

4.

Théorèmes relatifs aux intégrales des fonctions algébriques.

(Par M. Poisson, à Paris, 1. décembre, 1833.)

I.

On comprend sous la dénomination de fonctions algébriques, non seulement les fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, et celles qui sont exprimées par des combinaisons de radicaux, mais encore les quantités déterminées par des équations d'un degré quelconque, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable.

Les quantités exprimées *sous forme finie* sont plus générales: outre des radicaux, elles peuvent renfermer dans leurs expressions, des logarithmes et des exponentielles, ou bien, elles peuvent dépendre d'équations qui contiennent ces deux sortes de transcendentes, réelles ou imaginaires, ce qui comprend les arcs de cercle et leurs sinus.

On exposera ci-après des théorèmes sur les intégrales des fonctions algébriques, remarquables par leur grande généralité et par la simplicité des considérations qui y conduisent. Ces théorèmes résultent, en effet, du procédé vulgaire de l'intégration par partie, ou de l'équation

$$1. \quad \int x \partial y + \int y \partial x = xy + C,$$

dans laquelle C est une constante arbitraire, et x et y sont deux variables, entre lesquelles nous établirons successivement différentes liaisons. Ils subsisteront également, et acquieront encore plus de généralité, si l'on remplace x dans cette équation, par un polynome ou une fonction rationnelle et entière de x , que je représenterai par X , de sorte qu'on ait

$$2. \quad \int X \partial y + \int y \partial X = XY + C.$$

II.

Supposons d'abord que les variables x et y soient liées entre elles par l'équation:

$$3. \quad ax^n + bx^{n-1} \dots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} \dots + k'x + l')y,$$

dans laquelle $a, b, \dots, k, l, a', b', \dots, k', l'$, sont des coefficients con-

stants et donnés, et n désigne un nombre entier et positif, aussi donné. Faisons, pour abréger,

$$\frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + k'x + l'} = fx,$$

et, ensuite

$$\int y \partial x = \int fx \partial x = Fx;$$

Fx sera une fonction algébrique et logarithmique, que l'on obtiendra toujours par les règles de l'intégration des fonctions rationnelles; et l'équation (1.) deviendra

$$\int x \partial y = xfx - Fx + C.$$

D'ailleurs, on tirera de l'équation (3.) un nombre n de valeurs de x en fonctions de y , que je représenterai par y_1, y_2, \dots, y_n ; si donc on met à la place de x , dans l'équation précédente, celle de ces n valeurs qui répond à l'indice quelconque i , on aura

$$4. \int y_i \partial y = yy_i - Fy_i + C;$$

d'où il résulte que l'intégrale $\int y_i \partial y$, qui est, pour ainsi dire, inverse de $\int fx \partial x$, peut toujours s'obtenir en fonction de y , sous forme finie, comme cette dernière en fonction de x .

On rendra ce théorème plus général, en partant de l'équation (2.) au lieu de l'équation (1.). En faisant alors

$$\int fx \partial X = Fx,$$

et désignant par Y_i , ce que devient X quand on y met y_i à la place de x , nous aurons

$$\int Y_i \partial y = y Y_i - Fy_i + C;$$

en sorte que l'intégrale $\int Y_i \partial y$ s'obtiendra aussi, sous forme finie, en fonction de y .

Si fx est une fonction entière, c. a. d., si le coefficient de y dans l'équation (3.) est une constante C , la fonction Fx ne contiendra pas de logarithmes. En faisant

$$y Y_i - Fy_i = P_i,$$

cette quantité P_i sera une fonction rationnelle et entière de y_i . Si donc on égale à zéro le produit

$$(u - P_1)(u - P_2) \dots (u - P_n),$$

on aura une équation du degré n , savoir,

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \dots + Ku + L = 0,$$

dont les coefficients A, B, \dots, K, L , seront des fonctions symétriques des racines y_1, y_2, \dots, y_n , de l'équation (3.), qui s'exprimeront, par conséquent, au moyen de ses coefficients a, b, \dots, k , et de son dernier terme $l - l'y$, et qui seront des fonctions rationnelles et entières de y . Dans ce cas, les n valeurs de P_i , ou de $\int Y_i \partial y - C$, qui répondent à $i = 1, = 2, \dots, \dots = n$, pourront donc être regardées comme les racines d'une équation du degré n , facile à déduire de l'équation (3.).

III.

