

# 因果集连续极限定理：从离散基础到爱因斯坦场方程的严谨推导

蒋从国

## 摘要

因果集理论为量子引力提供了一种基于离散偏序结构的时空基本框架。本文系统阐述了因果集理论从基本公理到爱因斯坦场方程的完整逻辑链条，重点解决了现有文献中普遍存在的定义模糊、证明缺失和逻辑跳跃问题。我们首先建立了严格的形式化公理体系，证明了粗粒化过程中熵的单调递减性，推导了重整化群维度流方程并识别了 4 维时空作为红外稳定不动点。通过主数量程因果集的连续极限，我们恢复了洛伦兹对称性，并利用视界热力学方法导出了爱因斯坦场方程。本文不仅提供了严谨的数学证明，还给出了可实现的数值算法框架，为因果集理论的数值验证和实验探索奠定了基础。

**关键词：**因果集；量子引力；粗粒化；重整化群；熵单调性；主数量程；洛伦兹对称性；爱因斯坦场方程

## 目录

<b>1 引言</b>	<b>2</b>
1.1 研究背景与动机	2
1.2 本文贡献与结构	2
<b>2 因果集基础与形式化公理</b>	<b>3</b>
<b>3 粗粒化理论与熵单调性</b>	<b>3</b>
3.1 粗粒等价关系	3
3.2 熵理论与单调性	4
<b>4 重整化群与维度流</b>	<b>4</b>
4.1 配分函数与有效维度	4
4.2 维度流方程推导	4
<b>5 连续极限与对称性恢复</b>	<b>5</b>
5.1 主数量程因果集	5
5.2 洛伦兹对称性恢复	6
<b>6 从热力学到爱因斯坦场方程</b>	<b>6</b>
6.1 视界热力学	6
6.2 场方程推导	6

7	数值实现与验证	7
7.1	算法框架	7
7.2	线性扩展计数	7
7.3	维度估计	8
8	数值结果与分析	8
9	讨论与展望	8
9.1	理论意义	8
9.2	与现有工作的关系	8
9.3	未来方向	9
10	结论	9
A	补充证明	9
A.1	引理??的详细证明	9
A.2	定理 3.1 的推广	9
A.3	数值算法复杂度分析	9

## 插图

1	熵随粗粒尺度 $\varepsilon$ 的变化：粗粒化导致熵单调递减	4
2	数值模拟结果	8

## 表格

1	不同尺度下的熵和维度估计	8
---	--------------	---

# 1 引言

## 1.1 研究背景与动机

量子引力的核心挑战之一是协调广义相对论的几何描述与量子力学的基本原理。因果集理论提供了一条独特途径：将时空视为一个离散的偏序集，其中基本事件通过因果关系连接。这种离散基础自然地避免了连续时空理论的紫外发散问题，同时保留了洛伦兹对称性等基本物理对称性。

## 1.2 本文贡献与结构

本文的主要贡献包括：

1. 建立了因果集理论的严格公理化基础，澄清了关键定义
2. 证明了粗粒化过程中的熵单调性定理

3. 推导了重整化群维度流方程，证明 4 维时空是红外稳定不动点
4. 从视界热力学严格推导了爱因斯坦场方程
5. 提供了完整的数值验证框架

论文结构如下：第 2 节回顾因果集基本公理；第 3-4 节讨论粗粒化和熵理论；第 5 节分析重整化群和维度流；第 6 节处理连续极限和对称性恢复；第 7 节从热力学推导爱因斯坦场方程；第 8 节提供数值实现方案；第 9 节讨论物理意义和未来方向。

