STRUCTURES HYPERCOMPLEXES EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE-TEMPS RELATIVISTE

LAURENT BESSON (IDÉE INITIALE)
AIDE MATHÉMATIQUE : CHATGPT

1 Introduction

La relativité générale décrit la gravitation comme la manifestation géométrique de la courbure de l'espace-temps. Dans sa formulation standard, la géométrie est entièrement déterminée par la métrique $g_{\mu\nu}$ et par la connexion de Levi–Civita qui en dérive. Les trajectoires des particules libres sont alors décrites par les géodésiques associées à cette connexion.

Cependant, plusieurs extensions géométriques de la relativité générale ont été étudiées au cours du siècle dernier. Parmi celles-ci figurent les géométries de Weyl, qui introduisent une non-métricité associée à un champ de dilatation, ainsi que les théories d'Einstein–Cartan où la connexion affine possède une torsion couplée au spin de la matière. Ces approches partagent une idée commune : la structure affine de l'espace-temps pourrait être plus riche que celle décrite par la seule connexion de Levi–Civita.

Dans ce travail, nous explorons et j'insiste sur le coté exploratoire, une autre possibilité géométrique, fondée sur l'existence d'une structure interne hypercomplexe associée à chaque point de l'espace-temps. Plus précisément, nous considérons un espace total muni d'une fibre quaternionique $\mathbb{H}$, de sorte que la structure géométrique fondamentale est décrite sur un espace fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne l'espace-temps observable et $\mathbb{H}$ la fibre hypercomplexe interne.

Dans cette perspective, la géométrie observable ne constitue plus la structure fondamentale, mais apparaît comme la projection d'une géométrie définie sur l'espace total. La connexion affine effective de l'espace-temps peut alors être interprétée comme la projection d'une connexion plus générale agissant sur l'espace fibré hypercomplexe.

Une telle construction conduit naturellement à introduire une connexion étendue combinant plusieurs secteurs géométriques, notamment la connexion de spin relativiste, un champ conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne associée à la structure quaternionique.

Nous postulons la décomposition affine minimale suivante :

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H),$$

où les termes supplémentaires représentent respectivement les contributions conforme et hypercomplexe.

La décomposition

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H)$$

doit être comprise comme une décomposition tensorielle de la connexion effective relativement à la connexion de Levi–Civita. En revanche, la forme explicite de la contribution hypercomplexe

$$\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H) = \frac{\lambda}{2}\left(A^I_\mu \Sigma^{\rho}{}_{\nu I} + A^I_\nu \Sigma^{\rho}{}_{\mu I}\right)$$

n'est pas dérivée ici à partir d'une géométrie fondamentale complète, mais introduite comme l'ansatz local minimal compatible avec la symétrie en μ, ν et avec l'existence d'un couplage entre la connexion quaternionique interne et la structure tangentielle de l'espace-temps.

Dans ce cadre, la structure quaternionique interne ne se comporte pas simplement comme un champ de jauge supplémentaire, mais peut également modifier la structure affine de l'espace-temps observable. Les trajectoires géodésiques et la courbure effective peuvent alors recevoir des contributions provenant de la dynamique de la fibre hypercomplexe.

L'objectif de cet article est d'explorer cette possibilité dans un cadre géométrique minimal et de clarifier les implications physiques d'une telle structure. Nous introduisons pour cela une ansatz affine simple reliant la connexion interne quaternionique à la connexion effective de l'espace-temps, et discutons les conséquences géométriques et physiques qui en découlent.

Ce travail se situe dans une perspective exploratoire à l'interface entre géométrie différentielle et physique gravitationnelle. Il vise principalement à mettre en évidence la cohérence géométrique d'une telle extension hypercomplexe et à identifier les directions possibles pour des développements ultérieurs.

