

**9. Sättigungsstrom und Stromkurve
einer schlecht leitenden Flüssigkeit;
von Gustav Mie.**

Das Problem der Elektrizitätsleitung in einem ionenarmen Leiter, mit dem ich mich vor einigen Jahren schon einmal beschäftigte¹⁾, gewann neuerdings ein erhöhtes Interesse als es gelang, in einer schlecht leitenden Flüssigkeit, nämlich dem Äthyläther, Sättigungsstrom zu beobachten. Diese Beobachtung ist von Hrn. J. Schröder im Greifswalder physikalischen Institut gemacht worden und wird in nächster Zeit veröffentlicht werden. Hr. Schröder hat dabei sorgfältig gereinigten Äthyläther verwendet, indessen ist doch noch ein Stoff in äußerst kleinen Mengen als Verunreinigung zugegen gewesen, der das Leitvermögen vergrößerte. Es ist das daraus zu schließen, daß bei wochenlang dauerndem Stromdurchgang die Leitfähigkeit nach und nach herunterging, was ja eintreten muß, wenn durch den Strom ein dissoziierter Fremdstoff nach und nach verbraucht wird. Schließlich stellte sich ein anscheinend stationäres Verhalten ein, das vielleicht dem reinen Äthyläther zuzuschreiben ist. Während sich so die Stromleitung in der Flüssigkeit ganz langsam änderte, konnte Hr. Schröder eine größere Anzahl von Stromspannungskurven aufnehmen, die sämtlich das typische Aussehen von Sättigungsstromkurven hatten und von denen jede als ganzes immer etwas niedriger lag, als die vorhergehende, bis die stationäre Endkurve erreicht war.

Weit bequemer als die Stromstärke–Spannungskurve ist für die Diskussion der Eigentümlichkeiten eines ionenarmen Leiters die Stromstärke–Leitfähigkeitskurve, die meines Wissens

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 857. 1904.

zuerst von Hrn. E. v. Schweidler¹⁾ zu diesem Zweck gebraucht worden ist. Unter Leitfähigkeit ist dabei einfach der Quotient Stromstärke durch Spannung zu verstehen. Wäre die von J. J. Thomson unter der Voraussetzung eines homogenen Stromfeldes berechnete Formel richtig, so wäre die Strom-Leitfähigkeitskurve einfach eine Parabel. In der von mir benutzten Schreibweise lautet die Thomsonsche Formel²⁾:

$$\psi = \frac{R \cdot J}{\sqrt{1 - \frac{J}{J_M}}},$$

wo ψ die Spannung, J die Stromstärke, J_M die Sättigungsstromstärke, R der Widerstand bei unendlich kleinem Strom bedeuten. Nennen wir A , A_0 die Leitfähigkeiten bei der Stromstärke J und bei unendlich kleinem Strom, also:

$$A = J/\psi, \quad A_0 = 1/R,$$

so ist die Gleichung der Strom-Leitfähigkeitskurve:

$$\frac{A^2}{A_0^2} = 1 - \frac{J}{J_M}$$

also die Gleichung einer Parabel.

In meiner zitierten Arbeit habe ich nachgewiesen, daß die notwendig eintretenden Ungleichmäßigkeiten des elektrischen Stromfeldes recht bedeutende Abweichungen von der einfachen Thomsonschen Formel mit sich bringen. Und in der Tat zeigten sämtliche von Hrn. Schröder aufgenommene Kurven regelmäßig systematische Abweichungen von der Parabelform. Es schien mir nun wichtig zu untersuchen, ob diese Abweichungen durch die von mir durchgeführte genauere Berechnung erklärt werden. Es ist ja a priori zu erwarten, daß in den schwer beweglichen Flüssigkeiten die Voraussetzungen der Theorie besser erfüllt sind, als in den leicht beweglichen Gasen, wo durch Wirbelbewegungen leicht Störungen des Feldes eintreten können. Leider sind Hrn. Schröders Messungen für kleine Feldstärken noch mit einem durch einen gewissen

1) E. v. Schweidler, Wiener Ber. 113. Abt. IIa. p. 881. 1904.

2) G. Mie, l. c. p. 886.

Diffusionsvorgang verursachten Fehler behaftet, der bei einer Wiederholung der Messung leicht zu vermeiden sein wird. Bei der im folgenden gebrachten Vergleichung von zwei der von Hrn. Schröder empirisch gefundenen Kurven mit den entsprechenden berechneten müssen wir ihn aber natürlich mit berücksichtigen.

