

Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe *).

(Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch Herrn E. Heine.)

§. 1.

Es ist seit *Euler* bekannt, daß das bestimmte Integral

$$\gamma = \int_0^1 V du,$$

in welchem

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

gesetzt ist, der Differentialgleichung

$$(1.) \quad x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta\gamma = 0$$

genügt. Um dies nach dem Vorgange *Eulers* (*Institutiones calc. integr.* Vol. II, Sect. I, Cap. X, Problema 130) zu beweisen, hat man nur nöthig, in die linke Seite von (1.) für γ das unbestimmte Integral $\int V du$ zu setzen, durch Differentiation unter dem Integrale γ' und γ'' , d. h. $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, zu bilden, und endlich zu reduciren. Dann erhält man auf der rechten Seite zu-

*) Die Abhandlung, die ich hier mittheile, verdankt ihre Entstehung einer Handschrift *Jacobis*, welche aus einer ziemlich frühen Zeit seines Lebens zu stammen scheint. Nachdem er aus dem reichen Inhalt derselben den Stoff eines Theils der Abhandlung: *Formula transformationis integralium definitorum* (Bd. 15 dieses Journals), sowie der Abhandlung: *Ueber die Entwicklung des Ausdrucks etc.* (Bd. 26 dieses Journals oder *Journal de M. Liouville* année 1845 p. 229) entnommen hatte, blieb ein noch unbenutzter Theil der Handschrift übrig, welcher die Kugelfunctionen betraf. Die in demselben enthaltenen Untersuchungen wurden von *Jacobi* im Jahre 1843, indem er sie einer neuen Bearbeitung unterwarf, auf die allgemeine hypergeometrische Reihe ausgedehnt, und ich übernahm es während meiner damaligen Studienzeit, die in solcher Art verallgemeinerten und zu späterer Veröffentlichung bestimmten Ergebnisse zu einem Aufsatz zusammenzustellen, dessen Herausgabe jetzt in seiner dem Wesen nach unveränderten Form erfolgt, nachdem eine von *Jacobis* Hand beabsichtigte Umgestaltung durch seinen Tod vereitelt worden ist.

nächst nicht 0, sondern den Ausdruck *)

$$-\alpha u^{\beta}(1-u)^{\gamma-\beta}(1-xu)^{-\alpha-1} = -\alpha \cdot \frac{u(1-u)}{1-xu} V.$$

Da derselbe für $u=0$ und $u=1$ verschwindet, natürlich β und $\gamma-\beta$ positiv gedacht, so wird das bestimmte Integral $y = \int_0^1 V dx$, wenn es einen Sinn hat, (1.) integrieren.

Es ist früher nicht beachtet worden, daß der erwähnte Ausdruck auch für $u = \pm \infty$ verschwindet, wenn $\gamma-\alpha-1$ negativ ist, so daß alsdann außer den Grenzen 0 und 1, auch die Grenzen 0 und $-\infty$, 1 und ∞ Integrale von (1.) verschaffen. Mit Hinzuziehung hiervon hat man das Resultat:

Es genügt $y = \int_g^h V du$ der Gleichung (1.), wenn g und h zwei von den Werthen 0, 1, $\pm \infty$ bezeichnen, und $\left[\frac{u(1-u)}{(1-xu)} V \right]_g^h = 0$ ist; vorausgesetzt daß das Integral eine Bedeutung hat. Wir bedienen uns der bekannten Bezeichnung, nach der $[f(u)]_g^h$ die Differenz $f(h) - f(g)$ vorstellt.

Mit Rücksicht auf die Zusammensetzung des Ausdrucks V lag es nahe, zu den soeben betrachteten Werthen der Grenzen des Integrals $\int V du$, von denen die beiden ersten die Größen u und $1-u$ gleich Null machen, den Werth $\frac{1}{x}$ hinzuzufügen, für welchen $1-xu$ verschwindet. Indem zunächst

in die linke Seite von (1.) $y = \int_g^{\frac{\varepsilon}{x}} V du$ gesetzt wurde, wo ε eine Constante bedeutet, ergab sich nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned} & -(\gamma-\beta-1)\varepsilon^{\beta}(1-\varepsilon)^{1-\alpha}x^{1-\gamma}(x-\varepsilon)^{\gamma-\beta-1} \\ & + \alpha g^{\beta}(1-g)^{\gamma-\beta}(1-xg)^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

und hieraus wurde für $\varepsilon=1$ geschlossen, daß auch

*) Dies kann man auch mit *Euler* so ausdrücken, daß der vollständige nach u genommene Differentialquotient

$$-\alpha \frac{d}{du} \left(\frac{u(1-u)}{1-xu} V \right)$$

unter der Form

$$A \frac{d^2 V}{dx^2} + B \frac{dV}{dx} + CV$$

darstellbar ist, wo A, B, C die von u unabhängigen in Gleichung (1.) vorkommenden Größen $x(1-x)$, $\gamma-(\alpha+\beta+1)x$, $-\alpha\beta$ sind.

$$\gamma = \int_g^{\frac{1}{x}} V du$$

der Gleichung (1.) genügt, wenn

$$\frac{u(1-u)}{(1-xu)} V$$

für $u=g$ verschwindet, und $1-\alpha$ positiv ist; dafs das Integral einen Werth haben mufs, ist vorausgesetzt.