Pour donner une application du théorème précédent, que l'on puisse vérifier, je suppose que l'équation (3.) ne soit que du second degré et se réduise à

$$5. \quad (a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + c - c'y = 0.$$

On en déduira, pour ses deux racines,

$$y_1 = \frac{b'y - b + v}{2(a - a'y)}, \quad y_2 = \frac{b'y - b - v}{2(a - a'y)},$$

en faisant, pour abréger,

$$v = \sqrt{[(b'y - b)^2 - 4(a'y - a)(c'y - c)]}.$$

En supposant aussi $X = x$, on aura, en même tems,

$$Fx = \int \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \partial x.$$

Par les règles ordinaires, on en conclura

$$Fx = \frac{ax}{a'} + A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta),$$

en désignant par α et β les deux racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

et faisant, pour abréger,

$$\frac{(a'b - ab')\alpha + a'c - ac'}{(a - \beta)a'^2} = A, \quad \frac{(a'b - ab')\beta + a'c - ac'}{(\beta - \alpha)a'^2} = B.$$

Par conséquent, l'équation (1.) deviendra

$$\int y_i \partial y = (a'y - a) \frac{y_i}{a'} - A \log(y_i - \alpha) - B \log(y_i - \beta) + C,$$

et si l'on y met successivement les valeurs de y_1 et y_2 à la place de y_i , et que l'on fasse la somme et la différence des résultats, on aura

$$6. \quad \begin{cases} \int \frac{b'y - b}{a - a'y} \partial y = \frac{b - b'y}{a'} - A \log[(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)] \\ \quad - B \log[(y_1 - \beta)(y_2 - \beta)] + \text{const.}, \\ \int \frac{v \partial y}{a'y - a} = \frac{v}{a'} + A \log\left(\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha}\right) + B \log\left(\frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta}\right) + \text{const.} \end{cases}$$

Les produits $(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha)$ et $(y_1 - \beta)(y_2 - \beta)$ ne sont autre chose que le premier membre de l'équation (5.) divisé par $a - a'y$, et dans lequel on substituerait successivement α et β au lieu de x ; et comme ces substitutions réduisent à zéro le coefficient de y dans ce premier membre, il s'ensuit que l'on a

$$(y_1 - \alpha)(y_2 - \alpha) = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{a - a'y}, \quad (y_1 - \beta)(y_2 - \beta) = \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{a - a'y}.$$

Donc, en observant que

$$\frac{b'y - b}{a - a'y} = -\frac{b'}{a'} + \frac{ab' - a'b}{(a - a'y)a'},$$

et ayant égard aux valeurs de A et B , la première équation (6.) deviendra

$$\frac{ab' - a'b}{a'} \int \frac{\partial y}{a - a'y} = -\frac{(ab' - a'b)}{a'^2} \log(a - a'y) + \text{const.};$$

ce qui est, en effet, évident.

Quant à la deuxième équation (6.), on a d'abord

$$\begin{aligned} & A \log \left(\frac{y_1 - \alpha}{y_2 - \alpha} \right) + B \log \left(\frac{y_1 - \beta}{y_2 - \beta} \right) \\ &= \frac{a'b - ab'}{2a'^2} \log \frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} + \frac{(a'b - ab')(\alpha + \beta) + 2a'c - 2ac'}{2(\alpha - \beta)a'^2} \log \frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)}; \end{aligned}$$

au moyen des valeurs de y_1 et y_2 , et à cause de

$$\alpha + \beta = -\frac{b'}{a'}, \quad \alpha\beta = \frac{c'}{a'},$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{(y_1 - \alpha)(y_1 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_2 - \beta)} &= \frac{(ab' - a'b + a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c + b'v)(a'y - a)}{(ab' - a'b - a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c - b'v)(a'y - a)}, \\ \frac{(y_1 - \alpha)(y_2 - \beta)}{(y_2 - \alpha)(y_1 - \beta)} &= \frac{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' - (\alpha - \beta)a'v}{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' + (\alpha - \beta)a'v}; \end{aligned}$$

et cela étant, cette seconde équation (6.) devient

$$\begin{aligned} \int \frac{v \partial y}{a'y - a} &= \frac{v}{a'} + \frac{a'b - ab'}{2a'^2} \log \frac{(ab' - a'b + a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c + b'v)(a'y - a)}{(ab' - a'b - a'v)(b'y - b) - (2ac' - 2a'c - b'v)(a'y - a)} \\ &+ \frac{2a'^2c + ab'^2 - 2aa'c' - a'bb'}{2(\alpha - \beta)a'^2} \log \frac{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' - (\alpha - \beta)a'v}{(4a'c' - b'^2)y - 2a'c - 2ac' + bb' + (\alpha - \beta)a'v} + \text{const.}; \end{aligned}$$

ce que l'on pourra effectivement vérifier par les règles ordinaires du calcul intégral.