2 Algèbre quaternionique et interprétation géométrique

L'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ fournit un cadre naturel pour décrire des structures rotationnelles tridimensionnelles ainsi que des degrés de liberté internes associés au groupe $SU(2)$. Un quaternion est défini par

$$q = a + b\,i + c\,j + d\,k,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et où les unités imaginaires satisfont les règles de multiplication

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

L'algèbre quaternionique est associative mais non commutative. En particulier

$$ij = k, \qquad jk = i, \qquad ki = j,$$

tandis que

$$ji = -k.$$

Tout quaternion peut être décomposé en une partie réelle et une partie imaginaire vectorielle,

$$q = \mathrm{Re}(q) + \vec{q},$$

avec

$$\vec{q} = (b, c, d).$$

Les composantes imaginaires (i, j, k) engendrent ainsi un espace interne tridimensionnel. Cette observation établit une correspondance naturelle entre les directions imaginaires des quaternions et les générateurs des rotations tridimensionnelles.

Un sous-ensemble important de l'algèbre quaternionique est constitué par les quaternions unitaires satisfaisant

$$|q| = 1.$$

Ces éléments forment un groupe isomorphe à $SU(2)$,

$$SU(2) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$$

Cette relation joue un rôle central dans de nombreux domaines de la physique mathématique, car $SU(2)$ est le double revêtement du groupe des rotations $SO(3)$ et apparaît naturellement dans la description du spin et de certaines symétries internes.

Dans le cadre géométrique considéré ici, l'algèbre des quaternions fournit la fibre interne associée à chaque point de la variété d'espace-temps. Les directions imaginaires (i, j, k) peuvent alors être interprétées comme des directions internes attachées à l'espace-temps, tandis que le sous-groupe des quaternions unitaires décrit des transformations rotationnelles internes.

Cette interprétation motive l'introduction d'une structure de fibré quaternionique

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne la variété d'espace-temps observable et $\mathbb{H}$ la fibre hypercomplexe interne.

Dans un tel cadre, la structure quaternionique interne peut influencer la géométrie effective de l'espace-temps par l'intermédiaire d'une connexion généralisée définie sur le fibré total.

3 Structure fibrée hypercomplexe

L'algèbre quaternionique introduite dans la section précédente suggère naturellement une interprétation géométrique en termes de structure fibrée. Dans ce cadre, l'espace-temps est décrit par une variété de base M_4, tandis que chaque point de cette variété est muni d'une structure interne hypercomplexe représentée par une fibre quaternionique.

L'espace géométrique total est donc décrit par un fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne la variété d'espace-temps observable et $\mathbb{H}$ la fibre hypercomplexe interne.

Un point de l'espace total peut ainsi être représenté par

$$(x^\mu, q),$$

où x^μ sont les coordonnées d'espace-temps et $q \in \mathbb{H}$ est un quaternion décrivant la configuration interne.

Dans ce cadre, l'espace-temps observable correspond à la projection

$$\Pi_{\text{obs}} : (x^\mu, q) \to x^\mu.$$

La structure hypercomplexe interne n'est donc pas directement observable, mais elle peut influencer la géométrie effective de l'espace-temps par l'intermédiaire de la connexion définie sur le fibré total.

Afin de décrire le transport parallèle dans l'espace total, nous introduisons une connexion généralisée

$$\mathcal{D}_\mu.$$

Cette connexion contient plusieurs contributions géométriques associées aux différentes structures de symétrie présentes dans la théorie. Dans la construction minimale considérée ici, elle peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu.$$

Le premier terme ω_μ correspond à la connexion de spin relativiste associée à la symétrie de Lorentz locale $Spin(1,3)$.

Le champ W_μ représente une contribution conforme de type Weyl associée aux transformations locales d'échelle.

Enfin, A_μ désigne la connexion interne quaternionique agissant sur la fibre hypercomplexe. Ses composantes peuvent s'écrire

$$A_\mu = A_\mu^I T_I,$$

où T_I sont les générateurs associés aux directions imaginaires quaternioniques (i, j, k).

La connexion $\mathcal{D}_\mu$ décrit ainsi le transport parallèle sur le fibré hypercomplexe total, combinant la structure géométrique de l'espace-temps et les degrés de liberté internes.

Dans la section suivante, nous montrons comment la connexion affine effective de l'espace-temps peut être obtenue à partir de cette connexion étendue par projection sur la variété observable.