Man hat demnach sechs, als bestimmte Integrale auftretende und, wie leicht zu zeigen ist, *verschiedene* Lösungen der Gleichung (1.) (d. h. solche, von denen nicht zwei einen constanten Quotienten haben). Indem wir uns hier, wie auch im Folgenden, x immer positiv denken, auf welchen Fall der eines negativen x leicht zurückzuführen ist, stellen wir diese Lösungen mit Hinzufügung der Bedingungen, unter denen sie der Gleichung (1.) genügen, zusammen:

- 1) wenn β und $\gamma - \beta$ positiv ist: $y = \int_0^1 V du,$
- 2) - β - $\alpha + 1 - \gamma$ - - $y = \int_0^{-\infty} V du,$
- 3) - $\gamma - \beta$ - $\alpha + 1 - \gamma$ - - $y = \int_1^{\infty} V du,$
- 4) - β - $1 - \alpha$ - - $y = \int_0^{\frac{1}{x}} V du,$
- 5) - $\alpha + 1 - \gamma$ - $1 - \alpha$ - - $y = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V du,$
- 6) - $\gamma - \beta$ - $1 - \alpha$ - - $y = \int_1^{\frac{1}{x}} V du.$

Um die Bedeutung dieser Integrale besser zu übersehen, kann man sie durch hypergeometrische Reihen ausdrücken. Man weifs nämlich, dafs $\int_0^1 u^\lambda (1-u)^\mu (1-au)^\nu du$, abgesehen von einem constanten Factor, der hypergeometrischen Reihe gleich ist, welche nach *Gaußs* mit $F(-\nu, \lambda+1, \lambda+\mu+2, a)$ bezeichnet wird. Ferner übersieht man leicht, dafs sich die Grenzen der sechs Integrale durch geeignete Substitutionen in 0 und 1 verwandeln lassen, ohne dafs die Function unter dem Integrale ihre Form $u^p (1-u)^q (1-bu)^r du$ ver-

liert. Ich stelle die sechs in hypergeometrische Reihen ausgedrückten Lösungen, auf die man so nach einander kommt, mit den Substitutionen zusammen, welche angewandt wurden:

- | | |
|--|------------------------|
| 1) $F(\alpha, \beta, \gamma, x),$ | Substitution $u = v,$ |
| 2) $x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}),$ | - $u = \frac{v-1}{v},$ |
| 3) $x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}),$ | - $u = \frac{1}{v},$ |
| 4) $x^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}),$ | - $u = \frac{v}{x},$ |
| 5) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$ | - $u = \frac{1}{xv},$ |
| 6) $x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}),$ | |

$$\text{Substitution } u = \frac{1}{x+(1-x)v}.$$

Zu jeder dieser Lösungen findet man drei gleiche, nur der Form nach verschiedene, wenn man, nachdem die Grenzen der Integrale bereits durch obige Substitutionen auf 0 und 1 gebracht sind, noch drei neue Substitutionen anwendet, welche die Grenzen ungeändert lassen, nämlich die folgenden:

$$u = 1-v; \quad u = \frac{v}{1-x+vx}; \quad u = \frac{1-v}{1-vx}.$$

Durch diese geht Vdu resp. in

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-\alpha} v^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\beta-1} \left(1 - \frac{xv}{x-1}\right)^{-\alpha} dv, \\ & (1-x)^{-\beta} v^{\beta-1} (1-v)^{\gamma-\beta-1} \left(1 - \frac{xv}{x-1}\right)^{\alpha-\gamma} dv, \\ & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} v^{\gamma-\beta-1} (1-v)^{\beta-1} (1-vx)^{\alpha-\gamma} dv \end{aligned}$$

über; sie führen also von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ auf

$$\begin{aligned} & (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ & (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right) \\ & (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x). \end{aligned}$$

Stellen wir nun die in hypergeometrische Reihen übertragenen Integrale zusammen, so haben wir sechs Klassen, von denen jede vier gleichbedeutende Lösungen enthält:

Classe I.

- 1) $F(\alpha, \beta, \gamma, x),$
- 2) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$
- 3) $(1-x)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}),$
- 4) $(1-x)^{-\beta} F(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}).$

Classe II.

- 1) $x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}),$
- 2) $x^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}),$
- 3) $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$
- 4) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x).$

Classe III.

- 1) $x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}),$
- 2) $x^{\beta-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}),$
- 3) $(1-x)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{1-x}),$
- 4) $x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}).$

Classe IV.

- 1) $x^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}),$
- 2) $x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}),$
- 3) $(1-x)^{-\beta} F(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}),$
- 4) $x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} F(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}).$

Classe V.