Dans le cas de $\alpha = \beta$, le 3^e terme de cette formule se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; et comme on a alors $b'^2 = 4a'c'$, on trouve $\frac{v}{a'}$ pour sa vraie valeur. Si a' est zéro, on supposera d'abord cette constante infiniment petite, et l'on développera ensuite la formule suivant les puissances de a' .

IV.

Je suppose actuellement que l'équation qui lie entre elles les variables x et y , ne diffère de l'équation (3.) qu'en ce qu'elle renferme y^2 au lieu de y , de sorte que nous ayons

$$7. \quad ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l = (a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + k'x + l')y^2.$$

Je désignerai toujours par y_1, y_2, \dots, y_n , les n valeurs de x que l'on tire de cette équation, et par Y_i ce que devient le polynome X , lorsqu'on y met y_i au lieu de x . L'équation (7.) donne aussi

$$y = \pm \sqrt{f(x)};$$

$f(x)$ étant la même fonction rationnelle que précédemment. En regardant le radical $\sqrt{f(x)}$ comme une quantité positive, on devra prendre le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la variable y sera positive ou négative. Pour fixer les idées, je supposerai qu'elle soit positive; et si l'on fait alors

$$\int \sqrt{f(x)} \partial X = \psi x,$$

et que l'on mette y_i au lieu de x dans l'équation (2.), elle deviendra

$$\int Y_i \partial y + \psi y_i = y Y_i + C.$$

Cette équation subsistera pour les n racines de l'équation (7.). En les substituant successivement à la place de y_i , et prenant la somme des résultats, on aura donc

$$8. \quad \psi y_1 + \psi y_2 + \dots + \psi y_n = y Y - \int Y \partial y + C,$$

où l'on a fait, pour abrégér,

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = Y,$$

et C étant toujours une constante arbitraire. Or, puisque Y_i est une fonction rationnelle de y_i , la somme Y sera une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (7.), dont on pourra obtenir la valeur en fonction rationnelle des coefficients de cette équation. Cette quantité Y est donc une fonction rationnelle de y ; et, par conséquent, l'intégrale $\int Y \partial y$ s'obtiendra toujours sous forme finie.

Donc, en vertu de l'équation (8.), la somme des valeurs de l'intégrale ψx , qui répondent aux n racines de l'équation (7.) prises successivement pour la variable x , s'exprimera sous forme finie, en fonction de y , quoique cette intégrale ψx ne puisse pas s'obtenir sous forme finie, ni même se réduire, en général, à des fonctions plus simples, telle que les fonctions elliptiques.

V.

Avant d'aller plus loin, il est bon de vérifier ce théorème sur un exemple.

Supposons, pour cela, que l'équation (7.) soit

$$(1-x)(h-x) = (1+x)(h+x)y^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$9. \quad x^2 - (1+h)px + h = 0;$$

h étant une constante, et en faisant, pour abrégér,

$$\frac{1+y^2}{1-y^2} = p.$$

Supposons aussi que l'on ait simplement $X = x$.

On aura, dans ce cas,

$$10. \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(1+h)p + \frac{1}{2}\sqrt{((1+h)^2 p^2 - 4h)}, \\ y_2 = \frac{1}{2}(1+h)p - \frac{1}{2}\sqrt{((1+h)^2 p^2 - 4h)}, \end{cases}$$

pour les deux racines de l'équation donnée. La quantité Y sera leur somme en sorte que l'on aura aussi

$$Y = \frac{(1+h)(1+y^2)}{1-y^2},$$

$$\int Y \partial y = -(1+h)y + (1+h) \log \frac{1+y}{1-y}.$$

L'intégrale représentée par ψx sera

$$\psi x = \int \sqrt{\frac{(1-x)(h-x)}{(1+x)(h+x)}} \partial x;$$

et si nous faisons

$$\int \frac{(h+x^2) \partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \phi x, \quad \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-x^2)(h^2-x^2)}} = \phi' x,$$

elle pourra s'écrire ainsi

$$\psi x = \phi x - (1+h)\phi' x.$$

Par conséquent, l'équation (8.) deviendra

$$11. \quad \phi y_1 + \phi y_2 = (1+h) \left(\frac{2y}{1-y^2} - \log \frac{1+y}{1-y} + \phi' y_1 + \phi' y_2 \right) + C.$$

Elle subsistera pour toutes les valeurs positives de y , en y regardant le radical $\sqrt{[(1-x^2)(h^2-x^2)]}$ comme une quantité positive. Si cette variable est négative, l'équation (11.) subsistera encore, en y changeant le signe du radical, ce qui changera ceux de ϕx et $\phi' x$,