1. Die Form der von mir berechneten Stromspannungskurven ist wesentlich bestimmt durch zwei charakteristische Konstanten, die ich mit den Buchstaben λ und κ ¹⁾ bezeichnet habe. Es ist:

$$\lambda = \frac{u_K + u_A}{\alpha \cdot \epsilon_0} \cdot F,$$

wo u_K , u_A die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen, F die Äquivalentladung, also $(u_A + u_K) \cdot F$ die Äquivalentleitfähigkeit bei unendlich kleiner Spannung bedeuten, ferner α den Wiedervereinigungskoeffizienten der Ionen und ϵ_0 die absolute Dielektrizität des Mediums in dem benutzten Maßsystem (z. B. in dem von mir gebrauchten praktischen Maßsystem fürs Vakuum $\epsilon_0 = 0,884 \cdot 10^{-18}$, für Äthyläther $\epsilon_0 = 4,35 \cdot 0,884 \cdot 10^{-18}$). Diese Größe λ ist weiter nichts als der reziproke Wert der Langevinschen Zahl, welche den Bruchteil der Ionenzusammenstöße angibt, bei dem Wiedervereinigung eintritt. Da die Langevinsche Zahl ihrer Natur nach ein echter Bruch ist, der für hohe Drucke des ionisierten Gases den Grenzwert 1 annimmt, so ist λ stets größer als 1 und nur bei hohen Gasdrucken gleich 1.

Da es wohl als sicher anzunehmen ist, daß Flüssigkeiten dasselbe Verhalten zeigen, wie Gase bei sehr hohen Drucken, so werde ich hier der Konstanten λ den Wert 1 geben.

Es wäre übrigens ein leichtes, die Berechnungen auch auf Werte $\lambda > 1$ auszudehnen.

Die zweite Konstante κ ist folgendermaßen definiert:

$$\kappa = \frac{u_A - u_K}{u_A + u_K}.$$

Sie ist positiv oder negativ und ihr absoluter Betrag ist in vielen Fällen ein sehr kleiner Bruch. In meiner früheren

1) G. Mie, l. c. p. 861.

Arbeit habe ich mich auf die Berechnung unter Annahme eines sehr kleinen κ beschränkt. Nun ist es aber, wie man bei Betrachtung der Zahlen für Wanderungsgeschwindigkeit in wässrigen Lösungen sieht, sehr wohl möglich, daß κ bis 0,5 und darüber hinausgeht, und bei derartig großen Werten von κ ist die von mir durchgeführte Näherungsrechnung nicht mehr zu brauchen.

Im folgenden soll also das Problem für $\lambda = 1$ und beliebige Werte κ gelöst werden.

2. Um die Feldstärke E in dem Zwischenraum zwischen den beiden plattenförmigen Elektroden als Funktion des Abstandes x von der einen Elektrode (z. B. der Anode) zu berechnen, habe ich die folgenden beiden Variablen eingeführt (l. c. p. 861, 862):

$$z = \frac{E^2}{\alpha^2}, \quad a = \frac{1}{A_0} \cdot \frac{J}{2A},$$

$$\xi = \frac{x}{A} \cdot \frac{J_M}{J},$$

wo $2A$ den Abstand der beiden Elektroden, J, J_M die Dichte des herrschenden Stromes und des Sättigungsstromes, $A_0 (= 1/R)$ das Leitvermögen bei unendlich kleiner Stromdichte bedeuten. ξ ist die unabhängige, z die abhängige Variable. Die Differentialgleichung für z enthält in ihren Koeffizienten nur noch die beiden in 1. besprochenen Konstanten λ und κ . Sie ist von zweiter Ordnung und es treten deswegen in das Integral noch zwei aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten ein. Als Anfangsbedingungen sind gegeben, daß unmittelbar an der Anode die positiven Ionen fehlen ($v_K = 0$), unmittelbar an der Kathode die negativen ($v_A = 0$). Daraus ergibt sich ein Koeffizient der Reihe für z , wenn man um $\xi = 0$ entwickelt (an der Anodenseite), und einer der Reihe in der Umgebung von $\xi = 2 \cdot J_M/J$ (Kathodenseite), und zwar jedesmal der Faktor der ersten Potenz (c_{1A} und c_{1K} auf p. 863 der zitierten Arbeit). Führt man die Reihenentwicklung aus sowohl für die Anodenseite, als auch für die Kathodenseite, so bleibt in jeder der beiden Reihen noch eine unbestimmte Größe, nämlich das konstante Glied (c_{0A} und c_{0K}). Man muß, um diese zu gewinnen, noch die Bedingung einführen, daß beide Reihenentwicklungen in der Mitte des Feldes zusammentreffen.

Schließlich werden so also alle Koeffizienten aus c_{1A} und c_{1K} und aus den Konstanten λ und κ zusammengesetzt. Nun ergeben sich aber aus den genannten Anfangsbedingungen für c_{1A} und c_{1K} die Werte (l. c. p. 863):

$$c_{1A} = \frac{2\lambda}{1+\kappa}, \quad c_{1K} = \frac{2\lambda}{1-\kappa}.$$

Wir sehen hieraus, daß in sämtlichen Koeffizienten der Reihenentwickelungen, die man für z aufstellen kann, als einzige Parameter die beiden Konstanten λ und κ vorkommen. Wir können das ausdrücken, indem wir schreiben:

$$z = \varphi(\xi; \lambda, \kappa),$$

wo wir also unter φ eine Funktion verstehen, deren Koeffizienten reine unbenannte Zahlen sind.