- 1) $x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$
- 2) $x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x),$
- 3) $x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}),$
- 4) $x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\beta-1} F(\beta+1-\gamma, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}).$

Classe VI.

- 1) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}),$
- 2) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, \frac{x-1}{x}),$
- 3) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x),$
- 4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-x).$

Diese 24 Reihen sind dieselben, welche *Kummer* im §. 8 seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe im 15^{ten} Bande dieses Journals aufgeführt hat, über deren Bedeutung man an jener Stelle das Nähere findet. Die hier vorliegende Untersuchung giebt also das neue Resultat, daß die bestimmten Integrale, die jenen Reihen gleich sind, sämmtlich durch Integration desselben Ausdrucks zwischen zweien der Grenzen 0, 1, $\pm\infty$, $\frac{1}{x}$ erhalten werden.

§. 2.

Eine ganz andere Art von Beziehungen zwischen Integralen der Gleichung (1.) erhält man durch Verallgemeinerung der Untersuchungen, welche *Gauß* in seiner Arbeit über mechanische Quadraturen führt. Es tritt dort (art. 8) eine Function *T* vom $n+1$ ^{ten} Grade auf, deren Zusammenhang mit $\int_0^1 \frac{Tdt}{t-a}$ Anlaß zur Auffindung des folgenden Satzes gab:

Ist $y=f(x)$ ein Integral der Differentialgleichung (1.), so wird:

$$(2.) \quad z = \int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(t-x)^q} f(t) dt = \int_g^h W.f t dt$$

ein Integral der Differentialgleichung

$$(3.) \quad x(1-x)z'' + (\varrho+1-\gamma-(2\varrho+1-\alpha-\beta)x)z' - (\varrho-\alpha)(\varrho-\beta)z = 0,$$

wenn sowohl *g* als *h* einen der Werthe 0, 1, $\pm\infty$ hat, und

$$\left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}{(t-x)^q} (f'(t) + \varrho \frac{f(t)}{t-x}) \right]_g^h = 0$$

ist. Man kann auch $h=x$ setzen; alsdann muß aber der Ausdruck in der Parenthese für $t=g$ verschwinden, und $1-\varrho$ positiv sein.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man davon ausgehen, daß *f(t)* der Differentialgleichung

$$t(1-t)f''(t) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)t)f'(t) = \alpha\beta f(t)$$

genügt, welche mit $t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}$ multiplicirt, die Form annimmt

$$\alpha\beta t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}f(t) = \frac{d(t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t))}{dt}.$$

Dies in das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (2.) eingesetzt giebt nach einer theilweisen Integration:

$$\alpha\beta z = \left[\frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t)}{(t-x)^{\varrho}} \right]_g^h + \varrho \int_g^h \frac{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha+\beta+1-\gamma}f'(t)}{(t-x)^{\varrho+1}} dt$$

und nach einer zweiten theilweisen Integration:

$$\alpha\beta z = \left[t(1-t)W\left(f'(t) + \frac{\varrho f(t)}{t-x}\right) \right]_g^h - \varrho \int_g^h \frac{d}{dt} \left(\frac{t(1-t)}{t-x} \cdot W \right) f(t) dt.$$

Wendet man nun die in der Anmerkung des §. 1 gegebene Transformation an, nach welcher, wenn $u = \frac{1}{t}$, $u^2 V = W$ gesetzt wird,

$$- \varrho \frac{d}{dt} \left(\frac{t(1-t)}{t-x} W \right)$$

$$= x(1-x) \frac{d^2 W}{dx^2} + (\varrho+1-\gamma-(2\varrho+1-\alpha-\beta)x) \frac{dW}{dx} - \varrho(\varrho-\alpha-\beta)W$$

ist, so findet man den oben aufgestellten Satz.

Das in demselben enthaltene Ergebniss läßt sich in eine andere Form bringen, und zwar durch Vergleichung der beiden Lösungen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$ der Gleichung (1.), welche in den Ausdrücken 1) der I^{ten} Classe und 2) der V^{ten} Classe gegeben sind. Da nämlich $F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$ eine Lösung ζ von

$$(1. a) \quad x(1-x)\zeta'' + (2-\gamma+(3-\alpha-\beta)x)\zeta' - (1-\alpha)(1-\beta)\zeta = 0$$

ist, so läßt sich das Resultat jener Vergleichung in der Art aussprechen, daß eine Lösung ζ von (1. a) multiplicirt mit $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ eine Lösung von (1.) giebt. Läßt man an die Stelle von (1. a) die Gleichung (3.) treten, indem man α, β, γ um $1-\varrho$ vermehrt, so folgt mit Hülfe des obigen Satzes unmittelbar, daß

$$(4.) \quad Z = x^{\varrho-\gamma}(1-x)^{\varrho+\gamma-\alpha-\beta-1} \int_g^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{(t-x)^{\varrho}} f(t) dt$$

eine Lösung derjenigen Gleichung wird, in welche gleichzeitig (1.) übergeht, d. h. von

$$(5.) \quad x(1-x)Z'' + (\gamma+1-\varrho-(\alpha+\beta+3-2\varrho)x)Z' - (\alpha+1-\varrho)(\beta+1-\varrho)Z = 0.$$

Setzt man hier ins Besondere $\rho=1$, so wird (5.) mit (1.) identisch, und man erhält aus einem Integrale $f(x)$ der Gleichung (1.) ein zweites:

$$(6.) \quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_{\xi}^h \frac{t^{\gamma-1}(1-t)^{\alpha+\beta-\gamma}}{t-x} f(t) dt.$$

§. 3.