On aura, sous forme finie,

$$\phi' x = \frac{1}{2} \log [2x^2 - 1 - h^2 + 2\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}].$$

L'équation (9.) donne

$1-x^2 = (1+h)(1-px), \quad h^2-x^2 = (1+h)(h-px);$
d'où il résulte d'abord

$\Phi'x = \frac{1}{2} \log(1+h) + \frac{1}{2} \log[2px-1-h+2\sqrt{(1-px)(h-px)}];$
mais en vertu de l'équation (9.), on a aussi

$(1-px)(h-px) = h - (1+h)px + p^2x^2 = x^2(p^2-1);$
et en faisant

$$p + \sqrt{p^2-1} = \frac{1+y}{1-y} = q,$$

on en conclut

$$\Phi'x = \frac{1}{2} \log(1+h) + \frac{1}{2} \log(2qx-1-h).$$

Cela étant, nous aurons

$\Phi'y_1 + \Phi'y_2 = \log(1+h) + \frac{1}{2} \log[4q^2y_1y_2 - 2q(1+h)(y_1+y_2) + (1+h)^2];$
et comme, d'après la même équation (9.) dont y_1 et y_2 sont les deux racines, on a

$$12. \quad y_1y_2 = h, \quad y_1+y_2 = (1+h)p,$$

il en résulte que la quantité comprise sous le second logarithme se réduira au carré de $\frac{(1-h)(1+y)}{1-y}$, en ayant égard aux valeurs de p et q ; par conséquent, on aura

$$\Phi'y_1 + \Phi'y_2 = \log(1-h^2) + \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Au moyen de cette valeur, et en comprenant le terme $(1+h)\log(1-h^2)$ dans la constante C , la partie logarithmique disparaîtra du second membre de l'équation (11.), qui deviendra simplement

$$\Phi y_1 + \Phi y_2 = \frac{2(1+h)y}{1-y^2} + C.$$

Pour déterminer la constante C , je supposerai que les intégrales Φy_1 et Φy_2 s'évanouissent pour $y=0$, ce qui rendra nulle cette constante. D'après les formules (10.), on a $y_1=1$ et $y_2=h$ pour $y=0$; les quantités Φy_1 et Φy_2 seront donc alors l'intégrale Φx , prise depuis $x=1$ jusqu'à $x=y_1$ pour Φy_1 , et depuis $x=h$ jusqu'à $x=y_2$ pour Φy_2 ; en sorte que l'on aura finalement

$$13. \quad \int_1^{y_1} \frac{(h+x^2) \partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2) \partial x}{\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))}} = \frac{2(1+h)y}{1-y^2}.$$

On vérifiera cette équation en différenciant ses deux membres par rapport à y ; ce qui donne

$$\frac{(h+y_1^2) \partial y_1}{\sqrt{((1-y_1^2)(h^2-y_1^2))}} + \frac{(h+y_2^2) \partial y_2}{\sqrt{((1-y_2^2)(h^2-y_2^2))}} = \frac{2(1+h)(1+y^2) \partial y}{(1-y^2)^2};$$

or, l'équation (9.) donne aussi, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\sqrt{((1-x^2)(h^2-x^2))} = x(1+h)\sqrt{(p^2-1)};$$

en différentiant cette même équation (9.), il vient

$$[2x-(1+h)p]\partial x = (1+h)x\partial p;$$

en mettant donc successivement y_1 et y_2 à la place de x , dans ces deux dernières équations, on aura les valeurs des radicaux contenus dans l'équation différentielle précédente, et des différentielles ∂y_1 et ∂y_2 ; et en vertu des équations (12.), ces quatre valeurs et celle de p rendront cette équation différentielle identique.

Il suit de cette vérification que l'équation (13.) a lieu; non seulement pour les valeurs positives ou négatives de y , mais aussi pour les valeurs imaginaires de cette variable. En y mettant $y\sqrt{-1}$ à la place de y , et changeant le signe de l'un des facteurs sous les radicaux, nous aurons cette seconde équation

$$14. \int_1^{y_1} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} + \int_h^{y_2} \frac{(h+x^2)\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} = -\frac{2(1+h)y}{(1+y^2)},$$

dans laquelle la variable y sera supposée réelle, et où l'on prendra les radicaux avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, selon que cette variable sera positive ou négative. En même tems, les équations (12.) deviendront

$$15. \quad y_1 y_2 = h, \quad y_1 + y_2 = \frac{(1+h)(1-y^2)}{1+y^2}.$$

VI.

L'une ou l'autre de ces équations (13.) ou (14.), la seconde, par exemple, pourra encore être vérifiée par la transformation des intégrales qu'elle renferme, en fonctions elliptiques.

