

SUR UN THÉORÈME DE M. HERMITE  
RELATIF À LA FONCTION  $E(x)$

PAR

M. A. STERN

à BERNE.

Une considération très élémentaire conduit à la formule

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) = E(mx)$$

que M. HERMITE a démontrée dans le T. 5 de ce journal (p. 315).

Soient  $k$  et  $m$  deux nombres entiers,  $k < m$ , et

$$x \geq E(x) + \frac{k}{m}, \quad x < E(x) + \frac{k+1}{m}.$$

On a donc

$$mx \geq mE(x) + k, \quad mx < mE(x) + k + 1$$

et

$$E(mx) = mE(x) + k.$$

D'ailleurs on a

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + \frac{k+1}{m} + \frac{m-k-1}{m}$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geq E(x) + \frac{k}{m} + \frac{m-k}{m}$$

c'est à dire

$$x + \frac{m-k-1}{m} < E(x) + 1$$

$$x + \frac{m-k}{m} \geq E(x) + 1.$$

Ainsi on voit que chaque terme de la série

$$E(x), E\left(x + \frac{1}{m}\right), \dots, E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right)$$

a la valeur  $E(x)$ , pendant que chaque terme de la série

$$E\left(x + \frac{m-k}{m}\right), \dots, E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est  $= E(x) + 1$ . La somme de ces deux séries aura donc la valeur

$$(m-k)E(x) + k[E(x) + 1] = mE(x) + k = E(mx).$$

Cette démonstration conduit aussi au théorème suivant:

La valeur de la série

$$S = E\left(x + \frac{1}{m}\right) - E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) - \dots \pm E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

est  $= E(x), -1, E(x) + 1$ , zéro, selon que les nombres  $m$  et  $k$  sont tous deux pairs ou tous deux impairs ou  $m$  pair et  $k$  impair ou  $m$  impair et  $k$  pair.

1°. Si  $m$  et  $k$  sont pairs,  $m-k-1$  est impair, alors les  $m-k-1$  premiers termes de la série se réduisent à un seul qui a la valeur  $E(x)$  tandis que les  $k$  termes suivants se détruisent mutuellement.

2°. Si  $m$  et  $k$  sont impairs,  $m-k-1$  est aussi impair, la somme des  $m-k-1$  premiers termes a la valeur  $E(x)$ , tandis que les  $k$  termes suivants se réduisent à un seul doué du signe négatif, ainsi on a  $S = E(x) - [E(x) + 1] = -1$ . On voit de même que

3°. Si  $m$  est pair et  $k$  impair la somme des  $m-k-1$  premiers termes sera  $= 0$  et la somme des  $k$  suivants se réduira à  $E(x) + 1$ . Et

4°. Si  $m$  est impair et  $k$  pair, tant la somme des  $m-k-1$  premiers termes que la somme des  $k$  suivants se réduira à zéro.

En combinant les deux théorèmes par addition et soustraction on trouve les formules suivantes:

Si  $m$  est un nombre pair on aura, selon que  $k$  est pair ou impair

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + E\left(x + \frac{5}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \\ = \frac{E(mx)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{E(mx) + 1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right) \\ = \frac{E(mx)}{2} - E(x) \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - 1}{2} - E(x).$$

Si  $m$  est un nombre impair on aura, selon que  $k$  est pair ou impair,

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + E\left(x + \frac{3}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-2}{m}\right) \\ = \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) - 1}{2}$$

$$E\left(x + \frac{2}{m}\right) + E\left(x + \frac{4}{m}\right) + \dots + E\left(x + \frac{m-1}{m}\right) \\ = \frac{E(mx) - E(x)}{2} \quad \text{ou} \quad = \frac{E(mx) - E(x) + 1}{2}.$$

Il est évident que,  $m$  étant pair,  $E(mx)$  sera pair si  $k$  est pair et impair si  $k$  est impair, tandis que,  $m$  étant impair,  $E(mx) - E(x)$  sera pair si  $k$  est pair et impair si  $k$  est impair.

Les considérations précédentes montrent aussi qu'on peut exprimer la valeur  $S$  de la série

$$E\left(x + \frac{1}{m}\right) + 2E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + (m - k - 1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right) \\ + (m - k)E\left(x + \frac{m-k}{m}\right) + \dots + (m - 1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right)$$

au moyen de  $E(x)$  et de  $E(mx)$ .

Car on a

$$S = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} E(x) + \left[ \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2} \right] (E(x) + 1) \\ = \frac{m(m-1)}{2} E(x) + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}.$$

Si, dans cette équation, on substitue  $E(mx) - mE(x)$  au lieu de  $k$ , on trouve

$$S = \frac{(2m-1)E(mx) - m^2 E(x) - [E(mx) - mE(x)]^2}{2}.$$

Soit p. e.  $x = \frac{19}{8}$ ,  $m = 6$ , alors on a  $E(x) = 2$ ,  $E(mx) = 14$ , et

$$S = 39 = \frac{11 \cdot 14 - 2 \cdot 36 - 4}{2}.$$

Il est évident qu'on trouve par la même méthode la valeur de la série beaucoup plus générale

$$f(1)E\left(x + \frac{1}{m}\right) + f(2)E\left(x + \frac{2}{m}\right) + \dots + f(k-1)E\left(x + \frac{m-k-1}{m}\right) + \dots \\ + f(m-1)E\left(x + \frac{m-1}{m}\right),$$

$f(k)$  désignant une fonction de  $k$ , si l'on suppose connue la valeur d'une série de la forme

$$f(1) + f(2) + \dots + f(m).$$

Berne le 7 Janvier 1886.