Die letzte Formel giebt ein besonders interessantes Resultat, wenn $f(t)$ eine endliche Reihe, also eine solche hypergeometrische Reihe ist, deren erstes oder zweites Element eine negative ganze Zahl $-n$ wird. Ueber die Eigenschaften solcher endlichen Reihen soll in diesem und den folgenden Paragraphen bis §. 6 einschliesslich gehandelt werden.

Differentiirt man die Gleichung (1.)

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

mehrere Male hintereinander nach x , so erhält man

$$x(1-x)y''' + (\gamma + 1 - (\alpha + \beta + 3)x)y'' - (\alpha + 1)(\beta + 1)y' = 0$$

$$x(1-x)y^{IV} + (\gamma + 2 - (\alpha + \beta + 5)x)y''' - (\alpha + 2)(\beta + 2)y'' = 0$$

etc.

etc.

Das durch $(n-1)$ malige Differentiation gewonnene Resultat wird durch Multiplication mit

$$x^{\gamma+n-2}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}$$

auf die Form gebracht

$$\frac{d^n \{x^n(1-x)^n M y^{(n)}\}}{dx^n} = (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1) x^{n-1}(1-x)^{n-1} M y^{(n-1)},$$

wo

$$M = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}.$$

Indem man diese Gleichung noch ferner $(n-1)$ mal differentiirt, erhält man

$$\frac{d^n \{x^n(1-x)^n M y^{(n)}\}}{dx^n} = (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1) \frac{d^{n-1} \{x^{n-1}(1-x)^{n-1} M y^{(n-1)}\}}{dx^{n-1}},$$

und durch wiederholte Anwendung ergibt sich hieraus für jedes ganze positive n die Gleichung:

$$\frac{d^n \{x^n(1-x)^n M y^{(n)}\}}{dx^n} = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1) M y,$$

in welcher M denselben Werth wie oben bezeichnet.

Ist nun y eine bei der n ten Potenz von x abbrechende hypergeometrische

Reihe, setzt man also $\beta = -n$, während α und γ beliebig bleiben, so wird

$$y = F(-n, \alpha, \gamma, x)$$

und nach obiger Gleichung:

$$F(-n, \alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n (x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha-\gamma})}{dx^n}$$

oder, wenn man $\alpha + n$ für α setzt,

$$(7.) \quad F(-n, \alpha + n, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n (x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma})}{dx^n}.$$

Dieser Ausdruck zeigt einerseits, daß sich jede endliche hypergeometrische Reihe in die elegante Form der rechten Seite von (7.) bringen läßt, und giebt andererseits dem häufig vorkommenden Differentialausdrucke der rechten Seite die entwickelte Form eines Productes von Potenzen in eine einfache hypergeometrische Reihe. Für $\alpha = \gamma = 1$ erhält man

$$\frac{1}{1.2\dots n} \frac{d^n (x^n(1-x)^n)}{dx^n} = F(-n, n+1, 1, x)$$

und setzt man $x = \frac{1-\xi}{2}$

$$\frac{1}{2^n.1.2\dots n} \frac{d^n (\xi^2-1)^n}{d\xi^n} = F(-n, n+1, 1, \frac{1-\xi}{2}),$$

also links die bekannte Function, welche durch Entwicklung von $\frac{1}{\sqrt{1-2h\xi+h^2}}$ nach Potenzen von h entsteht. Den Ausdruck derselben durch die Reihe auf der rechten Seite findet man bei *Dirichlet* (Bd. 17, S. 39 dieses Journals). Auf ähnliche Art erhält man eine Entwicklung des n ten Differentialquotienten $\frac{d^n (1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}}}{d\xi^n}$, welcher bekanntlich für $\xi = \cos \varphi$ mit $\cos n\varphi$ zusammenhängt.

§. 4.

