Φροντιστήριο για Αρχάριους

Πώς διαβάζουμε το paper
Drakos (2026) για
LLM Bargaining & Hotel Pricing

Οδηγός βήμα-προς-βήμα στα μαθηματικά
(συνοδευτικό του Drakos (2026), AGEL AI, Μάιος 2026)

Σε ποιον απευθύνεται: σε κάποιον που ξέρει βασική άλγεβρα γυμνασίου-λυκείου, δεν έχει σπουδάσει μαθηματικά, αλλά θέλει να καταλάβει τι λέει το paper, χωρίς να τον ξεγελάσουν τα σύμβολα.
Τι θα μάθεις: τι σημαίνουν όλα τα κρυπτικά σύμβολα ($\mathbb{E}$, α, $U[0,1]$, $\mathbb{P}$, $\sim$, $\int$), τι λέει το θεώρημα Myerson–Satterthwaite με απλά λόγια, γιατί $9/64 \approx 0.844$ είναι ο «καλύτερος δυνατός» αριθμός, τι κάνουν τα LLM σε παζάρι, και πώς όλο αυτό κατεβαίνει σε ξενοδοχείο της Ρόδου.
Πώς να το διαβάσεις: γραμμικά, με μολύβι. Σε κάθε κουτί «Παράδειγμα» κάνε τον υπολογισμό μόνος σου πριν διαβάσεις τη λύση.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή: ποιο είναι το πρόβλημα;

Φαντάσου ένα ξενοδοχείο στη Ρόδο και έναν εκπρόσωπο εταιρείας που θέλει να κλείσει 20 δωμάτια για ένα συνέδριο. Και οι δύο ξέρουν τι θέλουν, αλλά *δεν λένε την αλήθεια στον άλλο*:

- Το ξενοδοχείο έχει στο μυαλό του ένα ελάχιστο τίμημα, ας πούμε **120 ευρώ/δωμάτιο**, κάτω από το οποίο χάνει χρήματα.
- Ο αγοραστής έχει ένα μέγιστο που μπορεί να πληρώσει, π.χ. **160 ευρώ/δωμάτιο**.

Συμφωνία υπάρχει. Οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στα 120 και 160 ευρώ είναι καλύτερη από το «δεν κλείνουμε» και για τους δύο. Το ξενοδοχείο όμως δεν θα πει «120 είναι το ελάχιστό μου» γιατί τότε ο άλλος θα προσφέρει 121. Ο αγοραστής δεν θα πει «160 είναι το μέγιστό μου» γιατί τότε το ξενοδοχείο θα ζητήσει 159. **Μπλοφάρουν και οι δύο, και κάποιες φορές χάνουν τη συμφωνία** ενώ θα ωφελούνταν και οι δύο.

Το κλειδί: το βασικό ερώτημα του paper

Το 1983, οι Myerson και Satterthwaite απέδειξαν με μαθηματικά ότι αυτή η απώλεια είναι **αναπόφευκτη** όταν και οι δύο πλευρές παίζουν στρατηγικά. Πρόσφατα όμως, όταν αντί για ανθρώπους βάζουμε δύο **LLM** (ChatGPT, Claude, Gemini κ.λπ.) να παζαρέψουν, βλέπουμε αποτελέσματα *πάνω από το θεωρητικό όριο*. Πώς γίνεται; Αυτό προσπαθεί να εξηγήσει το paper.

1.1 Τι θα μάθουμε σε αυτό το φροντιστήριο

1. Τη γλώσσα: τι σημαίνουν τα σύμβολα.
2. Την έννοια της αναμενόμενης τιμής (expectation), που είναι το πιο βασικό εργαλείο.
3. Το θεώρημα της αδυναμίας: γιατί $9/64$ είναι το όριο.
4. Πώς το paper «λύνει» θεωρητικά τη συμπεριφορά των LLM με μία παράμετρο α.
5. Τι βρήκαν στην πραγματικότητα όταν δοκίμασαν 10 μοντέλα.
6. Πώς όλο αυτό εφαρμόζεται σε ξενοδοχείο.

2. Η γλώσσα των μαθηματικών: λεξικό

Πριν δούμε τύπους, ας αποκωδικοποιήσουμε τα σύμβολα. Δεν είναι μαγικά, είναι συντομογραφίες.