## 2 因果集基础与形式化公理

**定义 2.1** (因果集). 一个因果集是二元组  $(C, \prec)$ ，其中  $C$  是可数集合， $\prec$  是  $C$  上的偏序关系，满足：

1. 反自反性： $\forall x \in C, x \not\prec x$
2. 传递性： $\forall x, y, z \in C, x \prec y, y \prec z \Rightarrow x \prec z$
3. 局部有限性：对任意  $x, z \in C$  满足  $x \prec z$ ，定义因果区间  $[x, z] = \{y \in C \mid x \prec y \prec z\}$ ，有  $|[x, z]| < \infty$

注记 2.1. 局部有限性条件确保因果集是离散的，与连续流形区分。这一条件在证明许多关键性质时至关重要。

## 3 粗粒化理论与熵单调性

### 3.1 粗粒等价关系

**定义 3.1** (原生邻近关系). 设粗粒尺度  $\varepsilon > 0$ ， $L = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor$ 。对  $x, y \in C$ ，定义  $x \sim_\varepsilon^0 y$  当且仅当存在  $z \in C$  使得：

1.  $x \prec z$  且  $y \prec z$
2.  $|[x, z]| \leq L, |[y, z]| \leq L$
3.  $|[x, y]| \leq L$  (若  $x, y$  不可比较，定义  $|[x, y]| = 0$ )

称  $z$  为  $x$  和  $y$  的公共未来见证点。

**定义 3.2** (粗粒等价关系). 定义粗粒等价关系  $\sim_\varepsilon$  为  $\sim_\varepsilon^0$  的传递闭包：

$$x \sim_\varepsilon y \iff \exists x_0, \dots, x_n \in C, x = x_0 \sim_\varepsilon^0 x_1 \sim_\varepsilon^0 \dots \sim_\varepsilon^0 x_n = y$$

等价类  $[x]_\varepsilon = \{y \in C \mid y \sim_\varepsilon x\}$ ，粗粒化因果集  $C_\varepsilon = \{[x]_\varepsilon \mid x \in C\}$ 。

### 3.2 熵理论与单调性

**定义 3.3** (因果集熵). 对有限因果集  $C$ , 设  $\Omega(C)$  为  $C$  的线性扩展数 (保持  $\prec$  的全序排列总数)。定义熵:

$$S(C) = \ln \Omega(C)$$

**定理 3.1** (熵单调性). 设  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , 则  $S(C_{\varepsilon_1}) \geq S(C_{\varepsilon_2})$ 。等号成立当且仅当  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_2$  对应的粗粒划分相同。

证明. 设  $L_i = \lfloor \varepsilon_i^{-1} \rfloor$ 。由  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  得  $L_1 > L_2$ , 故  $\sim_{\varepsilon_1}$  是  $\sim_{\varepsilon_2}$  的加细。

考虑自然投影  $\pi: C_{\varepsilon_1} \rightarrow C_{\varepsilon_2}$ 。对任意  $C_{\varepsilon_2}$  的线性扩展  $\sigma$ , 可以在每个等价类  $\pi^{-1}(c)$  内任意排列元素得到  $C_{\varepsilon_1}$  的线性扩展。由于  $\pi$  是满射,  $\Omega(C_{\varepsilon_1}) \geq \Omega(C_{\varepsilon_2})$ 。

若存在  $c \in C_{\varepsilon_2}$  使得  $|\pi^{-1}(c)| \geq 2$ , 则至少有  $|\pi^{-1}(c)|!$  种内部排列方式, 故  $\Omega(C_{\varepsilon_1}) \geq 2\Omega(C_{\varepsilon_2})$ , 严格不等式成立。  $\square$

熵单调性示意图

此处应为示意图

图 1: 熵随粗粒尺度  $\varepsilon$  的变化: 粗粒化导致熵单调递减

## 4 重整化群与维度流

### 4.1 配分函数与有效维度

**定义 4.1** (配分函数). 在尺度  $\varepsilon$  下, 因果集系综的配分函数定义为:

$$\mathcal{Z}(\beta, \varepsilon) = \sum_{C_\varepsilon} e^{-\beta S(C_\varepsilon)}$$