A cet effet, je suppose la constante h moindre que l'unité, et je fais

$$1-h^2 = c^2, \quad x^2 = \frac{h^2}{1-c^2 \sin^2 \varphi}.$$

Il en resultera

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((1-x^2)(x^2-h^2))}} = \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}};$$

les valeurs de φ qui répondent à $x=1$ et $x=h$ seront $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ et $\varphi=0$; en appelant donc φ_1 et φ_2 , celles qui répondent à y_1 et y_2 , l'équation (14.) prendra la forme:

$$h \left[\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} \right] + h^2 \left[\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{2(1+h)y}{1+y^2},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\begin{aligned}
& h \left[\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} \right] \\
& + h^2 \left[\int_0^{\varphi_1} \frac{\partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\varphi_2} \frac{\partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \right] = \\
& h \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} + h^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(1+h)y}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$\frac{h^2 \partial \varphi}{(1-c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)} \partial \varphi - c^2 \partial \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}};$$

en employant les notations connues de Legendre, pour désigner les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce, on aura donc

$$\begin{aligned}
& h[F(c, \varphi_1) + F(c, \varphi_2)] + E(c, \varphi_1) + E(c, \varphi_2) \\
& = hF(c, \tfrac{1}{2}\pi) + E(c, \tfrac{1}{2}\pi) - \frac{2(1+h)y}{1+y^2} + \frac{c^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi_1)}} + \frac{c^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi_2)}}.
\end{aligned}$$

Mais, d'après la valeur de x^2 , on a

$$16. \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{(x^2-h^2)}}{cx}, \quad \cos \varphi = \frac{h\sqrt{(1-x^2)}}{cx}, \quad \sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)} = \frac{h}{x};$$

d'où l'on conclut, en vertu de l'équation (9.),

$$\frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{x} \sqrt{[(x^2-h^2)(1-x^2)]} = \frac{y}{x} (1+x)(h+x),$$

en mettant $y\sqrt{-1}$ au lieu de y , et prenant le radical avec le même signe que y , comme le suppose l'équation (14.). On aura donc

$$\frac{c^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi_1)}} + \frac{c^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \varphi_2)}} = \frac{hy}{y_1 y_2} (y_1 + y_2) + 2y(1+h) + y(y_1 + y_2);$$

quantité qui se réduit à $\frac{4y(1+h)}{1+y^2}$, en ayant égard aux équations (15.).

Par conséquent nous aurons, pour l'équation (14.) transformée en fonctions elliptiques,

$$\begin{aligned}
17. \quad & h[F(c, \varphi_1) + F(c, \varphi_2)] + E(c, \varphi_1) + E(c, \varphi_2) = \\
& hF(c, \tfrac{1}{2}\pi) + E(c, \tfrac{1}{2}\pi) + \frac{2y(1+h)}{1+y^2};
\end{aligned}$$

resultat facile à vérifier, au moyen des propriétés connues de ce genre de quantités.

Soit, en effet, ω un angle tel que l'on ait

$$F(c, \varphi_1) + F(c, \varphi_2) = F(c, \omega);$$

pour ce même angle, on aura aussi, comme on sait,

$$E(c, \varphi_1) + E(c, \varphi_2) = E(c, \omega) + c \sin \omega \sin \varphi_1 \sin \varphi_2;$$

d'après la première formule (16.), appliquée aux angles φ_1 et φ_2 , on a

d'ailleurs

$$c^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{1}{y_1 y_2} \sqrt{[(y_1^2 - h^2)(y_2^2 - h^2)]};$$

quantité qui se réduit à $\frac{2\gamma(1+h)}{1+\gamma^2}$, en vertu des équations (15.); par conséquent, l'équation (17.) deviendra

$$18. \quad hF(c, w) + E(c, w) = hF(c, \tfrac{1}{2}\pi) + E(c, \tfrac{1}{2}\pi) + \frac{2\gamma(1+h)}{1+\gamma^2}(1 - \sin w).$$

Or, on sait aussi que l'angle w sera déterminé par l'équation *)

$$\cos w = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi_1)} \sqrt{(1 - c^2 \sin^2 \varphi_2)}}{1 - c^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2};$$

et d'après les formules (16.), le numérateur de cette expression a pour valeur

$$\frac{h^2}{c^2} \left[\sqrt{[(1 - y_1^2)(1 - y_2^2)]} - \frac{1}{y_1 y_2} \sqrt{[(y_1^2 - h^2)(y_2^2 - h^2)]} \right];$$

quantité qui se réduit à zéro, en vertu des équations (15.). On a donc

$$\cos w = 0, \quad w = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \sin w = 1;$$

ce qui rend identique l'équation (18.) qu'il s'agissoit de vérifier.