2.1 Ελληνικά γράμματα

Σχεδόν όλα τα ελληνικά γράμματα χρησιμοποιούνται ως ονόματα αριθμών:

Σύμβολο	Όνομα	Στο paper παριστάνει
α	άλφα	Πιθανότητα να πει το LLM την αλήθεια (η «κεντρική» παράμετρος)
β	βήτα	Συστατικά μιας μίξης (binary, continuous, noisy)
δ	δέλτα	Μικρή απόσταση
ϵ	έψιλον	Ανοχή / σφάλμα (πολύ μικρός αριθμός)
λ	λάμδα	Ρυθμός εμφάνισης πελατών (αριθμός/ημέρα)
μ, σ	μι, σίγμα	Μέση τιμή, τυπική απόκλιση

Προσοχή: δεν είναι αλγόριθμοι, είναι μεταβλητές

Ένα ελληνικό γράμμα στα μαθηματικά είναι ακριβώς ότι το x ή το y στο σχολείο — απλά ένα όνομα για κάτι. Αν δεις $\alpha = 0.7$, σημαίνει «ο αριθμός που τον λέμε άλφα είναι ίσος με 0.7».

2.2 Τα «μεγάλα» σύμβολα

Σύμβολο	Τι σημαίνει στα ελληνικά
$\mathbb{E}[X]$	«Η αναμενόμενη τιμή του X» — δηλαδή ο μέσος όρος του X αν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές.
$\mathbb{P}(A)$	«Η πιθανότητα του γεγονότος A» — αριθμός μεταξύ 0 (αδύνατο) και 1 (βέβαιο).
$X \sim F$	«Το X ακολουθεί την κατανομή F» — δηλαδή κληρώνεται από κάποιον τυχαίο γεννήτορα.
$U[0,1]$	«Ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$» — κάθε αριθμός ανάμεσα στο 0 και 1 είναι το ίδιο πιθανός.
$\mathbf{1}\{A\}$	«Δείκτης» — ισούται με 1 αν συμβαίνει το A, αλλιώς 0.
$\int_a^b f(x)\,dx$	«Ολοκλήρωμα» — το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της f από a μέχρι b.

3. Η αναμενόμενη τιμή (expected value): το πιο σημαντικό εργαλείο

Όλο το paper χρησιμοποιεί συνέχεια αναμενόμενες τιμές. Αν την καταλάβεις αυτή, καταλαβαίνεις το 70% του paper.

3.1 Με ένα ζάρι

Ρίχνεις ένα κανονικό ζάρι. Τι περιμένεις να βγει «κατά μέσο όρο»;

Παράδειγμα: αναμενόμενη τιμή ενός ζαριού

Κάθε αποτέλεσμα (1, 2, 3, 4, 5, 6) έχει πιθανότητα 1/6. Η αναμενόμενη τιμή είναι:

$$\mathbb{E}[X] = 1\cdot\tfrac{1}{6} + 2\cdot\tfrac{1}{6} + 3\cdot\tfrac{1}{6} + 4\cdot\tfrac{1}{6} + 5\cdot\tfrac{1}{6} + 6\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{21}{6} = 3.5$$

Αν ρίξεις 1000 φορές το ζάρι και πάρεις τον μέσο όρο, θα είναι κοντά στο 3.5. Δεν θα βγει ποτέ *ακριβώς* 3.5 σε μία ζαριά, αλλά αυτή είναι η τιμή που «αναμένεις».

Ο γενικός κανόνας: αναμενόμενη τιμή = (πιθανότητα κάθε αποτελέσματος) × (το αποτέλεσμα), και τα αθροίζεις όλα.

3.2 Από ζάρι σε «οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στο 0 και 1»

Στο paper οι αξίες δεν είναι 1,2,...,6. Είναι *οποιοσδήποτε αριθμός* ανάμεσα στο 0 και 1. Αυτό λέγεται **ομοιόμορφη κατανομή**, $U[0,1]$.

Έννοια: ομοιόμορφη κατανομή $U[0,1]$

Φαντάσου ότι ρίχνεις βελάκι σε μια γραμμή μήκους 1, και κάθε σημείο είναι το ίδιο πιθανό. Το $U[0,1]$ είναι ακριβώς αυτό.

- Πιθανότητα να πέσει σε $[0.2, 0.5]$: $0.5 - 0.2 = 0.3$ (το 30% της γραμμής)
- Πιθανότητα να πέσει ακριβώς στο 0.5: *μηδέν* (ένα σημείο έχει μήκος 0)
- Μέση τιμή: 0.5 (το μέσο της γραμμής)

Όταν κάποια κατανομή είναι «συνεχής» (όχι ζάρι, αλλά γραμμή), η αναμενόμενη τιμή υπολογίζεται με **ολοκλήρωμα** αντί για άθροισμα. Αλλά εννοιολογικά είναι το ίδιο πράγμα.