4 Projection vers la connexion affine observable

La connexion définie sur le fibré introduite dans la section précédente agit sur l'espace hypercomplexe total $E = M_4 \times \mathbb{H}$. Afin de retrouver une géométrie effective d'espace-temps, il est nécessaire de préciser comment cette connexion étendue se projette sur la variété observable M_4.

L'hypothèse centrale explorée dans ce travail est que la structure affine perçue dans l'espace-temps n'est pas purement primitive, mais peut être interprétée comme la projection d'une connexion plus riche définie sur le fibré hypercomplexe total. Dans cette perspective, la géométrie observable de l'espace-temps apparaît comme un secteur effectif d'une structure géométrique plus vaste.

Nous postulons ainsi que la connexion affine effective de l'espace-temps prend la forme

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H),$$

où $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(g)$ est la connexion de Levi–Civita associée à la métrique observable $g_{\mu\nu}$, $\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(W)$ représente une correction de type Weyl, et $\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H)$ correspond à la contribution induite par le secteur interne hypercomplexe.

La correction hypercomplexe est supposée provenir de la connexion définie sur la fibre quaternionique à travers un mécanisme local de projection base–fibre. Au niveau minimal, nous introduisons l'ansatz suivant :

$$\Delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}(H) = \frac{\lambda}{2}\left(A^I_\mu \Sigma^{\rho}{}_{\nu I} + A^I_\nu \Sigma^{\rho}{}_{\mu I}\right),$$

où A^I_μ sont les composantes de la connexion quaternionique, $\Sigma^{\rho}{}_{\nu I}$ est un tenseur décrivant la projection locale des directions quaternioniques internes vers l'espace-temps, et λ est une constante de couplage géométrique.

Cette expression doit être comprise comme un ansatz effectif minimal. Son objectif n'est pas de fournir une théorie fondamentale complète, mais de capturer la possibilité que la structure interne hypercomplexe modifie directement la géométrie affine, et pas uniquement via une contribution au tenseur énergie–impulsion.

D'un point de vue géométrique, cette construction peut être interprétée comme la projection sur l'espace-temps d'une connexion définie sur le fibré total $M_4 \times \mathbb{H}$. Le tenseur $\Sigma^{\rho}{}_{\nu I}$ joue alors le rôle d'un objet de soudure local reliant la fibre quaternionique interne au fibré tangent de l'espace-temps.

Une fois la connexion affine effective modifiée, l'équation des géodésiques devient

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Cela implique que la structure hypercomplexe interne peut influencer le mouvement des particules tests même dans des régions où la matière ordinaire est peu présente. Dans ce sens, le secteur quaternionique contribue non seulement au contenu effectif en énergie–impulsion, mais également à la définition même du transport parallèle dans l'espace-temps.

Un tel mécanisme est particulièrement intéressant dans des situations où le champ gravitationnel observé semble plus important que ce que la matière visible seule permettrait d'expliquer. Dans ces régimes, la modification hypercomplexe de la structure affine pourrait fournir une contribution géométrique effective à la dynamique observée.

Le cadre présenté ici reste volontairement minimal. Une formulation plus complète nécessiterait de dériver le tenseur de projection $\Sigma^{\rho}{}_{\nu I}$ à partir d'une géométrie de fibré pleinement spécifiée et de clarifier sa relation avec les tétrades, des triades internes, ou plus généralement avec des structures de soudure de type Cartan.

$$E = M_4 \times \mathbb{H}$$
Espace total hypercomplexe

$$\downarrow$$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu$$
Connexion étendue

$$\downarrow$$

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(H)$$
Connexion affine effective

$$\downarrow$$

$$\ddot{x}^\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\mathrm{eff}}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$
Géodésiques modifiées

Figure 4.1. Chaîne conceptuelle de la relativité générale hypercomplexe. La géométrie observable est obtenue comme projection de la structure définie sur le fibré hypercomplexe $E = M_4 \times \mathbb{H}$.

