

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLEXE – RÉÉCRITURE SYMPLECTIQUE COMPLÈTE

LAURENT BESSON (IDÉE INITIALE)
RÉÉCRITURE SYMPLECTIQUE : CHATGPT

RÉSUMÉ. Ce document est une *réécriture intégrale* du manuscrit “Relativité générale hyper-complexe” dans un cadre *fondamentalement symplectique*. Au lieu de poser la métrique comme variable primitive et de “quaternioniser” directement les coordonnées, on reformule l’ensemble des ingrédients (coordonnées, dérivées, transport, courbures, lagrangiens, équations de champ) en termes d’une variété fibrée $\mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F}$ munie d’une 2-forme symplectique globale Ω , d’une structure hypercomplexe interne dynamique (I, J, K) , et d’une connexion de Weyl (jauge d’échelle) ϕ . La métrique devient une structure émergente via une compatibilité presque-Kähler (au sens de Weyl).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	4
2. Définition	4
2.1. Définition de l’espace-temps fibré	4
2.2. Définition de la structure symplectique	4
2.3. Définition des quaternions (rappel interne)	5
2.4. Notation d’Einstein	5
3. Postulat	5
1er postulat (équivalence)	5
2e postulat (hypercomplexité interne)	5
3e postulat (Weyl)	5
4. Notations diverses (dérivées covariantes, commutateurs, etc.)	5
4.1. Dérivée covariante et séparation base/fibre	5
4.2. Structure hypercomplexe comme champ	5
4.3. Commutateur de dérivées	5
5. Tenseurs	6
5.1. Transport d’un vecteur fibré	6
5.2. Calcul détaillé du double-transport (analogue au manuscrit historique)	6
5.3. Courbure : décomposition en quatre blocs	7
5.4. Interprétation symplectique : la forme de courbure	7
6. Lagrangiens Possibles pour RGH	7
6.1. Terme gravitationnel (émergent)	7
6.2. Lagrangien du champ de Weyl	8
6.3. Lagrangien du champ hypercomplexe interne	8
6.4. Termes de couplage	8
6.5. Action totale	8
7. Dérivation des équations de Champ à partir du Lagrangien	8

7.1. Variations explicites des champs fondamentaux	8
7.2. Équations pour le champ de Weyl	9
7.3. Équations pour le champ interne	9
7.4. Équations gravitationnelles effectives	9
8. Stabilité du Lagrangien et théorème d'Ostrogradsky	10
8.1. Pourquoi la formulation symplectique aide	10
8.2. Remarque sur la compatibilité Weyl	10
Annexe : sur la figure de transport (TikZ)	10
9. Cosmologie FLRW dans la reformulation symplectique	11
9.1. Métrique émergente : rappel minimal	11
9.2. Ansatz FLRW explicite pour A et pour Ω (pas d'ambiguïté d'isotropie)	11
9.3. Condition de rebond (solution type)	12
9.4. Identification explicite de α et β à partir de l'action (réduction FLRW)	12
9.5. Pression effective et équation d'état w_{eff} près du rebond	14
9.6. Estimation d'ordres de grandeur et falsifiabilité	14
10. Perspectives de quantification	16
Annexe A. Dictionnaire entre la formulation RGH historique et la reformulation symplectique	16
Quantification	18
Annexe B. Quantification canonique du secteur interne RGH	18
B.1. Action interne	18
B.2. Décomposition 3+1	18
B.3. Hamiltonien	18
B.4. Quantification	18
Annexe C. Construction d'un observable interne X et promotion quantique	19
C.1. Invariants de jauge et décomposition 3+1	19
C.2. Définition de l'observable interne X	19
C.3. Promotion quantique	19
C.4. Seuil effectif Weyl	19
Annexe D. Prescription d'ordre et approximation semi-classique de $\langle \hat{X}^2 \rangle$	20
D.1. Prescription d'ordre (choix minimal)	20
D.2. Approximation semi-classique	21
D.3. Seuil effectif et interprétation statistique	21
Annexe E. Galaxies dominées par matière noire et halos hypercomplexes dans la RGH	22
E.1. Contexte observationnel	22
E.2. Interprétation standard dans le modèle Λ CDM	22
E.3. Limites conceptuelles	23
E.4. Cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe	23
E.5. Hypothèse : halos hypercomplexes	23
E.6. Structure possible	23
E.7. Défaut de couplage baryonique	23
E.8. Domaines topologiques	24
E.9. Prédiction observationnelles	24
E.10. Intérêt pour la RGH	24
E.11. Analogie conceptuelle	24
Annexe F. Flux baryonique galactique et éjection par feedback stellaire	25
F.1. Motivation	25
F.2. Énergie de liaison gravitationnelle	25