3.3 Τα ολοκληρώματα: μην τα φοβάσαι

Έννοια: $\int_a^b f(x)\,dx$ με μια εικόνα

Σχεδίασε στο χαρτί την καμπύλη $y = f(x)$. Το ολοκλήρωμα από το a μέχρι το b είναι το **εμβαδόν** κάτω από την καμπύλη και πάνω από τον άξονα x, ανάμεσα στις κατακόρυφες γραμμές $x = a$ και $x = b$.
Αν $f(x) = 1$ (μια οριζόντια γραμμή στο 1), τότε από $x = 0$ μέχρι $x = 1$ έχεις ένα τετράγωνο πλευράς 1, άρα εμβαδόν 1. Άρα $\int_0^1 1\,dx = 1$. Δεν χρειάζεται κανόνας, μόνο εικόνα.

Παράδειγμα: ένα μικρό ολοκλήρωμα στο χέρι

Πόσο κάνει $\int_0^1 x\,dx$;
Λύση με εικόνα: σχεδίασε τη γραμμή $y = x$ από 0 έως 1. Είναι μια διαγώνια γραμμή που σχηματίζει τρίγωνο με τους δύο άξονες. Βάση = 1, ύψος = 1, εμβαδόν = $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.
Άρα $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.
Τι σημαίνει: αν έχεις τυχαίο αριθμό $X \sim U[0, 1]$, η αναμενόμενη τιμή του είναι 0.5 (το μέσο της γραμμής).

Παράδειγμα: ένα ελαφρώς πιο δύσκολο

Πόσο κάνει $\int_0^1 x^2\,dx$;
Αυτό δεν είναι τρίγωνο πλέον, είναι μια καμπύλη. Δεν χρειάζεται όμως να το λύσεις στο χέρι: ο γενικός κανόνας είναι:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Άρα $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3 - 0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Δεν θα σου ζητήσουμε ποτέ να λύσεις ολοκλήρωμα στο χέρι. Αλλά πρέπει να ξέρεις *τι σημαίνει*: άθροισμα πολλών μικρών κομματιών = εμβαδόν.

4. Το πρόβλημα του παζαριού: σχέδιο της ιδέας

Τώρα που ξέρουμε αρκετά, ας δούμε τι λέει το paper. Η σκηνή έχει δύο πρωταγωνιστές:

- **Αγοραστής**: έχει στο μυαλό του μια αξία v (από το αγγλικό *value*). Είναι το μέγιστο που δέχεται να πληρώσει.
- **Πωλητής**: έχει ένα κόστος c (από το *cost*). Είναι το ελάχιστο που δέχεται να πάρει.

Στο paper, και τα δύο τραβιούνται ομοιόμορφα από το $[0,1]$. Δηλαδή κανονικοποιούμε τα ποσά: αντί για ευρώ, λέμε «κάθε αξία είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και το 1, και όλες είναι το ίδιο πιθανές».

4.1 Πότε υπάρχει «κέρδος από τη συναλλαγή»;

Αν $v > c$, τότε η συναλλαγή *έχει νόημα*: ο αγοραστής αξιολογεί το αντικείμενο πιο πολύ από όσο κοστίζει στον πωλητή. Το **κέρδος** (ή πλεόνασμα, surplus) είναι:

$$v - c \quad (\text{αν } v > c)$$

Αν $v < c$, η συναλλαγή είναι κακή ιδέα και για τους δύο. Αυτό ακριβώς λέει η εξίσωση (1) του paper:

$$S(v,c) = (v-c) \cdot \mathbf{1}\{v \geq c\}$$

Η $\mathbf{1}\{v \geq c\}$ είναι η περίφημη «δείκτρια» — ίσον 1 αν $v \geq c$, αλλιώς 0.

4.2 Το «πρώτο-καλύτερο»: τι θα γινόταν ιδανικά

Αν ένας θεός ήξερε όλα τα v και c στο σύμπαν, θα έλεγε: «κάντε τη συναλλαγή κάθε φορά που $v > c$». Πόσο κέρδος θα έβγαζε αυτό κατά μέσο όρο;

Παράδειγμα: το πρώτο-καλύτερο εμβαδόν

Φαντάσου ένα τετράγωνο 1×1 όπου ο οριζόντιος άξονας είναι το c (κόστος πωλητή) και ο κάθετος το v (αξία αγοραστή). Κάθε σημείο μέσα στο τετράγωνο είναι ένα ζευγάρι «αυτή τη φορά κληρώθηκε αυτή η αξία και αυτό το κόστος».
Η συναλλαγή έχει νόημα μόνο όταν $v \geq c$, δηλαδή πάνω από τη διαγώνιο.
Η αναμενόμενη τιμή του κέρδους είναι:

$$\mathbb{E}[\text{κέρδος}] = \int_0^1 \int_0^v (v-c)\, dc\, dv = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

Αυτό είναι το νούμερο **1/6** που εμφανίζεται παντού στο paper. Λέγεται **first-best efficiency** (πρώτο-καλύτερη αποδοτικότητα): το ιδεώδες όριο.

