

6.

Bemerkungen zu *Jacobi's* Abhandlung über Variationsrechnung.

(Von Herrn *E. Heine* in Halle.)

I.

Der Satz, welchen *Jacobi* in *Crelle's* Journal f. M. Bd. XVII Seite 71 aufstellte, und dessen Richtigkeit im VI^{ten} Bande des *Liouville's*chen Journals *Lebesgue* S. 17—35 und *Delaunay* S. 211—218 nachgewiesen haben, läßt sich durch folgende, auf ganz verschiedenen Prinzipien beruhende Betrachtungen ohne grofse Rechnung ableiten:

Ist A eine gegebene, u irgend eine Function von x , deren Differentialquotienten nach x durch u' , etc. bezeichnet werden, setzt man ferner

$$(1.) \quad 2Z = (-1)^n \int A u^{(n)} u^{(n)} dx,$$

so wird

$$\delta Z = (-1)^n \int A u^{(n)} \delta u^{(n)} dx$$

oder, nach bekannten Sätzen, gleich einem von dem Integralzeichen freien Theile — er sei L — vermehrt um $\int \frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n} \delta u dx$. Bedeutet nun y eine gegebene Function von x , und setzt man $u = yt$, so ist $\delta u = y \delta t$, also

$$(2.) \quad \delta Z = L + \int y \frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n} \delta t dx.$$

Einen *gleichen Werth* muſs man finden, wenn man zuerst $u = yt$ in (1.) einsetzt, und erst dann variirt; nur *die Form*, in der beide Ausdrücke auftreten, wird verschieden, und grade dadurch *Jacobi's* Satz erhalten werden.

Substituirt man obigen Werth für u , so hat $u^{(n)}$ die Form

$$\alpha t^{(n)} + \alpha_1 t^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} t' + \alpha_n t,$$

wo die α einfache Functionen von y , also auch Functionen von x sind; folglich besteht $Au^{(n)}u^{(n)}$ aus einer Summe von Gliedern $\sum \beta t^{(m)} t^{(p)}$, wo die β gegebene Functionen von x (wie die α) sind, und die Indices m und p die Werthe 0, 1, etc. n annehmen. Setzt man diesen Ausdruck in (1.), so

läßt sich $2Z$ leicht auf die Form

$$(3.) \quad M + \int (C_0 t t - C_1 t' t' + C_2 t'' t'' - \dots \pm C_n t^{(n)} t^{(n)}) dx$$

bringen, wenn M , wie früher L , keine Integration enthält, und die C gegebene Functionen von x sind. Es besteht nämlich $\sum \int \beta t^{(m)} t^{(p)} dx$ erstens aus Gliedern, für die $m = p$ ist, die also unmittelbar die Form (3.) haben, zweitens aus Gliedern, in denen m und p verschieden sind. Es sei $p > m$, und zwar zunächst $p = m + 1$; für solche Glieder ist

$$\int \beta t^{(m)} t^{(p)} dx = \int \beta t^{(m)} t^{(m+1)} dx = \frac{\beta t^{(m)} t^{(m)}}{2} - \int \frac{\beta'}{2} t^{(m)} t^{(m)} dx,$$

also von der Form (3.). Ist $p - m > 1$, so reducirt man vermittelst Integration durch Theile, nämlich nach der Gleichung

$$\int \beta t^{(m)} t^{(p)} dx = \beta t^{(m)} t^{(p-1)} - \int \beta' t^{(m)} t^{(p-1)} dx - \int \beta t^{(m+1)} t^{(p-1)} dx$$

das Integral auf der linken Seite auf solche von den *beiden* eben betrachteten Formen, also auch auf die *eine* Form $\int \beta t^{(r)} t^{(r)} dx$.

Nimmt man nun die Variation von $2Z$ in der Form (3.), so wird nach dem schon oben benutzten bekannten Satze δZ gleich einem von dem Integralzeichen freien Theile N vermehrt um

$$(4.) \quad \int \left(C_0 t + \frac{d(C_1 t')}{dx} + \frac{d^2(C_2 t'')}{dx^2} + \dots + \frac{d^n(C_n t^{(n)})}{dx^n} \right) \delta t dx.$$

Es muss daher der Ausdruck (4.) gleich dem Integrale in (2.) sein, d. h.

$$(5.) \quad y \frac{d^n(Au^{(n)})}{dx^n} = C_0 t + \frac{d(C_1 t')}{dx} + \dots + \frac{d^n(C_n t^{(n)})}{dx^n}.$$