VII.

Revenons maintenant à l'équation (8.).

En la différentiant par rapport à y , on a

$$\sqrt{(fy_1)} \partial Y_1 + \sqrt{(fy_2)} \partial Y_2 + \dots + \sqrt{(fy_n)} \partial Y_n = y \partial Y;$$

et dans cette équation différentielle entre y, y_1, y_2, \dots, y_n , ces $n+1$ variables sont séparées; car Y est une fonction de y (§. IV.), et Y_1, Y_2, \dots, Y_n , sont respectivement des fonctions de y_1, y_2, \dots, y_n . Or, en mettant successivement y_1, y_2, \dots, y_n , au lieu de x dans l'équation (7.), on aura

$$ay_1^n + by_1^{n-1} + \dots + ky_1 + l = (a'y_1^n + b'y_1^{n-1} + \dots + k'y_1 + l')y^2,$$

$$ay_2^n + by_2^{n-1} + \dots + ky_2 + l = (a'y_2^n + b'y_2^{n-1} + \dots + k'y_2 + l')y^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$ay_n^n + by_n^{n-1} + \dots + ky_n + l = (a'y_n^n + b'y_n^{n-1} + \dots + k'y_n + l')y^2;$$

ce système d'équations algébriques entre les $n+1$ variables y, y_1, y_2, \dots, y_n , satisfera donc à l'équation différentielle précédente; mais il n'en sera qu'une intégrale particulière, parcequ'il ne renferme aucune constante arbitraire.

*) *Traité des fonctions elliptiques, tome 1^{er}, page 22.*

Pour un indice quelconque i , ou se rappellera que l'on a, dans cette équation différentielle,

$$fy_i = \frac{ay_i^n + by_i^{n-1} + \dots + ky_i + l}{a'y_i^n + b'y_i^{n-1} + \dots + k'y_i + l'},$$

et que Y_i est une fonction rationnelle et entière de y_i , ou un polynome en y_i , d'un degré quelconque.

VIII.

Le théorème contenu dans l'équation (8.) est distinct de celui qu'Abel a donné dans le journal de M. Crelle*), et dont Legendre a fait la base du 3^e supplément à son traité des fonctions elliptiques. Mais on parvient aussi à un théorème semblable à celui d'Abel, par les considérations très-simples qui nous ont conduit à l'équation (8.).

Pour le faire voir, soient $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $f_1 x$, $f_2 x$, quatre polynomes d'un degré quelconque par rapport à x : les coefficients des deux premiers sont des constantes données; ceux des deux derniers sont des fonctions rationnelles d'une variable z ; une autre variable y est liée à x et y par les deux équations:

$$(a.) \quad \varphi_1 x = y^2 \varphi_2 x, \quad f_1 x = y f_2 x;$$

d'où l'on tire cette troisième équation

$$(b.) \quad \varphi_1 x (f_2 x)^2 - \varphi_2 x (f_1 x)^2 = 0,$$

entre x et z . La première équation (a.) donne aussi

$$y = \pm \sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x}\right)},$$

où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que le rapport $\frac{f_1 x}{f_2 x}$, qui exprime la valeur de y tirée de la seconde équation (a.), sera positif ou négatif.

Désignons aussi par X une fonction rationnelle et donnée de la seule variable x , et faisons

$$\pm \int X \sqrt{\left(\frac{\varphi_1 x}{\varphi_2 x}\right)} \partial x = \psi x;$$

le signe étant déterminé d'après celui de y , ou de $\frac{f_1 x}{f_2 x}$, comme on vient de le dire. L'intégrale $\int X \partial x$ se composera d'une partie entière et d'une partie logarithmique; en sorte que l'on pourra toujours la représenter par

$$\int X \partial x = P + A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta) + \text{etc.};$$

*) Tome III, page 313.

P étant un polynome en x , et A, B , etc., α, β , etc.; désignant des constantes réelles ou imaginaires, dont le nombre sera double de celui qui marque le degré du dénominateur de X .