5 Géodésiques et implications physiques

La modification de la connexion affine discutée dans la section précédente affecte directement la structure géodésique de l'espace-temps. Puisque le mouvement des particules en chute libre est gouverné par la connexion affine, toute correction apportée à celle-ci peut conduire à des effets observables.

En utilisant la connexion effective introduite précédemment, l'équation des géodésiques prend la forme

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\text{eff}}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

En substituant la décomposition

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu,\text{eff}} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(H),$$

on obtient

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(g)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(W)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(H)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0.$$

Le premier terme correspond au mouvement géodésique habituel en relativité générale. Les termes supplémentaires représentent les déviations induites par les secteurs Weyl et hypercomplexe.

La contribution hypercomplexe

$$\Delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(H) = \frac{\lambda}{2}\left(A^I_\mu\Sigma^\rho{}_{\nu I} + A^I_\nu\Sigma^\rho{}_{\mu I}\right)$$

introduit dans l'équation des géodésiques un terme analogue à une force effective, dont l'intensité dépend de la connexion quaternionique interne A^I_μ et du tenseur de projection $\Sigma^\rho{}_{\nu I}$.

Du point de vue physique, ce terme peut modifier les trajectoires des particules même dans des régions où le tenseur énergie–impulsion ordinaire est faible. Autrement dit, la structure interne hypercomplexe peut contribuer directement à la dynamique gravitationnelle effective.

Un tel mécanisme pourrait potentiellement générer des effets gravitationnels supplémentaires sans nécessiter une grande quantité de matière visible. Dans cette perspective, la modification hypercomplexe de la structure affine peut agir comme une contribution géométrique additionnelle au champ gravitationnel observé.

Il est important de souligner que le cadre présenté ici demeure exploratoire. L'ansatz introduit doit être considéré comme une description effective minimale permettant de capturer la possibilité que des degrés de liberté quaternioniques internes influencent la connexion d'espace-temps.

Un traitement plus complet nécessiterait de dériver le tenseur de projection interne et la dynamique de la connexion quaternionique à partir d'une action géométrique définie sur le fibré hypercomplexe complet.

5.1 Motivation pour une structure interne quaternionique. Le choix d'une fibre interne quaternionique est fortement motivé par la structure algébrique sous-jacente aux rotations tridimensionnelles et à leurs extensions spinorielles.

Le groupe des rotations spatiales est décrit par le groupe de Lie $SO(3)$, dont l'algèbre de Lie est engendrée par trois générateurs J_i satisfaisant

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}{}^k J_k.$$

Cependant, le groupe de symétrie agissant correctement sur les degrés de liberté spinoriels n'est pas directement $SO(3)$, mais son groupe de revêtement double $Spin(3)$, qui est isomorphe à $SU(2)$,

$$Spin(3) \simeq SU(2).$$

Une observation importante est que le groupe des quaternions unitaires forme lui aussi un groupe isomorphe à $SU(2)$,

$$SU(2) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$$

Les unités imaginaires quaternioniques

$$(i, j, k)$$

fournissent ainsi une base naturelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, qui gouverne la structure infinitésimale des rotations tridimensionnelles et leur relèvement spinoriel.

Du point de vue géométrique, le sous-espace imaginaire de l'algèbre quaternionique

$$\mathrm{Im}(\mathbb{H}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$$

constitue un espace vectoriel interne tridimensionnel naturellement associé aux générateurs des rotations.

Ces observations motivent l'utilisation de l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ comme structure géométrique interne attachée à chaque point de l'espace-temps. Dans ce cadre, les directions imaginaires quaternioniques peuvent être interprétées comme des degrés de liberté rotationnels internes, tandis que le sous-groupe des quaternions unitaires reproduit la symétrie spinorielle $SU(2)$.

Cela fournit ainsi un fondement algébrique naturel pour l'introduction d'une structure fibrée quaternionique dans certaines extensions géométriques de l'espace-temps.

6 Structure algébrique étendue : $Cl(1,3) \otimes \mathbb{H}$

L'introduction d'une fibre interne quaternionique peut être motivée non seulement par la structure des rotations tridimensionnelles et du groupe $SU(2)$, mais également par la forme algébrique même du secteur spinoriel relativiste.