Es handelt sich jetzt weiter darum, die gesamte Spannung ψ zwischen den Elektroden zu finden. Es ist:

$$\psi = \int_0^{2A} E \cdot dx = a \cdot A \cdot \frac{J}{J_M} \cdot \int_0^{\frac{2 \cdot J_M}{J}} \sqrt{z} \cdot d\xi.$$

Setzt man nun:

$$\frac{J}{\psi} = A,$$

wo also A nach unserer Definition das „Leitvermögen“ bei der Stromdichte J bedeutet, so ist:

$$2 \cdot \frac{A_0}{A} = \frac{J}{J_M} \cdot \int_0^{\frac{2 \cdot J_M}{J}} \sqrt{z} \cdot d\xi.$$

Aus dem, was wir soeben von z bewiesen haben, folgt:

$$\frac{A}{A_0} = F\left(\frac{J}{J_M}; \lambda, \kappa\right),$$

wo F eine Funktion bedeutet, deren Koeffizienten lauter reine unbenannte Zahlen sind.

Ich will nun die Stromstärke-Leitfähigkeitskurve, die wir bekommen, wenn wir die Leitfähigkeit als Bruchteil der maxi-

malen Leitfähigkeit A_0 angeben (also A/A_0), und die Stromstärke als Bruchteil des Sättigungsstromes J_M (also J/J_M), die *reduzierte Stromstärke-Leitfähigkeitskurve* nennen.

Wir können dann unser eben gewonnenes Resultat folgendermaßen formulieren:

Die Koeffizienten der Gleichung der reduzierten Stromstärke-Leitfähigkeitskurve hängen allein von den beiden Parametern λ, κ ab.

Die Form der Kurve ist also unter anderem unabhängig von dem Elektrodenabstand.

Ferner können wir noch sagen, daß κ nur in geraden Potenzen (κ^2, κ^4 usw.) vorkommen kann, da es sein Vorzeichen wechselt, wenn man Anode und Kathode vertauscht, während die Stromkurve durch diese Vertauschung nicht geändert werden kann.

3. Wir wollen nunmehr die Beschränkung, von der wir in 1. gesprochen haben, einführen, indem wir setzen $\lambda = 1$. Dann lautet die Differentialgleichung für z (l. c. p. 862):

$$\frac{1-\kappa^2}{2} \cdot \left(z \cdot \frac{d^2 z}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{d\xi} \right)^2 \right) + \kappa \cdot \frac{dz}{d\xi} - z + 1 = 0.$$

Diese Gleichung wird etwas einfacher, wenn wir gleich anstatt z die Größe \sqrt{z} einführen, die später doch zur Berechnung von ψ gebraucht wird. Wir setzen also:

$$\sqrt{z} = \zeta$$

und bekommen nun folgende Gleichung:

$$(1) \quad (1 - \kappa^2) \cdot \zeta^2 \cdot \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + 2\kappa \cdot \frac{d\zeta}{d\xi} - \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} = 0.$$

Wir wollen nun weiter den Anfangswert von ζ an einer Elektrode mit ζ_0 bezeichnen. Wenn deutlich unterschieden werden soll, ob der an der Anode oder der an der Kathode gemeint ist, so werden wir schreiben ζ_{0A} oder ζ_{0K} . Die Anfangsbedingungen (an der Anode $v_A = 0$, an der Kathode $v_A = 0$) ergeben dann (vgl. l. c. p. 863):

$$(2) \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)_{\xi=0} = - \frac{1}{1+\kappa} \cdot \frac{1}{\zeta_{0A}},$$

$$(3) \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)_{\xi=\frac{2J_M}{J}} = + \frac{1}{1-\kappa} \cdot \frac{1}{\zeta_{0K}}.$$

Es kommt jetzt alles darauf an, die Werte ζ_{0A} und ζ_{0K} zu berechnen.

Wir führen die Rechnung nur aus für die beiden Fälle:
1. J/J_M klein, 2. $1 - J/J_M$ klein.