F.3.	Vitesse d'éjection	25
F.4.	Milieu circumgalactique	26
F.5.	Éjection dans le milieu intergalactique	26
F.6.	Flux baryonique	26
F.7.	Limites de l'expulsion	26
F.8.	Interprétation possible dans la RGH	27
F.9.	Conséquences observationnelles	27
Annexe G.	Halos hypercomplexes et courbes de rotation galactiques	28
G.1.	Motivation	28
G.2.	Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique	28
G.3.	Masse effective intérieure	28
G.4.	Courbe de rotation	28
G.5.	Interprétation RGH	29
G.6.	Origine possible du profil en $1/r^2$	29
G.7.	Modèle minimal effectif	29
G.8.	Conséquences observationnelles	30
G.9.	Conclusion	30
G.10.	Définition minimale du modèle RGHCl _i	31
Annexe H.	Annexe — Esquisse d'une extension hypercomplexe Clifford–quaternionique (RGHCl _i)	32
H.1.	Motivation	32
H.2.	Structure algébrique étendue	32
H.3.	Variété de base et fibre interne	32
H.4.	Principe de projection observable	32
H.5.	Connexion totale étendue	33
H.6.	Courbure totale	33
H.7.	Action effective minimale	33
H.8.	Équations de champ effectives	34
H.9.	Interprétation physique	34
H.10.	Position méthodologique	34
H.11.	Résumé	34
H.12.	Ansatz affine minimale du secteur hypercomplexe	35
Annexe I.	Annexe — Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurelle avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou	36
I.1.	Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurelle avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou	36
Références		38

1 INTRODUCTION

La relativité générale (RG) décrit la gravitation comme une géométrie de l'espace-temps. La théorie quantique, elle, s'exprime naturellement en termes d'espaces d'états et d'opérateurs non commutatifs. Une intuition ancienne (Hamilton, Pauli, Weyl, Cartan, etc.) est que la *non-commutativité* et/ou les *degrés internes* peuvent être encodés géométriquement.

Le manuscrit historique RGH adoptait l'approche la plus directe : rendre *hypercomplexes* les coordonnées du quadri-vecteur et suivre les conséquences sur les symboles de connexion et la courbure, en y réintroduisant une jauge d'échelle à la Weyl. La présente version conserve l'esprit (hypercomplexité + Weyl + nouveaux tenseurs), mais *change le choix des primitives* :

- la structure première n'est plus la métrique mais une *forme symplectique* Ω (structure de phase) ;
- l'hypercomplexité n'est plus une “coordonnée quaternionique” posée à la main, mais une *fibre interne* $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$ portant un triplet (I, J, K) ;
- la jauge d'échelle de Weyl est un champ ϕ relié à la compatibilité *conforme* entre Ω et la métrique émergente.

Cette réécriture “en symplectique” est particulièrement adaptée à : (i) une lecture hamiltonienne/ADM, (ii) la quantification canonique, (iii) une interprétation unifiée des termes additionnels du transport (anciens $H_{\mu i}^j$ et $\Phi_{\mu j}^i$) comme connexions sur la fibre interne.