Σημαντικό: αυτό το $1/6$ είναι μέσος όρος όταν τραβάς πολλά (v,c) από το $U[0,1]$. Σε μια συγκεκριμένη συναλλαγή το κέρδος μπορεί να είναι 0, 0.3, 0.7 κ.λπ. Αλλά *κατά μέσο όρο σε όλες τις πιθανές κληρώσεις*, βγαίνει 0.1667.

4.3 Το πρόβλημα: ο αγοραστής μπλοφάρει

Στην πραγματικότητα ο αγοραστής δεν λέει v στον πωλητή. Λέει κάποιον *χαμηλότερο* αριθμό για να πιάσει καλύτερη τιμή. Ομοίως ο πωλητής λέει *ψηλότερο* αριθμό από το c. Αυτό λέγεται **στρατηγική συμπεριφορά**.

Το κλειδί: το πρόβλημα του Myerson–Satterthwaite

Όταν και οι δύο μπλοφάρουν στρατηγικά, χάνονται κάποιες συμφωνίες. Συγκεκριμένα, η αναμενόμενη απόδοση πέφτει από $1/6$ (πρώτο-καλύτερο) σε:

$$\frac{9}{64} \approx 0.1406$$

Σε σχέση με το ιδανικό:

$$\frac{9/64}{1/6} = \frac{9 \cdot 6}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} \approx 0.844 \quad \text{ή } 84.4\%$$

Δηλαδή χάνουμε περίπου 15.6% του πλεονάσματος όταν παίζουν στρατηγικά. Και αυτό αποδεικνύεται ότι είναι το *καλύτερο που μπορεί να κάνει οποιοσδήποτε μηχανισμός* με στρατηγικούς παίκτες.

5. Γιατί 9/64; Η ισορροπία Chatterjee–Samuelson

Πώς προέκυψε αυτό το παράξενο 9/64; Από έναν τύπο που πρότειναν οι Chatterjee–Samuelson το 1983.

5.1 Η βέλτιστη μπλόφα

Αν παίζω αγοραστής με αξία v, και ξέρω ότι το c του πωλητή είναι ομοιόμορφα στο $[0, 1]$, ο μαθηματικά βέλτιστος τρόπος μπλόφας είναι:

$$b^*(v) = \frac{2}{3}v + \frac{1}{12}$$

Δηλαδή: *δεν προσφέρω την αληθινή αξία v, προσφέρω 2/3 αυτής συν 1/12.*

Παράδειγμα: αριθμητική μπλόφα

Ας πούμε ότι $v = 0.9$ (αξιολογώ πολύ ψηλά).
Η βέλτιστη προσφορά μου είναι: $b^*(0.9) = \frac{2}{3}(0.9) + \frac{1}{12} = 0.6 + 0.0833 = 0.683$
Δηλαδή, ενώ θα πλήρωνα μέχρι 0.9, προσφέρω μόνο 0.683. Κρατάω ένα «μαξιλάρι» 0.217 σε δικό μου όφελος αν κλείσει η συμφωνία.
Αν $v = 0.3$ (αξιολογώ χαμηλά): $b^*(0.3) = 0.2 + 0.0833 = 0.283$.
Παρατήρησε ότι όσο πιο χαμηλά αξιολογώ, τόσο μικρότερη είναι η μπλόφα — η μπλόφα δεν είναι «πάντα -20%», είναι μια έξυπνη συνάρτηση.

Παρομοίως, ο πωλητής με κόστος c θα ζητήσει:

$$a^*(c) = \frac{2}{3}c + \frac{1}{4}$$

5.2 Πότε γίνεται η συναλλαγή με μπλόφες;

Συναλλαγή γίνεται μόνο αν η προσφορά του αγοραστή $\geq$ η ζήτηση του πωλητή:

$$\frac{2}{3}v + \frac{1}{12} \;\geq\; \frac{2}{3}c + \frac{1}{4}$$

Λύνοντας για $v - c$:

$$v - c \;\geq\; \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{1}{6}$$

Το κλειδί: το χαμένο gap

Δηλαδή **όταν παίζουν στρατηγικά, η συναλλαγή γίνεται μόνο αν το «πραγματικό κέρδος» $v - c$ είναι τουλάχιστον** $1/6$ **(**≈ 0.167**).** Αν το v είναι 0.5 και το c είναι 0.4 (κέρδος 0.1), *χάνεται η συμφωνία* επειδή $0.1 < 1/6$.
Αυτό είναι ακριβώς το «δ gap» που εμφανίζεται στο paper στην Lemma 6.