4. Im ersten Fall ist der Verlauf der Funktion ζ der, daß sie in der Nähe der Elektrode von dem Wert ζ_0 mit zunehmender Entfernung (ξ) ziemlich rasch auf einen von 1 sehr wenig verschiedenen Wert heruntergeht; im Mittelfeld bleibt sie über eine längere Strecke konstant ganz nahe bei 1, um dann in der Nähe der anderen Elektrode wieder rasch zu steigen. Wir können deswegen ζ in der Nähe der Elektrode, von der wir ausgehen (der Anode), ziemlich gut durch folgende Funktion wiedergeben (l. c. p. 874):

$$(4) \quad \zeta = 1 + (\zeta_0 - 1) \cdot e^{-\alpha_1 \xi - \alpha_2 \xi^2}.$$

Wir können die Reihe, die den Exponenten von e bildet, ganz gut mit dem Gliede ξ^2 abbrechen, da die weiter unten unter dieser Voraussetzung für α_1 und α_2 ermittelten Werte ergeben, daß an einer Stelle, wo ζ schon nahezu 1 ist, noch immer $\alpha_2 \xi^2$ kleiner als $\alpha_1 \xi$ ist. Wollte man (was für genauere Rechnungen natürlich nötig wäre) noch Glieder $\alpha_3 \xi^3$ usw. hinzufügen, so würde dadurch die Rechnung gleich bedeutend komplizierter werden.

Da wir für die Entwicklung von ζ in der Nähe der anderen Elektrode einen Ausdruck brauchen werden, der ebenso wie (4) aussieht, so ist die Bedingung, daß beide Entwicklungen im Mittelfeld (für große ξ) zusammentreffen, schon von vornherein erfüllt.

Es ist nun nicht schwer, die beiden Koeffizienten α_1 und α_2 durch ζ_0 und κ auszudrücken. Wir haben:

$$(5) \quad \begin{cases} (\zeta - 1) = (\zeta_0 - 1) \cdot e^{-\alpha_1 \xi - \alpha_2 \xi^2}, \\ \frac{d\zeta}{d\xi} = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 \cdot \xi) \cdot (\zeta - 1), \\ \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 \cdot \xi) \cdot \frac{d\zeta}{d\xi} - 2\alpha_2 (\zeta - 1), \end{cases}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen ein: $\xi = 0$, $\zeta = \zeta_0$, $d\zeta/d\xi = -1/(1 + \kappa) \cdot \zeta_0$, eliminieren wir außerdem aus der

letzten den zweiten Differentialquotienten mit Hilfe der Gleichung (1), so bekommen wir:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{(1+x) \cdot \zeta_0 (\zeta_0 - 1)}, \\ \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} - \frac{1+x}{1-x} \cdot \zeta_0 (\zeta_0 - 1) \right). \end{cases}$$

Wir wollen ferner für eine im folgenden besonders wichtige Größe noch ein eigenes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(7) \quad \delta = \frac{2 \cdot \alpha_2}{\alpha_1^2} = 1 + \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} - \frac{1+x}{1-x} \cdot \zeta_0 (\zeta_0 - 1).$$

Die Voraussetzung, unter der die folgenden Rechnungen gültig sind, ist also, daß sie einen kleinen Wert für δ ergeben.

Wir müssen jetzt die einzige Größe, die in den Ausdrücken für α_1 und α_2 noch unbestimmt geblieben ist, nämlich ζ_0 , in der Weise zu berechnen suchen, daß der in (5) angegebene Ausdruck für ζ nicht nur im Punkte $\xi = 0$, sondern in dem ganzen Gebiet an der Elektrode die Differentialgleichung (1) möglichst gut befriedigt. Bequemer als ζ selbst ist für diese Untersuchung der erste Differentialquotient, den wir in seiner Abhängigkeit von dem Wert der Größe ζ untersuchen können. Wir können dann nämlich das Ende des betrachteten Gebietes genauer präzisieren als die Gegend, wo $\zeta = 1$ wird, während wir den zugehörigen Wert ξ unbestimmt lassen können. Wir wollen also setzen:

$$(8) \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = v(\zeta).$$

Es ist dann:

$$(9) \quad \frac{dv}{d\zeta} \cdot v = \frac{dv}{d\xi} = \frac{d^2\zeta}{d\xi^2}$$

und die Differentialgleichung für v lautet:

$$(10) \quad (1 - x^2) \cdot v \cdot \frac{dv}{d\zeta} + 2x \cdot \frac{v}{\zeta^2} - \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^3} = 0.$$

Der Ausdruck für v , der diese Gleichung befriedigen soll, ist aus (5) zu entnehmen.

Aus der ersten der Gleichungen (5) ergibt sich nämlich:

$$\alpha_1 \cdot \xi + \alpha_2 \cdot \xi^2 = \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1}.$$

Quadriert man die zweite, so erhält man:

$$v^2 = (\alpha_1^2 + 4\alpha_2 \cdot (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2)) \cdot (\zeta - 1)^2,$$

also indem man ξ eliminiert:

$$(11) \quad v^2 = \left(\alpha_1^2 + 4\alpha_2 \cdot \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1} \right) \cdot (\zeta - 1)^2$$

oder auch:

$$(11a) \quad v^2 = \alpha_1^2 \cdot \left(1 + 2\delta \cdot \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1} \right) \cdot (\zeta - 1)^2.$$

Die so definierte Funktion v soll nun also die Gleichung (10) möglichst genau befriedigen. Das nächstliegende wäre, in die Gleichung (10) diesen Wert v einzusetzen, darauf die rechte Seite in eine Potenzreihe nach $\zeta_0 - \zeta$ zu entwickeln und die Koeffizienten der ersten Glieder Null zu setzen. Der erste verschwindet schon von selber infolge der in (6) getroffenen Bestimmung für α_2 , der zweite gibt eine Gleichung, aus der man ζ_0 berechnen kann; für die folgenden Glieder ist keine Übereinstimmung mehr zu erreichen.