2 DÉFINITION

2.1 Définition de l'espace-temps fibré. On considère une variété totale

$$(2.1) \quad \mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F},$$

où M^4 est l'espace-temps (variété différentielle orientée de dimension 4) et \mathcal{F} une fibre interne de dimension réelle 4 localement isomorphe aux quaternions \mathbb{H} . Un point est noté (x^μ, q^a) avec x^μ coordonnées sur M^4 et q^a coordonnées internes sur \mathcal{F} .

2.2 Définition de la structure symplectique. La donnée fondamentale est une 2-forme symplectique globale

$$(2.2) \quad \Omega \in \Omega^2(\mathcal{M}), \quad d\Omega = 0, \quad \Omega \text{ non dégénérée.}$$

On admet une décomposition naturelle en parties “espace-temps”, “interne” et “mixte” :

$$(2.3) \quad \Omega = \Omega_{\text{ext}} + \Omega_{\text{int}} + \Omega_{\text{mix}}.$$

Typiquement,

$$(2.4) \quad \Omega_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

$$(2.5) \quad \Omega_{\text{int}} = \sum_{a=1}^3 \omega^a(x) \sigma_a,$$

$$(2.6) \quad \Omega_{\text{mix}} = A^a{}_\mu(x) dx^\mu \wedge \sigma_a,$$

où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est un triplet de 2-formes sur \mathcal{F} et $A^a{}_\mu$ encode le couplage “base-fibre” qui jouait historiquement le rôle des nouveaux tenseurs du transport.

2.3 Définition des quaternions (rappel interne). La fibre \mathcal{F} est localement modélisée par $\mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(1, h_1, h_2, h_3)$ avec

$$(2.7) \quad h_1 h_2 h_3 = -1, \quad h_i^2 = -1 \ (i \neq 0),$$

et la non-commutativité est encodée par un commutateur

$$(2.8) \quad [h_i, h_j] \equiv h_i h_j - h_j h_i = 2 \varepsilon_{ij}^{\ \ k} h_k.$$

Dans la formulation symplectique, cette non-commutativité ne vit pas dans les coordonnées x^μ mais dans la géométrie interne (et donc dans les connexions sur la fibre).

2.4 Notation d'Einstein. Nous utilisons la convention de sommation d'Einstein sur indices répétés (hauts/bas) lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

3 POSTULAT

1er postulat (équivalence). Le principe d'équivalence reste vrai : localement, au premier ordre, on peut choisir un repère où l'inertie et la gravitation se confondent.

2e postulat (hypercomplexité interne). Les degrés de liberté “hypercomplexes” sont portés par une fibre interne $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$ et interagissent avec M^4 via la partie mixte Ω_{mix} de la structure symplectique. La non-commutativité est donc géométrisée par une connexion interne.

3e postulat (Weyl). La comparaison des longueurs est définie à une jauge d'échelle près : il existe une 1-forme de Weyl ϕ telle que

$$(3.1) \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \phi_\lambda g_{\mu\nu},$$

où g est la métrique *émergente* (définie plus loin) et ∇ une connexion affine.

4 NOTATIONS DIVERSES (DÉRIVÉES COVARIANTES, COMMUTATEURS, ETC.)

4.1 Dérivée covariante et séparation base/fibre. Au lieu d'écrire $\partial/\partial(x^{\mu i} h_i)$ comme dans la version historique, on introduit une connexion sur la fibration $\mathcal{M} \rightarrow M^4$. On note ∇_μ la dérivée covariante le long de ∂_μ (base) et ∇_a celle le long de la fibre. Schématiquement, toute variation infinitésimale se décompose en

$$(4.1) \quad d = d_{\text{ext}} + d_{\text{int}},$$

et les “coefficients” $H_{\mu i}^{\ \ j}$ du texte historique sont réinterprétés comme coefficients de connexion interne :

$$(4.2) \quad \nabla_\mu h_i = H_{\mu i}^{\ \ j} h_j.$$

4.2 Structure hypercomplexe comme champ. On autorise (I, J, K) à dépendre de x :

$$(4.3) \quad \nabla_\mu I = \mathcal{A}_\mu \cdot I, \quad \nabla_\mu J = \mathcal{A}_\mu \cdot J, \quad \nabla_\mu K = \mathcal{A}_\mu \cdot K,$$

où \mathcal{A}_μ est une connexion interne (généralisant A_μ^a).