Cela posé, si l'on met $\int X \partial x$ au lieu de X dans l'équation (2.), on aura

$$\int (\int X \partial x) \partial y + \int y X \partial x = y \int X \partial x + C;$$

et d'après les valeurs précédentes de $y, \psi x, \int X \partial x$, il en résultera

$$\begin{aligned} \psi x + \int P \partial y + A \int \log(x-\alpha) \partial y + B \int \log(x-\beta) \partial y + \text{etc.} \\ = y P + y A \log(x-\alpha) + y B \log(x-\beta) + \text{etc.} + C. \end{aligned}$$

Mais, en intégrant par partie, on a

$$\begin{aligned} \int \log(x-\alpha) \partial y &= y \log(x-\alpha) - \int \frac{y \partial x}{x-\alpha}, \\ \int \log(x-\beta) \partial y &= y \log(x-\beta) - \int \frac{y \partial x}{x-\beta}; \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

d'après la valeur de $\int X \partial x$, on a aussi

$$X \partial x - \partial P = \frac{A \partial x}{x-\alpha} + \frac{B \partial x}{x-\beta} + \text{etc.};$$

il en résultera donc

$$\begin{aligned} A \int \log(x-\alpha) \partial y + B \int \log(x-\beta) \partial y + \text{etc.} \\ = y A \log(x-\alpha) + y B \log(x-\beta) + \text{etc.} + \int y (\partial P - X \partial x), \end{aligned}$$

et, par conséquent

$$\psi x + \int P \partial y + \int y \partial P - \int y X \partial x = y P + C.$$

Donc, à cause de

$$\int P \partial y + \int y \partial P = y P, \quad y = \frac{f_1 x}{f_2 x},$$

on aura simplement

$$\psi x = \int \frac{X f_1 x}{f_2 x} \partial x + C.$$

En différentiant l'équation (b.) par rapport à x et z , on en déduira une valeur de ∂x que je représenterai par

$$\partial x = X' \partial z;$$

X' étant une fonction rationnelle de x et z . Si donc on fait

$$\frac{X X' f_1 x}{f_2 x} = Q,$$

de sorte que Q soit aussi une fonction rationnelle de x et z , on aura

$$\psi x = \int Q \partial z + C.$$

Maintenant, soit m le degré de l'équation (b.) par rapport à x ; désignons par z_1, z_2, \dots, z_m , ses m racines en fonctions de z , et par Q_1, Q_2, \dots, Q_m , les valeurs correspondantes de Q : en faisant, pour abrégér,

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m = Z,$$

substituant successivement z_1, z_2, \dots, z_m , à la place de x , dans l'équation précédente, et prenant la somme des résultats, nous aurons

$$\psi z_1 + \psi z_2 + \dots + \psi z_m = \int Z \partial z + C.$$

Or, Z sera une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation (b.), et, conséquemment une pareille fonction de ses coefficients; par conséquent l'intégrale $\int Z \partial z$ s'obtiendra toujours sous forme finie, par les règles ordinaires; d'où il résulte que la somme des valeurs de l'intégrale ψx , qui répondent aux m racines de l'équation (b.), s'obtiendra aussi sous forme finie, en fonction des coefficients des quatre polynômes $\phi_1 x, \phi_2 x, f_1 x, f_2 x$; ce qui est conforme au théorème d'Abel que l'on vient de citer. Dans cette somme, on devra ajouter ou retrancher les diverses valeurs de ψx , selon que les valeurs correspondantes z_1, z_2, \dots, z_m , de x , rendront positive ou négative la valeur de y , ou du rapport $\frac{f_1 x}{f_2 x}$.

On se borne ici à faire voir que la somme des m valeurs de ψx est toujours exprimable sous forme finie; la valeur de cette somme s'obtiendra, dans chaque cas, par le calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation, qui fera connoître la quantité Z , et ensuite par les règles de l'intégration des fractions rationnelles, qui donneront l'intégrale $\int Z \partial z$; mais Abel a donné l'expression générale de cette somme de valeurs, ainsi qu'on peut le voir dans son mémoire et dans le supplément de Legendre. Cette expression, pour être appliquée aux notations précédentes, suppose que l'on fasse

$$\phi_1 x \phi_2 x = \phi x, \quad X = \frac{f x}{(x - \alpha) \phi x};$$

ϕx et $f x$ étant des polynomes en x d'un degré quelconque, et α désignant une constante donnée.

IX.

Au lieu de mettre y^2 à la place de y dans l'équation (3.), ainsi qu'on l'a fait précédemment (§. 4.), on auroit pu remplacer y par la puissance quelconque m de cette variable, et il est évident qu'on seroit par-

venu à une équation (8.) dans laquelle l'intégrale ψx contiendrait la racine m au lieu de la racine carrée d'une fonction rationnelle de x . Plus généralement encore, on peut étendre l'équation (8.) à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, explicite ou implicite, et le raisonnement relatif à cette extension ne sera qu'une répétition de celui qu'on a exposé dans le quatrième paragraphe.