Ich zog aber eine andere Methode vor. In die Gleichung (10) werde zunächst in das zweite Glied der linken Seite die durch Formel (11) definierte Größe v (und zwar mit negativem Vorzeichen), die wir hier v_1 nennen wollen, eingesetzt und darauf integriert. Man bekommt:

$$(12) \quad v^2 = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \left(2 \ln \zeta - \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2} - 4\pi \cdot \int_1^{\zeta} \frac{v_1}{\zeta^2} \cdot d\zeta \right).$$

Das aus (12) berechnete v sollte mit dem aus (11) berechneten v_1 , wenn dieses das Integral von (10) darstellte, identisch sein. In der Tat stimmen beide in dem Punkt $\zeta = 1$ überein, wo beide $v = 0$ liefern. Im übrigen Verlauf aber können sie nicht völlig zusammenfallen. Die beste Annäherung erreicht man für den allein in Betracht kommenden Bereich von $\zeta = 1$ bis $\zeta = \zeta_0$ jedenfalls dann, wenn man sie auch in dem zweiten Endpunkt ($\zeta = \zeta_0$) einander gleich macht. Wir setzen demnach:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{\zeta_0^2} &= 2 \ln \zeta_0 - \frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2} - 4x \cdot \int_1^{\zeta_0} \frac{v_1}{\zeta^2} \cdot d\zeta \\ v_1 &= -\alpha_1 \cdot \sqrt{1 + 2\delta \cdot \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1}} \cdot (\zeta - 1). \end{aligned} \right.$$

Setzt man hier für α_1 und δ die Werte aus (6) und (7) ein, so ist (13) die transzendente Gleichung für ζ_0 , die wir zu lösen haben. Dazu müssen wir zuerst noch das in ihr vorkommende bestimmte Integral auswerten. Da δ , wie wir voraussetzen, nur klein ist, und $\ln(\zeta_0 - 1)/(\zeta - 1)$ nur für solche Werte von ζ , die von 1 wenig abweichen, groß wird, andererseits aber für diese Werte gerade v_1 selber klein wird, also wenig für die Berechnung des Integrals in Betracht kommt, so können wir ohne Bedenken folgende Näherungsformel verwenden:

$$v_1 = -\alpha_1 \cdot \left(1 + \delta \cdot \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1}\right) \cdot (\zeta - 1).$$

Wir führen für einen Moment folgende Abkürzung ein:

$$\varphi(\zeta_0) = \int_1^{\zeta_0} \ln \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta - 1} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta^2} \cdot d\zeta.$$

Dann lautet die transzendente Gleichung für ζ_0 :

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1}{\zeta_0^2} = 2 \cdot \ln \zeta_0 - \frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2} + 4x \cdot \alpha_1 \cdot \left(\ln \zeta_0 - \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} + \delta \cdot \varphi(\zeta_0) \right).$$

Wir wollen nun noch einen einfachen Ausdruck für $\varphi(\zeta_0)$ suchen. Setzen wir:

$$\frac{\zeta - 1}{\zeta_0 - 1} = 1 - t,$$

so wird:

$$\varphi(\zeta_0) = -\frac{(\zeta_0 - 1)^2}{\zeta_0^2} \cdot \int_0^1 \frac{(1-t) \cdot \ln(1-t)}{\left(1 - \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} \cdot t\right)^2} \cdot dt.$$

Dieses bestimmte Integral ist in der Theorie der hypergeometrischen Funktionen bekannt und liefert:

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{\zeta_0^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{\zeta_0^2} + \dots \right)$$

Rechnet man die in dieser Reihe vorkommenden Zahlenfaktoren aus, so erhält man:

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{4 \cdot \zeta_0^2} \cdot \left(1 + \frac{10}{9} \cdot \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} + \frac{13}{12} \cdot \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{\zeta_0^2} \right. \\ \left. + 1,027 \cdot \frac{(\zeta_0 - 1)^3}{\zeta_0^3} + 0,967 \cdot \frac{(\zeta_0 - 1)^4}{\zeta_0^4} + \dots \right)$$