Es macht keine Schwierigkeit, die erzeugende Function der durch (7.) gegebenen Ausdrücke in derselben Art aufzufinden, wie es im zweiten Bande dieses Journals S. 224 in dem schon §. 3 erwähnten besonderen Falle $\alpha = \gamma = 1$ geschehen ist. Man kann sich dazu der *Lagrangeschen* Formel bedienen, nach der

$$\chi(y) \frac{dy}{dx} = \chi(x) + \frac{h}{1} \frac{d(f(x)\chi(x))}{dx} + \frac{h^2}{1.2} \frac{d^2(f(x)^2\chi(x))}{dx^2} + \text{etc.}$$

ist, wenn zwischen x und y die Gleichung:

$$y - x = hf(y)$$

besteht, und hat nur

$$f(x) = x(1-x); \quad \chi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$$

zu setzen. Macht man

$$F(-n, \alpha+n, \gamma, x) = X_n$$

und wie oben $2x = 1 - \xi$, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha} \{h-1 + \sqrt{1-2h\xi+h^2}\}^{\gamma-1} \{h+1 - \sqrt{1-2h\xi+h^2}\}^{\alpha-\gamma}}{(2h)^{\alpha-1} \sqrt{1-2h\xi+h^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}{1.2\dots n} h^n X_n. \end{aligned}$$

Diese Formel, welche sich nicht durch Einfachheit zu empfehlen schien, ist nicht weiter verfolgt worden, sondern zunächst nur ein besonderer Fall derselben.

§. 5.

Man entwickle nämlich mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes

$$(1-2h\xi+h^2)^{-c}$$

nach aufsteigenden Potenzen von h . Setzt man die so entstehende Reihe

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h^n Y_n,$$

so wird

$$Y_n = \frac{2c(2c+1)\dots(2c+n-1)}{1.2\dots n} F\left(-n, 2c+n, \frac{2c+1}{2}, x\right),$$

wenn x und ξ wie im vorigen Paragraphen zusammenhangen, also auch

$$Y_n = 4^n \frac{c(c+1)\dots(c+n-1)(x(1-x))^{\frac{1}{2}(1-2c)}}{(2c+n)(2c+n+1)\dots(2c+2n-1)\Gamma n} \frac{d^n (x(1-x))^{\frac{1}{2}(2c+2n-1)}}{dx^n}.$$

§. 6.

Nach den im §. 4 mit X_n bezeichneten Ausdrücken läßt sich, wenigstens so lange γ und $\alpha+1-\gamma$ positiv sind, eine Function $\varphi(x)$ nur auf *eine* Art entwickeln, so daß also, wenn man $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n$ setzt, die Constanten a vollständig bestimmt sind. Man hat zum Beweise dieses Satzes nur zu zeigen, daß

$$J_{m,n} = \int_0^1 X_m X_n x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma} dx$$

verschwindet, sobald die ganzen Zahlen m und n von einander verschieden

sind. Es genügt aber X_n der Differentialgleichung

$$x(1-x)X_n'' + (\gamma - (\alpha + 1)x)X_n' = -n(n + \alpha)X_n,$$

so dafs

$$\begin{aligned} -n(n + \alpha)J_{m,n} &= \int_0^1 X_m \frac{d(x^\gamma (1-x)^{\alpha+1-\gamma} X_n')}{dx} dx \\ &= \int_0^1 X_n \frac{d(x^\gamma (1-x)^{\alpha+1-\gamma} X_m')}{dx} dx \end{aligned}$$

also gleich $-m(m + \alpha)J_{m,n}$ wird, woraus man schließt, dafs $J_{m,n}$ verschwindet. Ist $m=n$, so läßt sich der Werth dieser Constanten leicht angeben, da offenbar

$$n(n + \alpha)J_{n,n} = \int_0^1 X_n' X_n' x^\gamma (1-x)^{\alpha+1-\gamma} dx$$

ist, ferner

$$(n-1)(n + \alpha + 1) \int_0^1 X_n' X_n' x^\gamma (1-x)^{\alpha+1-\gamma} dx = \int_0^1 X_n'' X_n'' x^{\gamma+1} (1-x)^{\alpha+2-\gamma} dx$$

etc.,

so dafs man für $J_{n,n}$ den Werth

$$\frac{1}{\alpha + 2n} \frac{\Pi n (\Pi(\gamma - 1))^2 \Pi(\alpha + n - \gamma)}{\Pi(\alpha + n - 1) \Pi(\gamma + n - 1)}$$

erhält.

§. 7.

Für ein zweites Integral der Differentialgleichung, deren erstes X_n ist, erhält man durch die Formel (6.) des §. 2 den Werth

$$x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \int_g^h \frac{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\gamma}}{(t-x)} F(-n, \alpha + n, \gamma, t) dt,$$

welcher für $\alpha = \gamma = 1$ in den am Anfange des §. 2 erwähnten übergeht, wenn man $n+1$ für n , und $g=0$, $h=1$ setzt.

Nach §. 3 kann der obige Werth auch durch

$$x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \int_g^h \frac{d^n (t^{\gamma+n-1} (1-t)^{\alpha+n-\gamma})}{dt^n} \frac{dt}{t-x}$$

ersetzt werden, also auch, wenn die Werthe γ , α eine Integration durch Theile gestatten, durch

$$(8.) \quad Z_n = x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \int_g^h \frac{t^{\gamma+n-1} (1-t)^{\alpha+n-\gamma}}{(t-x)^{n+1}} dt.$$

Die Differentialgleichung ist dann durch

$$aX_n + bZ_n$$

vollständig integrirt, wenn a und b willkürliche Constanten bezeichnen.