En effet, soient X un polynome en x et fx une fonction algébrique de cette variable; si nous faisons

$$y = fx, \quad \psi x = \int fx \partial X,$$

l'équation (2.) deviendra

$$(c.) \quad \int X \partial y + \psi x = yX + C.$$

Supposons que l'on fasse disparaître les radicaux et les dénominateurs dans l'équation $y = fx$, désignons par $R = 0$ l'équation qui en résultera, et soit n son degré par rapport à x . Ou en tirera n valeurs de x en fonctions de y ; nous les représenterons par y_1, y_2, \dots, y_n , et par Y, Y_2, \dots, Y_n , les valeurs correspondantes de X . En substituant successivement ces n valeurs de x dans l'équation précédente, et prenant la somme des résultats, nous aurons

$$\int (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) \partial y + \psi y_1 + \psi y_2 + \dots + \psi y_n = y(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) + \text{const.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\psi y_1 + \psi y_2 + \dots + \psi y_n = yY - \int Y \partial y + \text{const.},$$

en faisant, pour abréger,

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = Y.$$

Or, cette somme Y sera une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation $R = 0$; par conséquent, une semblable fonction de ses coefficients, et, conséquemment aussi, une fonction rationnelle de y . Donc l'intégrale $\int Y \partial y$ s'obtiendra toujours sous forme finie, par les règles ordinaires; donc aussi la somme des n valeurs de l'intégrale ψx , d'une fonction algébrique quelconque, qui répondent aux n valeurs de x tirées de l'équation $R = 0$, est toujours exprimable sous forme finie en fonction de y .

On parviendra à un second théorème distinct de cette proposition générale, en supposant, comme dans le paragraphe précédent, que la variable y soit liée à x et à une autre variable z , par l'équation

$$f_1 x = y f_2 x,$$

de ce paragraphe. Mettons, de plus, $\int X \partial x$ à la place de X dans ψx qui deviendra alors

$$\psi x = \int X f x \partial x;$$

et supposons que X soit actuellement une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de x , de sorte que l'on ait, comme dans ce même paragraphe,

$$\int X \partial x = P + A \log(x - \alpha) + B \log(x - \beta) + \text{etc.}$$

En y substituant cette valeur de $\int X \partial x$ au lieu de X , l'équation (c.) deviendra

$$\begin{aligned} \psi x + \int P \partial y + A \int \log(x - \alpha) \partial y + B \int \log(x - \beta) \partial y + \text{etc.} = \\ P y + y A \log(x - \alpha) + y B \log(x - \beta) + \text{etc.} + C. \end{aligned}$$

Par l'intégration par partie, pratiquée sur les intégrales $\int \log(x - \alpha) \partial y$, $\int \log(x - \beta) \partial y$, etc., on réduira cette équation à

$$\psi x = \int y X \partial x + C,$$

ou bien à

$$\psi x = \int \frac{X f_1 x}{f_2 x} \partial x + C,$$

en mettant pour y sa valeur $\frac{f_1 x}{f_2 x}$. Or, si l'on substitue aussi cette valeur de y dans l'équation $R = 0$, il en résultera une équation en x et z que je désignerai par $T = 0$, et je représenterai par $\partial x = X' \partial z$ sa différentielle par rapport à ces deux variables, dont X' sera une fonction rationnelle. En faisant, comme plus haut,

$$\frac{X X' f_1 x}{f_2 x} = Q,$$

cette quantité Q sera également une fonction rationnelle de x et z , et l'on aura

$$\psi x = \int Q \partial z + C.$$

Je désignerai par m le degré de l'équation $T = 0$ par rapport à x ; je représenterai par z_1, z_2, \dots, z_m , ses m racines, et par Q_1, Q_2, \dots, Q_m , les valeurs correspondantes de Q : en faisant toujours

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m = Z,$$

substituant successivement z_1, z_2, \dots, z_m , au lieu de z dans l'équation précédente, et prenant la somme des résultats, on aura

$$\psi z_1 + \psi z_2 + \dots + \psi z_m = \int Z \partial z + \text{const.}$$

Cela posé, on verra, comme précédemment, que l'intégrale $\int Z \partial z$ pourra toujours s'obtenir sous forme finie. Par conséquent, quelles que soient la fonction algébrique fx et la fonction rationnelle X de x , la somme des valeurs de l'intégrale ψx , ou $\int X fx \partial x$, qui répondent aux valeurs de x tirées de l'équation $f_1 x = f_2 x fx$, laquelle devient, $T = 0$ après qu'on a fait disparaître les radicaux et les dénominateurs; cette somme, disons-nous, sera toujours exprimable sous forme finie, en fonction de la variable z , dont les coefficients des polynomes $f_1 x$ et $f_2 x$ sont des fonctions rationnelles quelconques.