4.3 Commutateur de dérivées. Le cœur de la construction reste l'opérateur

$$(4.4) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu],$$

qui produit une courbure effective composée d'une part riemannienne (base), et d'une part interne (fibre), plus des termes de couplage.

5 TENSEURS

L'objectif de cette section est de re-définir courbure et transport en termes symplectiques, tout en retrouvant la structure “somme de contributions” du manuscrit historique : Riemann/Ricci + Weyl/EM + champ interne + couplages croisés.

5.1 Transport d'un vecteur fibré.

5.2 Calcul détaillé du double-transport (analogue au manuscrit historique). Pour garder une correspondance *pas à pas* avec le document source, on explicite ici le calcul de $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)X$ sur un champ fibré.

On part d'un champ de type

$$(5.1) \quad X = x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha,$$

où x^α sont des composantes sur la base, u_i une base interne, et ψ^i des coefficients internes (qui, dans l'écriture historique, étaient notés φ^i).

La dérivée covariante le long de ∂_μ s'écrit

$$(5.2) \quad \nabla_\mu X = \partial_\mu (x^\alpha \psi^i) u_i e_\alpha + x^\alpha \psi^i \nabla_\mu (u_i) e_\alpha + x^\alpha \psi^i u_i \nabla_\mu (e_\alpha)$$

$$(5.3) \quad = \partial_\mu x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \partial_\mu \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \psi^i H_{\mu i}^j u_j e_\alpha + x^\alpha \psi^i u_i \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta.$$

Comme dans le manuscrit d'origine, il est commode de regrouper les termes de connexion dans une quantité effective

$$(5.4) \quad \gamma_\mu \equiv \Phi_{\mu j}^i \psi^j u_i + \psi^i H_{\mu i}^j u_j + \psi^i u_i \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha,$$

où l'objet $\Phi_{\mu j}^i$ est interprété ici comme connexion de Weyl et/ou connexion d'échelle sur le secteur interne (ce qui correspond à la lecture “Weyl/EM” de la version historique).

On obtient alors la forme compacte :

$$(5.5) \quad \nabla_\mu X = \partial_\mu x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \gamma_\mu e_\alpha.$$

En réappliquant ∇_ν puis en antisymétrisant, on isole les termes d'ordre connexion :

$$(5.6) \quad (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)X = x^\alpha \left(\partial_\mu \gamma_\nu - \partial_\nu \gamma_\mu + [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) e_\alpha + (\text{termes de base sur } x^\alpha).$$

Le commutateur $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ contient :

- le commutateur des connexions internes, responsable de la courbure quaternionique (analogue au tenseur T),
- le commutateur des connexions d'échelle (analogue au tenseur F),
- des mélanges avec Γ donnant les couplages croisés (analogue au bloc C).

En particulier, en séparant explicitement les contributions, on retrouve une écriture du type :

$$(5.7) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho X^\sigma e_\rho + \left(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu + [\Phi_\mu, \Phi_\nu] \right) \cdot X + \left(\partial_\mu H_\nu - \partial_\nu H_\mu + [H_\mu, H_\nu] \right) \cdot X + C_{\mu\nu} \cdot X,$$

qui est la traduction symplectique directe de la décomposition finale du manuscrit source (tenseur riemannien + “Weyl/EM” + “champ quaternionique” + couplages).