6. Η κεντρική ιδέα του paper: η παράμετρος α

Μέχρι εδώ είδαμε την κλασική θεωρία. Τι κάνει διαφορετικά το paper *Drakos (2026)*;

Το κλειδί: η παρατήρηση που ξεκινάει το paper

Όταν δύο LLM παζαρεύουν, **δεν παίζουν στρατηγικά τέλεια.** Συχνά λένε την αλήθεια ή κάτι κοντά σ' αυτή, ακόμα κι αν τους κοστίζει. Άρα, η πραγματική τους αποδοτικότητα μπορεί να είναι *παραπάνω* από το «καλύτερο δυνατό» των ανθρώπων.

Το paper εισάγει μία απλή παράμετρο για να μετρήσει αυτό:

Έννοια: η παράμετρος α (alpha)

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{το LLM λέει την αληθινή του αξία όταν ρωτηθεί})$$

Ένας αριθμός μεταξύ 0 και 1.

- $\alpha = 0$: το LLM παίζει πάντα στρατηγικά (όπως άνθρωπος).
- $\alpha = 1$: το LLM λέει πάντα την αλήθεια.
- $\alpha = 0.7$: στο 70% των περιπτώσεων λέει την αλήθεια, στο 30% μπλοφάρει.

Το α είναι ιδιότητα του μοντέλου — το μετράμε, δεν το διαλέγουμε.

6.1 Τα τρία είδη μπλόφας: όταν δεν λέει αλήθεια, τι κάνει;

Όταν το LLM επιλέγει να μην πει την αλήθεια (πιθανότητα $1 - \alpha$), τι κάνει; Το paper προτείνει τρεις θεωρητικές περιπτώσεις:

1. **Δυαδική (Binary)**: ή λέει την αλήθεια εντελώς, ή κάνει τη ΠΛΗΡΗ μπλόφα του Chatterjee–Samuelson. Σαν διακόπτης: ON ή OFF.
2. **Συνεχής (Continuous shading)**: αναμίγνυμα. Λέει $\alpha \cdot v + (1 - \alpha) \cdot$ στρατηγική. Δηλαδή «το 70% της απάντησής μου είναι αληθινό, το 30% στρατηγικό».
3. **Θορυβώδης (Noisy)**: λέει την αλήθεια συν ένα τυχαίο σφάλμα. Σαν να αντιγράφεις ένα νούμερο και να σε τρέμει το χέρι.

6.2 Οι κλειστές φόρμουλες (κεντρικό θεωρητικό αποτέλεσμα)

Μετά από αρκετά μαθηματικά, το paper καταλήγει σε δύο τύπους που σου επιτρέπουν να υπολογίσεις την αναμενόμενη αποδοτικότητα ως συνάρτηση του α:

Δυαδική:

$$\boxed{E^B(\alpha) \;=\; \frac{9}{64} + \frac{31\alpha}{864} - \frac{17\alpha^2}{1728}}$$

Συνεχής:

$$\boxed{E^C(\alpha) \;=\; \frac{9(\alpha+1)^2}{8(\alpha+2)^3}}$$

Παράδειγμα: ας τους ελέγξουμε στα άκρα

Στο $\alpha = 0$ (καθόλου αλήθεια):

$$E^B(0) = \frac{9}{64} + 0 - 0 = \frac{9}{64} \approx 0.1406 \checkmark$$

Σωστά — επιστρέφουμε στο Chatterjee–Samuelson.

Στο $\alpha = 1$ (απόλυτη αλήθεια):

$$E^C(1) = \frac{9 \cdot 4}{8 \cdot 27} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} \checkmark$$

Σωστά — φτάνουμε στο πρώτο-καλύτερο.
Σε μέσο σημείο, $\alpha = 0.5$:

$$E^C(0.5) = \frac{9 \cdot (1.5)^2}{8 \cdot (2.5)^3} = \frac{9 \cdot 2.25}{8 \cdot 15.625} = \frac{20.25}{125} = 0.162$$

Δηλαδή 97.2% του πρώτου-καλύτερου. Πολύ ψηλά!

Έννοια: τι σου λένε αυτές οι φόρμουλες

Είναι «μεταφραστές»: **δίνεις** α**, παίρνεις προβλεπόμενη αποδοτικότητα**. Αυτό είναι το βασικό θεωρητικό όπλο του paper:
«Πες μου πόσο ειλικρινές είναι το LLM σου, και θα σου πω πόσο καλό παζάρι θα κάνει.»

7. Το συνεχές κερδίζει: μια απλή απόδειξη της σύγκρισης

Το paper έχει ένα θεώρημα (Theorem 10) που λέει: *η συνεχής μπλόφα είναι πάντα καλύτερη από τη δυαδική*, για κάθε $0 < \alpha < 1$. Ας το δούμε αριθμητικά.