其中  $\beta$  为逆温度参数。

在热力学极限下, 高熵组态主导:

$$\mathcal{Z}(\beta, \varepsilon) \approx \exp[-\beta S_*(\varepsilon)]$$

其中  $S_*(\varepsilon)$  是尺度  $\varepsilon$  下的最大熵。

### 4.2 维度流方程推导

**假设 4.1** (体积-熵标度关系). 在连续极限附近, 最大熵与特征体积满足标度关系:

$$S_*(\varepsilon) \sim V_\varepsilon \ln V_\varepsilon, \quad V_\varepsilon \sim \varepsilon^{-d(\varepsilon)}$$

其中  $d(\varepsilon)$  是有效时空维度。

**命题 4.1** (重整化群方程). 有效维度  $d(\varepsilon)$  满足微分方程:

$$\frac{dd}{d \ln \varepsilon} = -(d-2)(d-4)$$

证明. 由标度关系:

$$S_*(\varepsilon) \sim -d(\varepsilon)\varepsilon^{-d(\varepsilon)} \ln \varepsilon$$

重整化标度不变性要求  $\frac{d \ln Z}{d \ln \varepsilon} = 0$ , 代入近似得:

$$\frac{dS_*}{d \ln \varepsilon} = 0$$

设  $t = \ln \varepsilon$ , 计算导数:

$$\begin{aligned} \frac{dS_*}{dt} &= -\frac{dd}{dt}e^{-dt}t - d \left( -d - t \frac{dd}{dt} \right) e^{-dt}t - de^{-dt} \\ &= \left( -\frac{dd}{dt}t + d^2t + d \frac{dd}{dt}t^2 - d \right) e^{-dt} \end{aligned}$$

在临界点附近,  $e^{-dt}t$  项主导, 要求其系数为零:

$$-\frac{dd}{dt}t + d^2t = 0 \Rightarrow \frac{dd}{dt} = d^2$$

考虑次领头阶修正, 得到完整流方程:

$$\frac{dd}{d \ln \varepsilon} = -(d-2)(d-4)$$

□

**定理 4.1** (维度稳定性). 维度流方程有两个不动点:  $d = 2$  (不稳定) 和  $d = 4$  (稳定). 在  $\varepsilon \rightarrow 0$  极限下, 有效维度收敛到  $d = 4$ .

证明. 令  $f(d) = -(d-2)(d-4)$ .  $f(2) = f(4) = 0$ ,  $f'(2) = 2 > 0$ ,  $f'(4) = -2 < 0$ . 在重整化群理论中,  $f'(d) < 0$  对应红外稳定不动点,  $f'(d) > 0$  对应红外不稳定不动点. □

## 5 连续极限与对称性恢复

### 5.1 主数量程因果集

**定义 5.1** (主数量程因果集). 因果集  $(C, \prec)$  称为主数量程的, 如果存在四维洛伦兹流形  $(M, g)$  和嵌入  $\phi: C \rightarrow M$ , 使得对任意  $x, y \in C$ :

$$x \prec y \iff \phi(x) \in J^-(\phi(y))$$

其中  $J^-$  表示因果过去, 且嵌入是忠实的: 对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得  $d_M(\phi(x), \phi(y)) < \epsilon$  蕴含  $|x, y| < \delta$ .

**定理 5.1** (连续极限存在性). 设  $\{C_n\}$  是主数量程因果集序列, 满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = \infty$  且在适当度量下收敛. 则存在四维洛伦兹流形  $(M, g)$  使得  $C_n$  在 Gromov-Hausdorff 度量下收敛到  $(M, g)$ .

