreiben.

Die Determinante g der quadratischen Form ds^2 ist dann nach dem vorigen

$$\begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V^2 \end{vmatrix}$$

Also $g = g_{11} V^2$. Die normierten Unterdeterminanten haben die Werte

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad g^{22} = g^{33} = -1, \quad g^{44} = \frac{1}{V^2}. \quad \text{Es ist} \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} = g'_{11},$$

$\frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} = 2V V'$, während die übrigen partiellen Differentialquotienten

verschwinden. Von den Klammerausdrücken ist $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = \frac{g'_{11}}{2g_{11}},$

$\begin{Bmatrix} 44 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{V V'}{g_{11}}$ und $\begin{Bmatrix} 41 \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{V'}{V}$, alle anderen sind gleich Null. Wir finden daher

$$R_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{V'}{V} - \left(\frac{g'_{11}}{2 g_{11}} - \frac{V'}{V} \right) \frac{V'}{V} = 0$$

und

$$R_{44} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{V V'}{g_{11}} - \left(\frac{V'}{V} - \frac{g'_{11}}{2 g_{11}} \right) \frac{V V'}{g_{11}} = 0.$$

Alle anderen R_{ik} verschwinden identisch.

Entwickeln wir den Differentialquotienten, der in beiden Gleichungen das erste Glied bildet, so erweisen sich beide als identisch mit der Gleichung

$$V'' - \frac{g'_{11}}{2 g_{11}} V' = 0.$$

Wir können also eine der Funktionen g_{11} oder V willkürlich wählen. Setzen wir $g_{11} = -1$, so ergibt sich $V'' = 0$ oder $V = ax + b$. Diese Wahl würde, wie ein Blick auf ds^2 zeigt, bedeuten, daß x physikalisch den natürlich gemessenen Abstand darstellt. Bei dieser Wahl der Variablen lautet also die Grundinvariante

$$ds^2 = dx_4^2 (ax + b)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Wenn man in geeigneter Weise über die Konstanten verfügt, ergibt sich also wieder unser Ausdruck 4.