Παράδειγμα: σύγκριση σε $\alpha = 0.4$

Δυαδική:

$$E^B(0.4) = \frac{9}{64} + \frac{31 \cdot 0.4}{864} - \frac{17 \cdot 0.16}{1728} = 0.1406 + 0.01435 - 0.00157 = 0.1534$$

Συνεχής:

$$E^C(0.4) = \frac{9 \cdot (1.4)^2}{8 \cdot (2.4)^3} = \frac{9 \cdot 1.96}{8 \cdot 13.824} = \frac{17.64}{110.59} = 0.1595$$

Διαφορά: 0.0061, δηλαδή **+0.6% του πρώτου-καλύτερου** υπέρ του συνεχούς. Είναι το μέγιστο διαφοράς — σε άλλα α είναι μικρότερη.

Διαισθητική εξήγηση: η δυαδική είναι «είτε πες όλη την αλήθεια είτε καμία». Η συνεχής αναμιγνύει συνέχεια. Όταν αναμιγνύεις, παίρνεις «μέρη» και των δύο — και επειδή η δυαδική στο 1-α ποσοστό σου είναι *εντελώς* στρατηγική, χάνει περισσότερες συμφωνίες.

8. Από θεωρία σε πραγματικότητα: τι συνέβη με τα 10 LLM

Μέχρι τώρα όλα ήταν θεωρητικά. Το paper πάει παρακάτω: **δοκιμάζει 10 πραγματικά LLM** (Claude Opus, Claude Sonnet, GPT-5.5, Gemini, Grok, DeepSeek, Kimi, Qwen, Gemma) και μετράει τι συμβαίνει στ' αλήθεια.

8.1 Η ρύθμιση του πειράματος

Στέλνει σε κάθε LLM ένα prompt: «Είσαι πωλητής, το ελάχιστο σου είναι 0.6, τι ζητάς;» και μετράει τι απαντά.

- Αν απαντήσει «0.62», αυτό μετράει ως **αλήθεια** (κοντά στο 0.6).

- Αν απαντήσει «0.85», αυτό είναι **μπλόφα**.
- Αν απαντήσει «δεν θέλω να πω, εσύ τι προσφέρεις;», αυτό είναι **αποφυγή** (deflection).

Αυτή η τρίτη περίπτωση δεν προβλεπόταν από τη θεωρία.

8.2 Το αποτέλεσμα-σοκ: σχεδόν κανείς δεν παίζει το παιχνίδι

Το κλειδί: Phase 1 ευρήματα (μονοβολή ερώτηση)

Από τα 10 μοντέλα:

- **9 από τα 10** *αρνούνται να απαντήσουν με αριθμό* στο 60-98% των δοκιμών.
- Μόνο το Gemini Flash δίνει αριθμό σε πάνω από το μισό.
- Όταν δίνουν αριθμό, η μπλόφα φαίνεται *θορυβώδης* (μόνο), όχι δυαδική, όχι συνεχής.

Συμπέρασμα: Η αρχική θεωρία (binary, continuous, noisy) **διαψεύδεται εμπειρικά**. Η πραγματική «τέταρτη συμπεριφορά» είναι: *αρνούνται απλά να απαντήσουν*.

Είναι σαν να ρωτάς έναν έμπειρο επαγγελματία «πες μου πόσο μπορείς να κατέβεις» και να σου απαντά «εσύ τι προσφέρεις πρώτα;». Ακριβώς αυτό κάνει.

8.3 Τι έγινε όταν τους έβαλαν να παζαρέψουν με γύρους

Δεύτερο πείραμα: αντί να ρωτάει μία φορά, βάζει **δύο LLM** να ανταλλάσσουν προσφορές μέχρι να συμφωνήσουν ή να τελειώσουν 5 γύροι.

Μοντέλο	Ποσοστό συμφωνιών	Αποδοτικότητα
Claude Sonnet 4.6	48.3%	0.907
Gemini 3 Flash	38.3%	0.924
GPT-5.5	25.0%	0.667
DeepSeek V4 Pro	11.7%	0.293
Grok 4.3	8.3%	0.168
Claude Opus 4.7	**0.0%**	**0.000**

Το κλειδί: δύο εκπληκτικά ευρήματα

1) Το ίδιο πρωτόκολλο, εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Από 0.0% (Claude Opus, μηδέν συμφωνίες σε 60 παζάρια) μέχρι 92% αποδοτικότητα (Gemini Flash). Δύο μοντέλα της *ίδιας οικογένειας* (Claude Opus vs Claude Sonnet) έχουν τεράστια διαφορά.
2) Τα καλύτερα LLM ξεπερνούν το θεωρητικό όριο. Το Gemini Flash με 0.924 ξεπερνά το $9/64 \approx 0.844$ του Chatterjee–Samuelson. Δηλαδή «κάνει καλύτερο παζάρι από τη θεωρητική βέλτιστη στρατηγική ανθρώπων». Πώς; Επειδή *δεν παίζει στρατηγικά*.