Soit une section (champ) X du fibré tangent total $T\mathcal{M}$. Dans une base adaptée, on peut écrire symboliquement

$$(5.8) \quad X = X^\alpha e_\alpha + X^i u_i,$$

où e_α est une base sur M^4 et u_i une base interne sur \mathcal{F} (liée aux h_i). Le transport parallèle est défini par une connexion totale ∇ telle que

$$(5.9) \quad \nabla_\mu e_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta, \quad \nabla_\mu u_i = H_{\mu i}^j u_j, \quad \nabla_\mu (\text{échelle}) = \Phi_\mu (\text{échelle}),$$

où l'objet Φ joue le rôle de connexion de Weyl (jauge d'échelle) dans l'écriture historique.

5.3 Courbure : décomposition en quatre blocs. On définit la courbure totale par

$$(5.10) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = \mathcal{R}_{\mu\nu} X.$$

Dans une base adaptée, on peut la décomposer en contributions :

$$(5.11) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho X^\sigma e_\rho + F_{\mu\nu} \cdot X + T_{\mu\nu} \cdot X + C_{\mu\nu} \cdot X.$$

5.3.1 Bloc riemannien (Einstein/Riemann standard).

$$(5.12) \quad R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}{}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda.$$

Sa contraction donne le tenseur de Ricci puis le tenseur d'Einstein usuel.

5.3.2 Bloc Weyl (jauge d'échelle). La connexion de Weyl est portée par une 1-forme $\phi = \phi_\mu dx^\mu$. Son “champ” est la 2-forme

$$(5.13) \quad F^{(\phi)} = d\phi,$$

et l'on retrouve une structure de type Maxwell (éventuellement non abélienne si l'on étend l'espace des échelles).

5.3.3 Bloc hypercomplexe interne. La connexion interne \mathcal{A}_μ (issue de Ω_{mix}) possède une courbure

$$(5.14) \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu],$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur quaternionique (non-commutativité interne). C'est la réinterprétation symplectique des objets historiques $H_{\mu i}{}^j$ et $T_{n\mu\nu}^m$.

5.3.4 Termes mixtes (couplages croisés). Les termes $C_{\mu\nu}$ regroupent les mélanges gravité–Weyl–interne. Ils proviennent géométriquement de la non-trivialité de la fibration et des compatibilités imposées entre Ω , (I, J, K) et g . On peut les voir comme la partie “torsion/couplage” de la courbure totale (5.11).

5.4 Interprétation symplectique : la forme de courbure. Dans la version symplectique, il est naturel de coder la dynamique avec des formes :

$$(5.15) \quad \mathbb{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \quad F^{(\phi)} = d\phi.$$

La structure de Ω suggère également un invariant topologique

$$(5.16) \quad \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega,$$

qui joue un rôle fondamental dans l'action (section suivante).

6 LAGRANGIENS POSSIBLES POUR RGH

Le manuscrit historique proposait un Lagrangien total $L = L_{\text{grav}} + L_\Phi + L_H + L_{\text{coup}} + L_{\text{mat}}$. Nous conservons ce découpage, mais en l'interprétant comme une action de formes.

6.1 Terme gravitationnel (émergent). Au lieu de poser *d'emblée* l'action d'Einstein-Hilbert, on part de l'action symplectique minimale

$$(6.1) \quad S_\Omega = \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega.$$

La métrique (et donc le scalaire de Ricci R) n'intervient qu'*après* avoir défini g par compatibilité presque-Kähler.

6.2 Lagrangien du champ de Weyl. On conserve un terme cinétique de type Maxwell pour la jauge d'échelle :

$$(6.2) \quad S_\phi = -\frac{1}{4} \int_{M^4} F_{\mu\nu}^{(\phi)} F^{(\phi)\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad F_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu.$$

6.3 Lagrangien du champ hypercomplexe interne. Pour la connexion interne \mathcal{A} (valeurs dans l'algèbre quaternionique interne), on prend

$$(6.3) \quad S_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4} \int_{M^4} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].$$

6.4 Termes de couplage. Les couplages “croisés” du texte historique sont naturellement représentés par des invariants mixtes construits à partir de Ω_{mix} , ϕ et de la courbure effective de la base. Un prototype est

$$(6.4) \quad S_{\text{coup}} = \int_{M^4} \left(\kappa \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}) + \eta F^{(\phi)} \wedge \star F^{(\phi)} \right),$$

où l'opérateur de Hodge est défini par la métrique émergente.