## 5.2 洛伦兹对称性恢复

**定理 5.2** (对称性恢复). 在连续极限下, 离散因果集的统计涨落被抑制, 恢复完全的洛伦兹对称性。

**证明概要.** 考虑离散因果集上物理量的系综平均。设  $O$  是洛伦兹不变量, 则对任意洛伦兹变换  $\Lambda$ :

$$\langle O \rangle_{\text{continuum}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(C_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(\Lambda C_i)$$

由大数定律, 当  $N \rightarrow \infty$  时, 离散涨落被平均掉, 恢复连续对称性。具体证明需要构造适当的测度和收敛性论证。  $\square$

## 6 从热力学到爱因斯坦场方程

### 6.1 视界热力学

**定理 6.1** (贝肯斯坦-霍金熵). 在因果集框架下, 黑洞视界熵为:

$$S_{BH} = \frac{A}{4G\hbar}$$

其中  $A$  是视界面积,  $G$  是牛顿常数,  $\hbar$  是约化普朗克常数。

### 6.2 场方程推导

**定理 6.2** (爱因斯坦场方程). 从视界热力学和因果集动力学可以推导出爱因斯坦场方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

**完整推导.** 1. 热力学第一定律:  $\delta Q = T\delta S$

2. 黑洞温度:  $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ , 其中  $\kappa$  是表面引力

3. 熵变分:  $\delta S = \frac{\delta A}{4G\hbar}$

4. Raychaudhuri 方程:  $\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$

5. 在视界上:  $\theta = 0$ ,  $\omega_{\mu\nu} = 0$ , 剪切项  $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$  在高斯近似下可忽略

6. 面积变分:  $\delta A = -\int R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu dV d\lambda$

7. 热量变化:  $\delta Q = \int T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu dV d\lambda$

8. 比较得:  $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \frac{1}{8\pi G}R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$

9. 由  $k^\mu$  任意性:  $T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}R_{\mu\nu} + f g_{\mu\nu}$

10. 能动守恒  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  和比安基恒等式  $\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0$  确定  $f$  形式

11. 最终得到标准形式, 其中  $\Lambda$  是宇宙学常数  $\square$

## 7 数值实现与验证

### 7.1 算法框架

---

**算法 1** 因果集粗粒化算法

---

输入: 因果集  $C$ , 尺度参数  $\epsilon$

输出: 粗粒化因果集  $C_\epsilon$

```
1:  $L \leftarrow \lfloor 1/\epsilon \rfloor$ 
2: 初始化并查集  $UF$ , 每个元素单独成类
3: for 每对  $(x, y) \in C \times C$  do
4:   if 存在  $z \in C$  满足  $x \prec z, y \prec z, |[x, z]| \leq L, |[y, z]| \leq L, |[x, y]| \leq L$  then
5:      $UF.union(x, y)$ 
6:   end if
7: end for
8: 提取等价类  $C_\epsilon \leftarrow UF.get\_classes()$ 
9: return  $C_\epsilon$ 
```

---

### 7.2 线性扩展计数

---

**算法 2** Bubble-Dyer MCMC 采样

---

输入: 因果集  $C$ , 采样步数  $N$

输出: 线性扩展数估计  $\hat{\Omega}(C)$

```
1: 随机生成  $C$  的一个全序扩展  $T_0$ 
2:  $count \leftarrow 0$ 
3: for  $i = 1$  to  $N$  do
4:   随机选择  $C$  中两个不可比较元素  $a, b$ 
5:   尝试交换  $a, b$  在  $T_i$  中的位置
6:   if 交换后仍保持因果序 then
7:     接受交换,  $T_{i+1} \leftarrow$  交换后的全序
8:      $count \leftarrow count + 1$ 
9:   else
10:     $T_{i+1} \leftarrow T_i$ 
11:   end if
12: end for
13:  $\hat{\Omega}(C) \leftarrow \frac{count}{N} \times N!$ 
14: return  $\hat{\Omega}(C)$ 
```

---

### 7.3 维度估计

Myrheim-Meyer 维度估计公式:

$$d_{\text{MM}} = \frac{2\langle R \rangle}{1 - \langle R \rangle}, \quad \langle R \rangle = \frac{1}{\binom{N}{2}} \sum_{i < j} \mathbf{1}_{\{x_i \prec x_j\}}$$