8.4 Γιατί το Claude Opus αρνείται

Το paper περιλαμβάνει αυτούσιους διαλόγους από το Claude Opus. Σε όλους βλέπεις το ίδιο μοτίβο:

Παράδειγμα: Αγοραστής με $v = 0.924$, Πωλητής με $c = 0.193$. Πιθανό κέρδος: 0.731 (πάρα πολύ!).

```
Γύρος 0: Β προτείνει 0.25, Π προτείνει 0.85
Γύρος 1: Β προτείνει 0.35, Π προτείνει 0.75
Γύρος 2: Β προτείνει 0.45, Π προτείνει 0.65
Γύρος 3: Β προτείνει 0.50, Π προτείνει 0.60
Γύρος 4: Β προτείνει 0.53, Π προτείνει 0.58
Τέλος γύρων. Καμία συμφωνία. Χαμένο κέρδος: 0.731.
```

Και τα δύο πλησιάζουν, αλλά κανένα δεν πατάει το «ACCEPT». Είναι σαν χορός — πάντα ένα βήμα μακριά. Το paper το ονομάζει **δομική άρνηση** (structural refusal).

8.5 Η λύση: ασύμμετροι ρόλοι

Όταν το paper όρισε *ξεκάθαρα* έναν ως «προτείνων» και τον άλλον ως «απαντών», τα πράγματα άλλαξαν:

Μοντέλο	Συμμετρικό	Με ρόλους
Grok	0.228	**0.619**
Claude Opus	0.000	**0.367**
Claude Sonnet	0.907	**0.994**

Δηλαδή: αν σπάσεις τη συμμετρία (κάποιος ξεκινά, κάποιος απαντά), το πρόβλημα ξεκολλάει.

9. Εφαρμογή σε ξενοδοχείο: η σύνδεση με την πραγματικότητα

Όλη αυτή η μαθηματική γυμναστική έχει ένα στόχο: **να αποφασίσεις αν θα βάλεις LLM να διαπραγματεύεται για το ξενοδοχείο σου ή όχι.**

9.1 Ποιο είναι το «c» του ξενοδοχείου;

Στο παζάρι του paper, το c είναι «το ελάχιστο που δέχεται ο πωλητής». Σε ένα ξενοδοχείο όμως, το ελάχιστο δεν είναι σταθερό:

- Στις 14 Αυγούστου με 90% πληρότητα, το «κόστος ευκαιρίας» ενός δωματίου είναι ψηλό — αν το πουλήσω φθηνά τώρα, χάνω την ευκαιρία να το πουλήσω ακριβότερα σε άλλον.
- Στις 12 Νοεμβρίου με 30% πληρότητα, το ίδιο δωμάτιο έχει χαμηλό κόστος ευκαιρίας — αν δεν το πουλήσω τώρα, μάλλον θα μείνει άδειο.

Έννοια: το οριακό κόστος του ξενοδοχείου

Το paper το γράφει ως:

$$c_{\text{hotel}}(t, c) = V(t, c) - V(t, c - 1)$$

σε καθαρά ελληνικά: *«πόσο μου αξίζει το επιπλέον δωμάτιο που θα πουλούσα;»*.
Το $V(t, c)$ είναι «η συνολική αξία που θα κερδίσω από εδώ και πέρα» αν στο χρόνο t μου μένουν c δωμάτια. Η διαφορά $V(t, c) - V(t, c - 1)$ είναι η «επιπλέον αξία» που χάνω αν πουλήσω ένα δωμάτιο.
Αυτό υπολογίζεται με **δυναμικό προγραμματισμό** — κάτι σαν λύση ενός σταυρόλεξου από κάτω προς τα πάνω.

9.2 Τα τρία πιθανά συστήματα

Ένας ξενοδόχος έχει τρεις επιλογές:

1. «**Τιμή πινακίδας**» **(posted price)**: «Η τιμή είναι Χ. Θες; Πάρε. Δεν θες; Πάρε δρόμο.» Απλό, χωρίς διαπραγμάτευση.
2. **Chatterjee–Samuelson**: Στρατηγικός μηχανισμός με μπλόφες (το «καλύτερο δυνατό» θεωρητικά).
3. **LLM-mediated**: Δύο LLM παζαρεύουν για λογαριασμό του ξενοδόχου και του αγοραστή.

9.3 Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης

α	Τιμή πινακίδας	CS	LLM
0.0	0.923	0.904	0.904
0.2	0.923	0.904	0.909
0.4	0.923	0.904	0.919
0.5	**0.923**	**0.904**	$\approx$**0.923**
0.6	0.923	0.904	0.939
0.8	0.923	0.904	0.968
1.0	0.923	0.904	1.000

Το κλειδί: το κατώφλι των 0.5

- Αν $\alpha < 0.5$: η απλή **τιμή πινακίδας κερδίζει**. Δεν χρειάζεσαι LLM.
- Αν $\alpha > 0.5$: το **LLM σε ξεπερνά** και αξίζει η επένδυση.