§. 8.

Die Resultate, welche *Gaußs* durch Vergleichung von T und $\int_0^1 \frac{T dt}{t-a}$ für die Kettenbruchentwicklung der logarithmischen Reihe gefunden hat, lassen sich durch Vergleichung von X_n und Z_n auf die besondere hypergeometrische Reihe $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ übertragen. Man erhält auf diesem Wege fast ohne Rechnung die Resultate über die Werthe der Näherungsbrüche von Kettenbrüchen, die zuerst durch Auflösung linearer Gleichungen gefunden worden sind (Bd. 32, S. 208, so wie Bd. 34, S. 297 dieses Journals).

Es seien $\alpha + 1 - \gamma$ und γ positiv, ferner $x > 1$; bezeichnet man den Werth von X_n für $x = t$ mit T_n und setzt

$$-W_n = \int_0^1 t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\gamma} \frac{T_n - X_n}{t-x} dt,$$

so daß W_n eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, so hat man offenbar die Gleichung

$$X_n \int_0^1 \frac{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\gamma}}{(t-x)} dt = W_n + \int_0^1 \frac{t^{\gamma-1} (1-t)^{\alpha-\gamma}}{t-x} T dt$$

und hieraus, wenn man mit a und b leicht zu berechnende Constanten bezeichnet,

$$\frac{a}{x} X_n F\left(\gamma, 1, \alpha+1, \frac{1}{x}\right) = W_n + b \int_0^1 \frac{t^{\gamma+n-1} (1-t)^{\alpha+n-\gamma}}{(t-x)^{n+1}} dt.$$

Das mit b multiplicirte Integral, nach absteigenden Potenzen von x entwickelt, fängt mit x^{-n-1} an (der Grad ist $-(n+1)$): wir haben also eine Function n^{ten} Grades X_n , die, mit $F\left(\gamma, 1, \alpha+1, \frac{1}{x}\right)$ multiplicirt, eine ganze Function xW_n und einen Rest vom $-n^{\text{ten}}$ Grade giebt. Seit der Arbeit von *Gaußs* über mechanische Quadraturen ist es bekannt, wie diese Eigenschaft der X_n es möglich macht, sofort die Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruches für $F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x}\right)$, wie er sich aus der Abhandlung von *Gaußs* über die hyper-

geometrische Reihe (art. 13) ergiebt, nämlich nach der dortigen Bezeichnung von

$$\frac{x}{x-a} \frac{1}{1-b} \frac{1}{x-c} \frac{1}{1-\text{etc.}}$$

anzugeben. Der Nenner des $2n^{\text{ten}}$ Näherungswerthes Q_{2n} ist nämlich von der Form

$$Q_{2n} = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n,$$

der des $(2n+1)^{\text{ten}}$

$$Q_{2n+1} = x(x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n),$$

wenn wir x als den ersten, $x-a$ als den zweiten zählen. Ferner muß Q_{2n} oder Q_{2n+1} , mit $F(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{x})$ multiplicirt, gleich einer ganzen Function von x vermehrt um einen Rest vom Grade $-n$ sein. Es können sich daher Q_{2n} und Q_{2n+1} nur durch constante Factoren von $F(-n, \gamma+n-1, \alpha, x)$ und $x F(-n, \gamma+n, \alpha+1, x)$ unterscheiden; bestimmt man diese gehörig, nämlich so, daß die höchste Potenz von x die Einheit zum Factor erhält, so entsteht

$$Q^{2n} = x^n F(-n, 1-\alpha-n, 2-\gamma-2n, \frac{1}{x}),$$

$$Q_{2n+1} = x^{n+1} F(-n, -\alpha-n, 1-\gamma-2n, \frac{1}{x}).$$

Haben γ und $\alpha+1-\gamma$ andere Zeichen, so kann sich an den Resultaten offenbar nichts ändern.

§. 9.

Wir gehen nun zu der letzten Untersuchung über, nämlich zur Beantwortung der Frage, ob es für jeden endlichen Werth der Elemente möglich ist, die Differentialgleichung (1.) durch einfache bestimmte Integrale vollständig zu integrieren. Daß die sechs bestimmten Integrale des §. 1 nicht zugleich gelten, sieht man ohne weiteres ein; indem ich nun nicht nur, wie früher,

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha},$$

sondern auch

$$W = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}$$

setze, sollen in der folgenden Tabelle die Fälle angegeben werden, in denen $\int V du$ oder $\int W du$ eine Lösung von (1.) verschafft. Es ist dabei nach den Vorzeichen von $\alpha, \beta, \gamma-\alpha, \gamma-\beta$ eingetheilt und, um die Anzahl der Fälle zu beschränken, angenommen worden, daß $\beta-\alpha$ nicht negativ ist.