Die Gröfse C_0 ist offenbar gleich $y \frac{d^n(Ay^{(n)} t)}{dx^n}$; denn da $u = yt$, so wird

$$u^{(n)} = y^{(n)} t + \frac{n}{1} y^{(n-1)} t' + \dots$$

Es ist daher

$$y \frac{d^n(Ay^{(n)} t)}{dx^n}$$

das einzige Glied, welches einen Beitrag zu $C_0 t$ liefern kann, und dieser ist offenbar

$$y t \frac{d^n(Ay^{(n)})}{dx^n}.$$

Aus diesen Entwicklungen folgt unmittelbar *Jacobi's* Satz. Macht man nämlich

$$U = A_0 u + \frac{d(A_1 u')}{dx} + \dots + \frac{d^n(A_n u^{(n)})}{dx^n},$$

bezeichnet durch die A wiederum gegebene Functionen von x , und setzt $u = yt$, wo y eine gegebene Function von x ist, so wird nach den obigen Entwicklungen

$$yU = B_0 t + \frac{d(B_1 t')}{dx} + \dots + \frac{d^n(B_n t^{(n)})}{dx^n},$$

wenn die B ähnlich den C , nämlich gleichfalls bekannte Functionen von x sind. Da ferner

$$B_0 = y \left(A_0 y + \frac{d(A_1 y')}{dx} + \dots + \frac{d^n(A_n y^{(n)})}{dx^n} \right)$$

ist, so wird, wenn y so gewählt wird, dafs es ein Integral der Differentialgleichung $U = 0$ ist, auch B_0 verschwinden, also

$$\int y U dx = B_1 t' + \frac{d(B_2 t'')}{dx} + \dots + \frac{d^{n-1}(B_n t^{(n)})}{dx^{n-1}},$$

wie der Satz von *Jacobi* behauptet.

Anmerk. Um die *Werthe* der B , die in jener Abhandlung von *Jacobi* nicht in Frage kommen, wirklich zu bestimmen, habe ich das Verfahren etwas abgeändert, indem ich schon früher durch Theile integrierte, und dadurch $\int A u^{(n)} u^{(n)} dx$ auf $\int u \frac{d^n(A u^{(n)})}{dx^n} dx$ reducirte. Setzt man in dieses Integral $u = ty$, so hat man nur Integrale von der Form $\int \beta t^{(p)} dx$ statt wie früher von der Form $\int \beta t^{(m)} t^{(p)} dx$ zu behandeln.

III.

Seite 72 stellt *Jacobi* einen zweiten Satz auf, der gleichfalls von *Delaunay* im weiteren Verlaufe der oben erwähnten Arbeit bewiesen ist. Setzt man nämlich

$$J = \int f(x, y, y', \dots y^{(n)}) dx,$$

so zerfällt bekanntlich δJ in einen Theil wie L und ein Integral $\int V dy dx$, wo

$$V = f'(y) - \frac{df'(y')}{dx} + \dots \pm \frac{d^n f'(y^{(n)})}{dx^n}$$

ist. *Jacobi* behauptet, dafs δV die Form

$$(6.) \quad A \delta y + \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \dots + \frac{d^n(A_n \delta y^{(n)})}{dx^n} = W$$

hat. Diesen Satz durch directes Variiren von V zu beweisen scheint Schwierigkeiten zu haben; ich schlage deshalb folgenden, dem obigen ähnlichen Weg ein:

Es seien δ und θ Zeichen von Variationen, die unabhängig von einander sind; alsdann wird die doppelte Variation $\delta\theta J$ gleich

$$(7.) \quad \Sigma \int f''(y^{(m)}, y^{(p)}) (\delta y^{(m)} \theta y^{(p)} + \theta y^{(m)} \delta y^{(p)}) dx,$$

wenn das Summenzeichen sich auf alle Werthe von m und p bezieht, die man durch Combinationen der Zahlen $0, 1, 2, \dots n$ zur zweiten Klasse mit Wiederholung ohne Permutation erhält. Einerseits ist dieser Ausdruck offenbar von der Form

$$L + \int \delta V \theta y dx,$$

andererseits läßt er sich (s. unten) in die Gestalt

$$(8.) \quad M + \int (A \delta y \theta y - A_1 \delta y' \theta y' + \dots \pm A_n \delta y^{(n)} \theta y^{(n)}) dx$$

bringen, folglich nach bekannten Sätzen sofort in

$$N + \int W \theta(y) dx$$

transformiren. Hieraus folgt unmittelbar, dafs δV gleich W ist, wie behauptet war.

Dafs $\delta\theta J$ wirklich die Form (8.) hat, sieht man auf folgende Art ein: Die Glieder von (7.), für welche $m = p$, haben bereits diese Gestalt; in den übrigen mag $p > m$ sein, und von diesen betrachten wir zuerst alle, in welchen $p = m + 1$. Dann wird

$$\int \beta (\delta y^{(m)} \theta y^{(m+1)} + \theta y^{(m)} \delta y^{(m+1)}) dx$$

offenbar auf

$$\int \beta' \delta y^{(m)} \theta y^{(m)} dx$$

also auf die verlangte Form durch eine einmalige Integration durch Theile zurückgeführt. Ist endlich p noch gröfser, so wird

$$\int \beta (\delta y^{(m)} \theta y^{(p)} + \delta y^{(p)} \theta y^{(m)}) dx$$

auf

$$\int \beta (\delta y^{(m+1)} \theta y^{(p-1)} + \delta y^{(p-1)} \theta y^{(m+1)}) dx \text{ und } \int \beta' (\delta y^{(m)} \theta y^{(p-1)} + \delta y^{(p-1)} \theta y^{(m)}) dx$$

also schließlic auf eine der früheren Formen, und daher auf die Form von (8.) reducirt. —

Januar 1857.