En relativité locale, la structure algébrique naturelle associée à l'espace-temps de Minkowski est l'algèbre de Clifford $Cl(1,3)$, engendrée par des éléments γ_μ satisfaisant

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}.$$

Cette algèbre encode la structure métrique locale, les générateurs du groupe de Lorentz, ainsi que la description des champs spinoriels relativistes.

D'un autre côté, comme discuté précédemment, l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$ fournit une réalisation naturelle des degrés de liberté rotationnels internes, à travers l'identification du sous-espace imaginaire $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ avec une structure de type $\mathfrak{su}(2)$.

Ces deux structures suggèrent d'introduire une algèbre étendue de la forme

$$\mathcal{A}_{\text{ext}} = Cl(1,3) \otimes \mathbb{H},$$

dans laquelle la partie de Clifford décrit le secteur relativiste observable, tandis que le facteur quaternionique décrit une structure interne hypercomplexe attachée à chaque point de l'espace-temps.

Un élément générique de cette algèbre étendue peut alors s'écrire schématiquement comme

$$X = a\,\mathbf{1} + b^\mu \gamma_\mu + \frac{1}{2} c^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + d^I T_I + e^{\mu I} \gamma_\mu \otimes T_I + \cdots,$$

où T_I désignent les générateurs associés aux directions imaginaires quaternioniques (i, j, k).

Cette écriture montre que l'algèbre étendue contient à la fois :

— la structure vectorielle et spinorielle relativiste,

— les générateurs internes de type quaternionique,

— ainsi que des secteurs mixtes couplant structure d'espace-temps et directions internes.

D'un point de vue conceptuel, cela suggère que la géométrie observable pourrait correspondre à une projection effective d'une structure algébrique plus riche, dans laquelle les degrés de liberté d'espace-temps et les degrés de liberté internes ne sont pas strictement séparés au niveau fondamental.

Dans cette perspective, la connexion totale introduite précédemment,

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu,$$

peut être vue comme une connexion prenant ses valeurs dans une algèbre étendue compatible avec cette structure $Cl(1,3) \otimes \mathbb{H}$. Le secteur ω_μ agit alors sur la composante relativiste spinorielle, tandis que A_μ agit sur la composante interne quaternionique. Les éventuels termes mixtes peuvent, dans une formulation plus complète, être responsables du mécanisme de projection reliant la fibre hypercomplexe à la connexion affine effective de l'espace-temps.

Une telle structure ne constitue pas encore une théorie fermée. Elle fournit cependant un cadre algébrique naturel dans lequel la géométrie hypercomplexe explorée dans ce travail peut être formulée de manière cohérente. Dans ce cadre, la partie observable réelle ou complexe de la géométrie peut être interprétée comme un secteur effectif issu d'une structure plus fondamentale de type hypercomplexe.

Cette observation renforce l'idée que l'extension quaternionique n'est pas un ajout arbitraire à la géométrie relativiste, mais peut au contraire s'inscrire dans une structure algébrique unifiée associant spin, géométrie locale et degrés de liberté internes.

7 Action géométrique minimale

Afin de donner une base dynamique à la structure géométrique introduite précédemment, il est naturel de se demander si la connexion étendue

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu$$

peut être associée à une action géométrique effective.

Dans la relativité générale standard, la dynamique de la géométrie est gouvernée par l'action d'Einstein–Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, R,$$

où R est le scalaire de courbure construit à partir de la connexion de Levi–Civita.

Dans le cadre hypercomplexe considéré ici, la connexion totale contient également une contribution interne quaternionique A_μ ainsi qu'un secteur conforme de type Weyl W_μ. Il est donc naturel d'introduire une action effective de la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \alpha F^I_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_I + \beta W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \right),$$

où :

$$F^I_{\mu\nu} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu + \epsilon^{IJK} A^J_\mu A^K_\nu$$

est la courbure associée à la connexion quaternionique interne, tandis que

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

représente le champ de courbure associé au secteur conforme.