Da alle Koeffizienten der hier stehenden Reihe nur wenig von 1 verschieden sind und andererseits die Variable $(\zeta_0 - 1)/\zeta_0$ stets ein echter Bruch ist, so ist ihr Wert, bis auf wenige Prozent genau, einfach zu berechnen als:

$$\frac{1}{1 - \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0}} = \zeta_0.$$

Es hat sich somit ergeben:

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{4 \zeta_0}.$$

Wir setzen dies in die Gleichung für ζ_0 ein, ferner die Werte von α_1 und δ aus (6) und (7) und erhalten nach einigen kleinen Umformungen:

$$(14) \quad \zeta_0 \cdot (2 \cdot \ln \zeta_0 - 1) = \frac{\frac{1+\kappa}{1-\kappa} \cdot \frac{\zeta_0 \cdot (\zeta_0 - 1)^2}{2} - \left(1 + \frac{(\zeta_0 - 1)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0} \right) \right)}{\frac{1+\kappa}{2\kappa} \cdot \zeta_0 \cdot (\zeta_0 - 1) + 1}.$$

Diese Gleichung habe ich graphisch für mehrere Werte von κ gelöst, indem ich den Schnittpunkt der Kurve, die die linke Seite als Funktion von ζ_0 darstellt, mit der entsprechenden für die rechte Seite ermittelte. Die gefundenen Werte sind in der folgenden Tabelle verzeichnet:

Tabelle I.

$\lambda = 1$						
$\kappa = -0,75$	- 0,50	- 0,25	0	+ 0,25	+ 0,50	+ 0,75
$\zeta_0 = 3,44$	2,515	1,975	1,65	1,427	1,260	1,127
$\delta = 0,510$	0,333	0,340	0,324	0,280	0,223	0,141

Besonders groß ist der Wert von δ für $\kappa = -0,75$, und da die Richtigkeit der Rechnung wesentlich davon abhängt, ob δ klein ist, so stellte ich mir den Verlauf der Funktion $v = v_1$ nach Formel (11), die aus der auch der folgenden Berechnung zugrunde liegenden Formel (4) notwendig folgt, mit

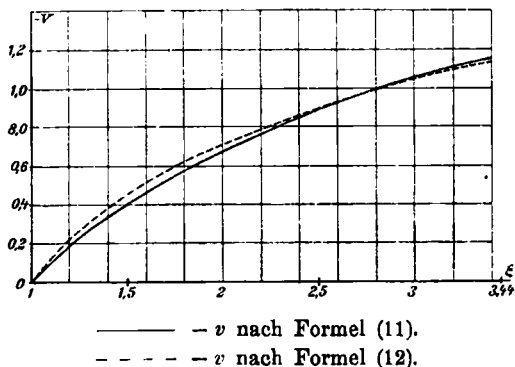


Fig. 1.

dem nach (12) berechneten v in Form von Kurven zusammen (Fig. 1). Die richtige Kurve wird wahrscheinlich zuerst zwischen den beiden Kurven, also etwas höher, als die v_1 -Kurve gehen, in der zweiten Hälfte dagegen etwas tiefer, und ziemlich an derselben Stelle endigen. Es weicht also auch $(\zeta - 1)$ als Funktion von ξ berechnet nach der Näherungsformel (4) nur um wenige Prozent von dem genauen Wert ab. Für die anderen in der Tabelle angeführten κ liegen die Verhältnisse noch günstiger.

5. Es ist nun nicht schwer, den Verlauf der Stromstärke-Leitfähigkeitskurve für kleine Stromstärken zu finden. In meiner früheren Arbeit¹⁾ habe ich unter der Voraussetzung der Gültigkeit von Formel (4) die Gesamtspannung ψ des Feldes berechnet zu:

$$\psi = R \cdot J \cdot \left(1 + \frac{C_A + C_K}{2} \cdot \frac{J}{J_M} \right).$$

Die Gleichung der reduzierten Strom-Leitfähigkeitskurve lautet demnach für sehr schwache Ströme:

1) l. c. p. 874—877.

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 + C \cdot \frac{J}{J_M}} \\ C = \frac{C_A + C_K}{2}, \end{array} \right.$$

wo die Werte C_A und C_K nach der Formel (42) auf p. 876 meiner zitierten Arbeit zu berechnen sind.

Führen wir die folgende Abkürzung ein:

$$(16) \quad \eta^2 = \frac{\alpha^2}{4 \cdot \alpha_0} = \frac{1}{2 \cdot \delta},$$

so ist:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_A = (1 + \kappa) \cdot \zeta_0 \cdot (\zeta_0 - 1)^2 \cdot 2 \eta \cdot e^{\eta^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{\eta} - \psi(\eta) \right) \\ \psi(\eta) = \int_0^\eta e^{-\eta^2} \cdot d\eta. \end{array} \right.$$

C_K bekommen wir ganz ebenso, wenn wir für κ den Wert

$$\frac{u_K - u_A}{u_K + u_A} = - \frac{u_A - u_K}{u_A + u_K}$$

also denselben wie für C_A , nur mit umgekehrtem Vorzeichen, und die ihm entsprechenden ζ_0 und η in Formel (17) einsetzen.