	β	$\gamma - \beta$	α	$\gamma - \alpha$	L ö s u n g e n			
					$x > 1$		$x < 1$	
1.	+	+	+	+			$\int_0^1 V du$	
2.	+	+	-	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 V du$	$\int_0^{\frac{1}{x}} V du$	$\int_0^1 V du$	$\int_1^{\frac{1}{x}} V du$
3.	+	-	+	+	$\int_0^{-\infty} W du$	$\int_1^{\infty} W du$	$\int_0^1 W du$	$\int_0^{-\infty} W du$
4.	+	-	+	-	$\int_0^{-\infty} V du$		$\int_0^{-\infty} V du$	
5.	+	-	-	+	$\int_0^{\frac{1}{x}} V du$			
6.	+	-	-	-	$\int_0^{-\infty} V du$	$\int_0^{\frac{1}{x}} V du$	$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V du$	$\int_0^{-\infty} V du$
7.	-	+	-	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 V du$		$\int_1^{\frac{1}{x}} V du$	
8.	-	-	-	+	$\int_{\frac{1}{x}}^1 W du$	$\int_1^{\infty} W du$	$\int_1^{\frac{1}{x}} W du$	$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} W du$
9.	-	-	-	-			$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} V du$	

Da sowohl für den Fall, daß $x > 1$ als auch für den, daß $x < 1$, zwei verschiedene Lösungen angegeben werden müssen, so erkennt man in der Tabelle leicht, wann noch Lösungen zu suchen sind.

§. 10.

Um solche aufzufinden, kann man sich des in §. 2 aufgestellten Satzes bedienen. Dieser giebt nämlich die Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen zweier hypergeometrischen Reihen, deren Elemente α , β , γ und $\varrho - \alpha$, $\varrho - \beta$, $\varrho + 1 - \gamma$ sind. Man wende ihn an, indem man an die Stelle von α , β , γ respective $\varrho - \alpha$, $\varrho - \beta$, $\varrho + 1 - \gamma$ setzt, so dafs zugleich $\varrho - \alpha$, $\varrho - \beta$, $\varrho + 1 - \gamma$ respective in

$$\varrho - (\varrho - \alpha) = \alpha, \quad \varrho - (\varrho - \beta) = \beta, \quad \varrho + 1 - (\varrho + 1 - \gamma) = \gamma$$

übergehen. Nimmt man nun ϱ so, dafs $\varrho - \alpha$ gleich einer negativen ganzen Zahl $-n$ wird, so ist ein Integral der ersten Differentialgleichung eine endliche Reihe

$$F(-n, \alpha - \beta - n, \alpha + 1 - \gamma - n, x) = f(x);$$

die zweite Differentialgleichung ist jetzt die Differentialgleichung (1.) selbst, nach (2.) findet man also ein Integral von (1.) durch die Formel:

$$z = \int_g^h \frac{t^{\alpha-\gamma-n} (1-t)^{\gamma-\beta-n-1}}{(t-x)^{\alpha-n}} f(t) dt$$

oder mit Benutzung der in §. 3 gegebenen Umformung durch die Formel:

$$(9.) \quad Z = \int_g^h \frac{d^n \{ t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \}}{dt^n} (t-x)^{n-\alpha} dt,$$

vorausgesetzt, dafs bei constantem g und h

$$\left[\frac{t^{\alpha+1-\gamma-n} (1-t)^{\gamma-\beta-n}}{(t-x)^{\alpha-n}} \left(f'(t) + \frac{\alpha-n}{t-x} f(t) \right) \right]_g^h = 0$$

ist, und dafs, wenn $h = x$, der Ausdruck in der Parenthese für $t = g$ verschwindet und $n+1-\alpha$ positiv ist.

Dieses Resultat läfst sich übrigens leicht verificiren, und ähnliche lassen sich eben so leicht auffinden, wenn man erwägt, dafs nach Integration durch Theile auf der rechten Seite unter dem Integrale

$$t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (t-x)^{-\alpha} dt$$

übrig bleibt, wenn diese Operation erlaubt ist. Dieser Ausdruck, zwischen g und h integrirt, ist aber eine Lösung von (1.); sind z. B. g und h gleich 0 und 1, so giebt die Integration eine Lösung der dritten Klasse. Man schliesst hieraus unmittelbar, dafs auch, wenn die Integration durch Theile nicht gestattet ist, Z eine Lösung von (1.) ist, wenn nur das Integral einen Werth hat.

§. 11.

Wir können nun die Tafel des §. 9 vervollständigen.

1) Im ersten Falle fehlen zwei Integrale, wenn $x > 1$; man kann offenbar folgende hinzufügen:

$$\int_x^\infty \frac{d^n \{ t^{\beta-\gamma} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \}}{dt^n} (t-x)^{n-\beta} dt,$$

$$\int_x^\infty \frac{t^n \{ t^{\alpha-\gamma} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \}}{dt^n} (t-x)^{n-\alpha} dt,$$

wenn n so groß genommen wird, daß respective $n+1-\beta$ oder $n+1-\alpha$ positiv ist. Darf $n=0$ genommen werden, so sind diese Integrale respective von der III^{ten} und IV^{ten} Klasse.