Les constantes α et β sont des paramètres de couplage déterminant l'intensité relative des contributions hypercomplexes et conformes.

Dans ce cadre, la dynamique du système résulte de la variation de l'action totale par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, au champ quaternionique A^I_μ et au champ conforme W_μ.

L'action proposée doit être comprise comme une description effective minimale compatible avec la structure géométrique introduite dans les sections précédentes. Une formulation plus complète pourrait nécessiter l'introduction de termes supplémentaires reliant explicitement la connexion interne quaternionique à la structure affine effective de l'espace-temps.

8 Discussion

Le cadre présenté dans ce travail explore la possibilité que la structure affine observée de l'espace-temps soit la projection effective d'une géométrie plus riche définie sur un fibré hypercomplexe.

Dans cette approche, chaque point de l'espace-temps est associé à une fibre interne quaternionique $\mathbb{H}$, et la connexion totale contient à la fois les contributions relativistes habituelles, une composante conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne quaternionique.

La projection de cette structure sur l'espace-temps observable conduit à une modification effective de la connexion affine, introduisant un terme supplémentaire dépendant de la connexion interne. Cette correction peut modifier les trajectoires géodésiques et la dynamique gravitationnelle effective.

Il est important de souligner que la construction présentée ici doit être considérée comme un cadre géométrique minimal. Le tenseur de projection $\Sigma^{\rho}{}_{\nu I}$ introduit dans l'ansatz affine n'a pas été dérivé à partir d'une géométrie de fibré complète, mais représente une paramétrisation effective du couplage entre les directions internes quaternioniques et la structure tangentielle de l'espace-temps.

Plusieurs directions de développement peuvent être envisagées.

Tout d'abord, une description plus fondamentale de la géométrie du fibré hypercomplexe permettrait de dériver explicitement le tenseur de projection ainsi que les relations de compatibilité entre la connexion interne et la géométrie d'espace-temps.

Ensuite, l'action géométrique minimale proposée pourrait être étendue afin d'inclure des termes de couplage direct entre les secteurs quaternionique et gravitationnel. Une telle extension pourrait conduire à des équations de champ modifiées et à de nouvelles solutions gravitationnelles.

Enfin, il serait intéressant d'explorer les conséquences phénoménologiques de cette structure, en particulier dans des régimes où la gravitation effective semble plus forte que ce que la matière visible permet d'expliquer. Dans de tels cas, la contribution géométrique issue de la structure hypercomplexe pourrait jouer un rôle analogue à celui d'une composante gravitationnelle effective supplémentaire.

9 Conclusion

Dans cet article, nous avons exploré une extension géométrique de la relativité générale fondée sur l'introduction d'une structure interne hypercomplexe associée à chaque point de l'espace-temps.

Cette construction repose sur l'idée que la géométrie observable pourrait être interprétée comme la projection d'une structure définie sur un espace fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H}.$$

Dans ce cadre, la connexion totale combine la connexion de spin relativiste, une contribution conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne quaternionique. La projection de cette connexion sur l'espace-temps conduit à une connexion affine effective modifiée, susceptible d'influencer directement les trajectoires géodésiques.

Nous avons montré qu'un ansatz minimal permet de relier la connexion interne quaternionique à la connexion affine effective, introduisant ainsi une contribution géométrique supplémentaire à la dynamique gravitationnelle.

La structure algébrique sous-jacente suggère également l'existence d'un cadre plus général basé sur l'algèbre étendue

$$Cl(1,3) \otimes \mathbb{H},$$

dans laquelle la géométrie relativiste locale et la structure quaternionique interne coexistent au niveau fondamental.

Bien que le modèle présenté reste exploratoire, il met en évidence la cohérence géométrique d'une extension hypercomplexe de la gravitation et ouvre plusieurs directions de recherche concernant la dynamique des connexions internes, la structure complète du fibré hypercomplexe, et les conséquences physiques d'une telle géométrie.

Ces résultats suggèrent que les structures hypercomplexes pourraient fournir un cadre naturel pour étendre la description géométrique de la gravitation au-delà du formalisme classique de la relativité générale.