Nehmen wir für ζ_0 und δ die Werte aus Tab. I, so finden wir:

Tabelle II.

$\kappa = -0,75$	$-0,50$	$-0,25$	0	$+0,25$	$+0,50$	$+0,75$
$\eta = 0,990$	$1,226$	$1,213$	$1,244$	$1,387$	$1,499$	$1,884$
$C_A = 3,820$	$2,338$	$1,135$	$0,567$	$0,270$	$0,109$	$0,028$

Und somit für den Faktor C in (15):

Tabelle III.

$\kappa = 0$	$\pm 0,25$	$\pm 0,50$	$\pm 0,75$
$C = 0,567$	$0,702$	$1,224$	$1,924$

Nach der Thomsonschen Formel ist:

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{1 - \frac{J}{J_M}}.$$

Bringen wir sie für kleines J/J_M auf dieselbe Form wie (15), so haben wir zu setzen: $C = 0,5$; sie ergibt also unter allen Umständen ein zu kleines C .

Die Tab. III wird durch die eine Kurve der Fig. 2 graphisch wiedergegeben.

6. Der zweite Fall: $1 - J/J_M$ klein, ist in meiner früheren Arbeit schon allgemein für beliebige Werte von κ erledigt. Formel (63) auf p. 885 ergibt für $\lambda = 1$:

$$\frac{A}{A_0} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (1 - \kappa^2)} \cdot \sqrt{\frac{J}{J_M} \cdot \left(1 - \frac{J}{J_M}\right)} : \left(1 - 0,3 \cdot \left(1 - \frac{J}{J_M}\right)\right),$$

oder wenn man nach Potenzen von $1 - J/J_M$ entwickelt und mit der ersten Potenz abbricht:

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{A}{A_0} = B \cdot \sqrt{1 - \frac{J}{J_M}} \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \left(1 - \frac{J}{J_M}\right)\right), \\ B = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot (1 - \kappa^2)}. \end{cases}$$

Tabelle IV.

$\kappa = 0$	$\pm 0,25$	$\pm 0,5$	$\pm 0,75$
$B = 1,225$	1,185	1,060	0,810

Die Thomsonsche Formel hat einfach $B = 1$.

Die Tab. IV wird durch die zweite Kurve der Fig. 2 graphisch wiedergegeben.

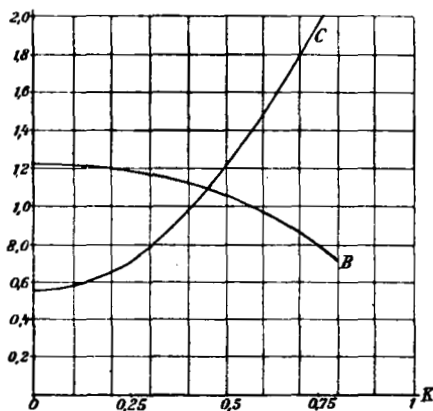


Fig. 2. Die Konstanten C und B .

7. Nach den Formeln (15) und (18) kann man mit Hilfe der berechneten Konstanten C und B die reduzierten Strom-Leitfähigkeitskurven für $\lambda = 1$ und für beliebige κ zeichnen. C gibt die Neigung der Kurve im Punkte $J/J_M = 0$, $A/A_0 = 1$ an, wo ihre Form eine kleine Strecke wenig von einer Geraden abweicht. Im Punkte $J/J_M = 1$, $A/A_0 = 0$ trifft sie die Abszissenachse senkrecht und ist ähnlich wie eine Parabel gekrümmt, wie (18) ergibt. Verbindet man die so gefundenen

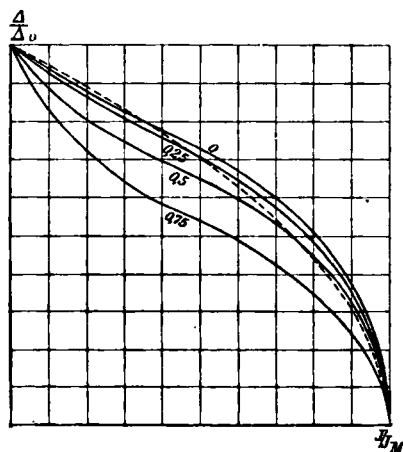


Fig. 8. Reduzierte Strom-Leitfähigkeitskurven für $\kappa = 0; 0,25; 0,5; 0,75$. $\lambda = 1$.

--- Thomsonsche Parabel.

beiden Endstücke der Kurve durch einen möglichst glatten Linienzug, so muß er den ungefähren Verlauf der gesuchten Kurve darstellen.