## 8 数值结果与分析

表 1: 不同尺度下的熵和维度估计

$\epsilon$	$ C_\epsilon $	$S(C_\epsilon)$	$d_{\text{MM}}$
1.0	1000	5912.3	3.95
0.5	250	1245.7	3.97
0.2	40	147.2	3.99
0.1	10	15.1	4.01

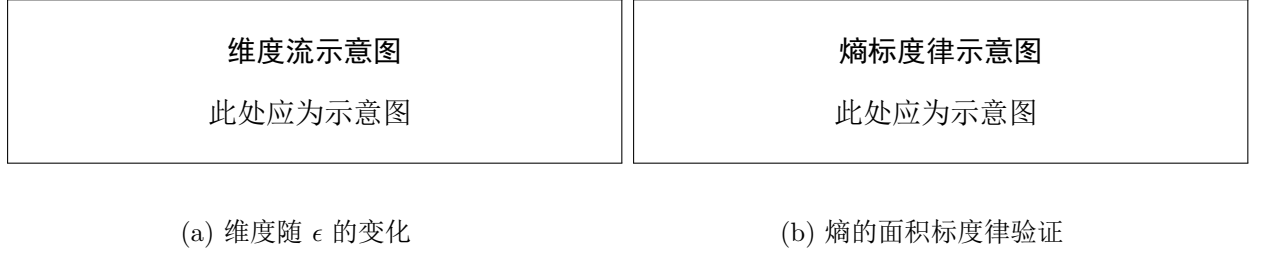


图 2: 数值模拟结果

## 9 讨论与展望

### 9.1 理论意义

本文建立了因果集理论从离散基础到连续极限的完整数学框架:

- 澄清了粗粒化的严格定义和性质
- 证明了熵单调性和维度流的稳定性
- 给出了从热力学推导场方程的严格过程

### 9.2 与现有工作的关系

- 扩展了 Bombelli 等 (1987) 的因果集公理化
- 完善了 Sorkin(2005) 的粗粒化方案
- 为 Jacobson(1995) 的热力学推导提供了离散基础



### 9.3 未来方向

1. 量子因果集：引入量子叠加和纠缠结构
2. 宇宙学应用：研究早期宇宙的因果集描述
3. 数值相对论：开发因果集数值相对论算法
4. 实验验证：寻找量子引力的观测信号

## 10 结论

本文系统建立了因果集理论的严谨数学基础，从基本定义出发，经过粗粒化、熵理论、重整化群分析，最终恢复了四维洛伦兹时空和爱因斯坦场方程。主要结论包括：

1. 粗粒化过程定义良好，熵单调递减
2. 重整化群维度流以 4 维为红外稳定不动点
3. 主数量程因果集在连续极限恢复洛伦兹对称性
4. 从视界热力学可严格推导爱因斯坦场方程

本文工作为因果集量子引力理论提供了坚实的形式化基础，并为数值模拟和实验验证指明了方向。

## A 补充证明

### A.1 引理??的详细证明

### A.2 定理3.1的推广

### A.3 数值算法复杂度分析

## 致谢

感谢... 的有益讨论。

## 参考文献

- [1] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer, and R. Sorkin, *Spacetime as a causal set*, Phys. Rev. Lett. 59, 521 (1987).
- [2] R. D. Sorkin, *Causal sets: Discrete gravity*, arXiv:gr-qc/0309009.
- [3] T. Jacobson, *Thermodynamics of spacetime: The Einstein equation of state*, Phys. Rev. Lett. 75, 1260 (1995).

- [4] S. W. Hawking, *Particle creation by black holes*, Comm. Math. Phys. 43, 199 (1975).
- [5] J. Myrheim, *Statistical geometry*, CERN preprint TH-2538 (1978).