Ist $x < 1$, so fehlt ein Integral, welches man jedenfalls $= (1-x)^{-\beta} \zeta$ setzen kann, wo ζ der Differentialgleichung (1.) genügt, wenn man in ihr α, β, γ, x mit $\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{1-x}$ vertauscht. Man vergl. Form 3) der IV^{ten} Classe. Hieraus folgt, daß als fehlendes Integral

$$(1-x)^{-\beta} \int_{\frac{1}{1-x}}^\infty \frac{d^n \{ t^{\gamma-\beta-1} (1-t)^{-\alpha} \}}{dt^n} \left(t - \frac{1}{1-x} \right)^{\alpha+n-\gamma} dt$$

betrachtet werden kann, wenn $\alpha+n+1-\gamma$ positiv ist. Für $n=0$ erhält man ein Integral II^{ter} Classe.

2) Im 4^{ten} Falle, wenn $x > 1$, kann offenbar

$$\int_x^\infty \frac{d^n \{ t^{\beta-\gamma} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \}}{dt^n} (t-x)^{n-\beta} dt$$

mit der Bedingung, daß $n+1-\beta$ positiv ist, als Lösung genommen werden. Ist $x < 1$, so mache man mit Beachtung der Form 1) der II^{ten} Classe das fehlende Integral $= x^{-\alpha} \zeta$, wo ζ der Differentialgleichung genügt, in welche (1.) übergeht, wenn für α, β, γ, x resp. $\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}$ gesetzt wird. Dadurch erhält man als Lösung

$$x^{-\alpha} \int_{\frac{x-1}{x}}^\infty \frac{d^n \{ t^{\gamma-\beta-1} (1-t)^{\beta-1} \}}{dt^n} \left(t - \frac{x-1}{x} \right)^{n-\alpha} dt$$

mit der Bedingung, daß $n+1-\alpha$ positiv sein muß. Für $n=0$ erhält man Integrale der III^{ten} und V^{ten} Classe.

3) Im fünften Falle muß man ein Integral suchen, wenn $x > 1$. Mit Berücksichtigung des 4^{ten} Integrals I^{ter} Classe setze man $z = (1-x)^{-\beta} \zeta$, und vertausche ähnlich wie oben α, β, γ, x mit $\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1}$, so findet man

$$(1-x)^{-\beta} \int_{\frac{x}{x-1}}^{\infty} \frac{d^n \{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\}}{dt^n} \left(t - \frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta} dt$$

mit der Bedingung, daß $n+1-\beta$ positiv sei. Ist $x < 1$, so erhält man zwei Integrale

$$(1-x)^{-\beta} \int_{\frac{x}{x-1}}^{-\infty} \frac{d^n \{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\alpha-1}\}}{dt^n} \left(t - \frac{x}{x-1}\right)^{n-\beta} dt,$$

$$x^{-\beta} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{d^n \{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{-\alpha}\}}{dt^n} \left(t - \frac{1}{x}\right)^{\gamma+n-\beta-1} dt$$

resp. mit den Bedingungen, daß $n+1-\beta$ und $\gamma+n-\beta$ positiv sein müssen. Für $n=0$ verwandeln sich die Integrale in solche der VI^{ten}; VI^{ten} und I^{ten} Classe.

4) Im 7^{ten} Falle findet man für $x > 1$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_x^{\infty} \frac{d^n \{t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{\alpha-\gamma}\}}{dt^n} (t-x)^{n+\beta-1} dt$$

und für $x < 1$

$$x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \int_{\frac{x-1}{x}}^{-\infty} \frac{d^n \{t^{\beta-\gamma}(1-t)^{-\beta}\}}{dt^n} \left(t - \frac{x-1}{x}\right)^{n+\alpha-1} dt$$

resp. mit den Bedingungen, daß $n+\beta$ und $n+\alpha$ positiv sein müssen. Für $n=0$ entstehen Integrale der IV^{ten} und I^{ten} Classe.

5) Im 9^{ten} Falle erhält man für $x > 1$

$$x^{1-\gamma} \int_x^{\infty} \frac{d^n \{t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}\}}{dt^n} (t-x)^{\gamma+n-\beta-1} dt$$

und

$$x^{1-\gamma} \int_x^{\infty} \frac{d^n \{t^{\alpha-1}(1-t)^{-\beta}\}}{dt^n} (t-x)^{\gamma+n-\alpha-1} dt,$$

endlich für $x < 1$

$$x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} \int_{\frac{1}{1-x}}^{\infty} \frac{d^n \{t^{-\beta}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\}}{dt^n} \left(t - \frac{1}{1-x}\right)^{n+\alpha-1} dt.$$

Die Bedingungen sind resp., daß $\gamma+n-\beta$, $\gamma+n-\alpha$ und $n+\alpha$ positiv sein müssen; für $n=0$ entstehen Integrale der III^{ten}, IV^{ten} und II^{ten} Classe.