Auf diese Weise sind die Kurven der Fig. 3 gewonnen für $\kappa = 0; 0,25; 0,5; 0,75$. Man sieht, wie sie alle in charakteristischer Weise von der schraffiert eingetragenen „Thomsonschen Parabel“ abweichen.

Zum Schluß seien noch zwei Messungsreihen aus der im Eingang erwähnten Untersuchung des Hrn. J. Schröder hier gebracht. Die erste Reihe ist gewonnen, als der Äthyläther noch die größte beobachtete Leitfähigkeit hatte, also ganz im Anfang, die zweite dagegen stellt die, wie es scheint, stationäre Endkurve des elektrisch vollkommen gereinigten Äthyläthers dar.

Tabelle V.

Spannung V	Messungsreihe I		Messungsreihe II	
	$J \cdot 10^{10}$	$A \cdot 10^{13}$	$J \cdot 10^{10}$	$A \cdot 10^{13}$
0	0	(33,5)	0	(14,0)
200	18,8	23,2	6,1	9,15
400	32,3	24,2	8,5	6,37
600	41,2	20,6	10,6	5,30
800	46,9	17,6	11,7	4,39
1000	52,1	15,6	12,5	3,75
1440	58,4	12,2	13,4	2,79
∞	(65,8)	0	(14,1)	0

Hier ist die Spannung V in Volt, die Stromdichte J in 10^{-10} . Amp. pro qcm angegeben. Ferner ist zu bemerken, daß der Abstand der Elektroden 3 mm betrug, und daß gerechnet wurde:

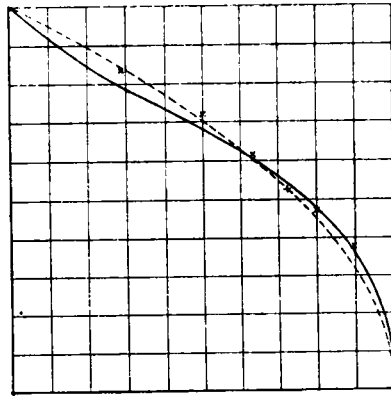
$$A = \frac{J}{V} \cdot 0,3.$$

Es stellt dann nämlich A_0 das Leitvermögen eines Würfels Äthyläthers von 1 cm Kantenlänge in der Einheit 1/Ohm bei unendlich kleiner Stromstärke dar. Die Grenzwerte A_0 und J_M der Tabelle sind geschätzt und deswegen in Klammern gestellt. Unter Annahme dieser von mir gewählten Grenzwerte bekommt man die in der folgenden Tabelle aufgeführten reduzierten Werte.

Tabelle VI.

Spannung V	Messungsreihe I		Messungsreihe II	
	J/J_M	A/A_0	J/J_M	A/A_0
0	0	1	0	1
200	0,29	0,84	0,44	0,65
400	0,50	0,72	0,60	0,46
600	0,63	0,62	0,75	0,38
800	0,72	0,53	0,83	0,31
1000	0,80	0,47	0,89	0,28
1440	0,90	0,36	0,95	0,20
∞	1	0	1	0

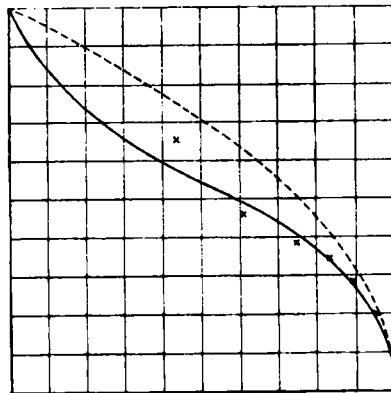
Diese Werte sind durch die kleinen Kreuzchen in Figg. 4 und 5 dargestellt. Man sieht, daß sie systematische Ab-



— $\alpha = 0,35$.

- - - - Thomson'sche Parabel.

Fig. 4.



— $\alpha = 0,70$.

- - - - Thomson'sche Parabel.

Fig. 5.

weichungen von der Thomsonschen Parabel ergeben und, für die höheren Spannungen wenigstens, sich recht gut Kurven von der Form der von mir berechneten anpassen. Für kleine

Spannungen allerdings liegen die beobachteten Werte stets zu hoch, aber das erklärt sich durch den in der Einleitung von mir erwähnten Fehler der Messungen. Eine andere Frage ist, ob gerade die von mir angenommenen Werte κ (0,35 und 0,70) die Messungen am besten wiedergeben. Das hängt sehr von der Wahl der Grenzwerte A_0 und J_M ab, und um die Größe κ aus den beobachteten Kurven wirklich zu gewinnen, müßten, vor allem im Gebiet der kleinen Spannungen, mehr und genauere Punkte bestimmt werden.

Greifswald, Physik. Institut.

(Eingegangen 3. Juni 1908).