9.4 Phase 5: το πραγματικό πείραμα στα ευρώ

Το paper επανέλαβε το πείραμα με *πραγματικά ξενοδοχειακά νούμερα* (αξίες αγοραστών 100–180€, κόστη ξενοδοχείου από τη λύση δυναμικού προγραμματισμού):

Μοντέλο	Αποδοτικότητα LLM	Αποδοτικότητα Πινακίδας	Νικητής
Claude Sonnet 4.6	**0.998**	0.931	LLM
Gemini 3 Flash	0.885	0.841	LLM
DeepSeek V4 Pro	0.262	0.932	Πινακίδα
GPT-5.5	0.165	0.952	Πινακίδα

Το κλειδί: το πιο σημαντικό πρακτικό εύρημα του paper

- Το **Claude Sonnet** φτάνει 99.8% — σχεδόν τέλεια διαπραγμάτευση. Κερδίζει την πινακίδα κατά 6.7 ποσοστιαίες μονάδες.
- Το **GPT-5.5**, ενώ ήταν αρκετά καλό σε αφηρημένο τεστ (0.667), *κατέρρευσε στο 0.165* όταν του είπαν «είναι ξενοδοχείο, μίλα ευρώ». Πτώση 50 ποσοστιαίων μονάδων μόνο από αλλαγή πλαισίου.

Συμπέρασμα: Δεν αρκεί ότι ένα μοντέλο είναι «καλό γενικά». Πρέπει να το δοκιμάσεις στο *δικό σου* domain πριν το αναπτύξεις.

10. Σύνοψη: τι κρατάμε στο μυαλό μας

1. **Το θεώρημα αδυναμίας υπάρχει.** Όταν δύο στρατηγικοί παίκτες παζαρεύουν με κρυφές αξίες, χάνεται περίπου το 15% του δυνητικού κέρδους. Αυτό είναι αναπόφευκτο για *ανθρώπους ή στρατηγικά LLM*.

2. **Τα LLM δεν είναι στρατηγικοί παίκτες.** Λένε αλήθεια συχνότερα από όσο τους συμφέρει. Άρα παράγουν αποδοτικότητα παραπάνω από το θεωρητικό όριο — δεν παραβιάζουν το θεώρημα, απλά παίζουν διαφορετικό παιχνίδι.

3. **Η παράμετρος α είναι το κλειδί.** Μετράς πόσο συχνά λέει αλήθεια το LLM σου, και μπορείς να προβλέψεις την αποδοτικότητα.

4. **Στην πράξη όμως, τα LLM δεν παίζουν όπως νομίζαμε.** Στις περισσότερες περιπτώσεις αρνούνται να απαντήσουν σε άμεσες ερωτήσεις. Ο διάλογος-με-γύρους είναι ο σωστός τρόπος να τα δοκιμάσεις.

5. **Τεράστια ετερογένεια ανάμεσα σε μοντέλα.** Δύο μοντέλα της ίδιας οικογένειας (Claude Sonnet vs Opus) δίνουν εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Πάντα δοκίμαζε το συγκεκριμένο μοντέλο που θες να αναπτύξεις.

6. **Το domain έχει σημασία.** Ένα μοντέλο που δουλεύει σε αφηρημένα νούμερα μπορεί να καταρρεύσει σε ξενοδοχειακό συγκείμενο. Πάντα δοκίμαζε στο domain σου.

7. **Πρακτική σύσταση για ξενοδοχειακή ανάπτυξη**: αν το α του LLM σου είναι κάτω από 0.5, μην βάλεις LLM — μια καλά συντονισμένη τιμή πινακίδας θα τα πάει εξίσου καλά. Αν είναι πάνω από 0.7, αξίζει σίγουρα.

Το κλειδί: η μεγάλη εικόνα

Το paper μας δείχνει κάτι θεμελιώδες: όταν αλλάζει το είδος των παικτών (από στρατηγικούς ανθρώπους σε «αφελείς» αλλά πειθήνια LLM), αλλάζει και το παιχνίδι. Ένα 43-ετές θεώρημα που λέει «αυτό είναι αδύνατο» δεν παύει να ισχύει — απλά οι νέοι παίκτες δεν παίζουν στις προϋποθέσεις του.

Συγχαρητήρια! Διάβασες ένα paper που αναμίγνυει θεωρία μηχανισμών, στατιστική, δυναμικό προγραμματισμό και πειραματική AI έρευνα. Αν τα μαθηματικά εξακολουθούν να σε τρομάζουν, ξαναδιάβασε αργά τις ενότητες 3 και 4. Οι υπόλοιπες είναι όλες παραλλαγές του ίδιου θέματος.