6.5 Action totale. On résume :

$$(6.5) \quad S = S_\Omega + S_\phi + S_{\mathcal{A}} + S_{\text{coup}} + S_{\text{mat}}.$$

7 DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE CHAMP À PARTIR DU LAGRANGIEN

7.1 Variations explicites des champs fondamentaux. On considère une action de la forme

$$(7.1) \quad S[\Omega, \phi, A, \Psi] = S_\Omega[\Omega] + S_\phi[\phi; g] + S_A[A; g] + S_{\text{coup}}[\Omega, \phi, A; g] + S_{\text{mat}}[g, \Psi],$$

où g est la métrique émergente issue de (Ω, J) et Ψ désigne la matière. Dans un premier temps, on effectue les variations à *métrique fixée* (i.e. $\delta\star = 0$). Les corrections dues à $\delta g(\delta\Omega)$ sont discutées ensuite.

7.1.1 Variation par rapport à la 2-forme symplectique Ω . On prend pour terme symplectique minimal

$$(7.2) \quad S_\Omega[\Omega] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega.$$

Alors

$$(7.3) \quad \delta S_\Omega = \kappa \int_{\mathcal{M}} \delta\Omega \wedge \Omega,$$

et, à sources près, l'équation d'Euler–Lagrange correspondante est

$$(7.4) \quad \Omega = \Omega_{\text{source}}.$$

Pour obtenir une dynamique locale (non purement topologique), on ajoute un terme cinétique de type

$$(7.5) \quad S_{\Omega, \text{dyn}} = \frac{\kappa_\Omega}{2} \int_{\mathcal{M}} d\Omega \wedge \star d\Omega,$$

ce qui donne

$$(7.6) \quad \delta S_{\Omega, \text{dyn}} = \kappa_\Omega \int_{\mathcal{M}} d(\delta\Omega) \wedge \star d\Omega = -\kappa_\Omega \int_{\mathcal{M}} \delta\Omega \wedge d\star d\Omega$$

(après intégration par parties et en négligeant les termes de bord), donc

$$(7.7) \quad d \star d\Omega = J_\Omega,$$

où J_Ω regroupe les contributions des couplages et/ou de la matière.

7.1.2 Variation par rapport au champ de Weyl ϕ . On définit $F^{(\phi)} = d\phi$ et

$$(7.8) \quad S_\phi[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{M^4} F^{(\phi)} \wedge \star F^{(\phi)}.$$

Alors

$$(7.9) \quad \delta S_\phi = - \int_{M^4} d(\delta\phi) \wedge \star F^{(\phi)} = \int_{M^4} \delta\phi \wedge d \star F^{(\phi)},$$

et l'équation de champ est

$$(7.10) \quad d \star F^{(\phi)} = J_\phi.$$

7.1.3 Variation par rapport à la connexion interne A . On définit la courbure interne $\mathcal{F} = dA + A \wedge A$. Avec

$$(7.11) \quad S_A[A] = -\frac{1}{2} \int_{M^4} \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}),$$

on a $\delta\mathcal{F} = D(\delta A)$, où $D = d + [A, \cdot]$ est la dérivée covariante. Alors

$$(7.12) \quad \delta S_A = - \int_{M^4} \text{Tr}(D(\delta A) \wedge \star \mathcal{F}) = \int_{M^4} \text{Tr}(\delta A \wedge D \star \mathcal{F}),$$

d'où l'équation de Yang–Mills interne

$$(7.13) \quad D \star \mathcal{F} = J_A.$$

7.1.4 Remarque sur la dépendance métrique (termes $\delta\star$). Comme \star dépend de g et g dépend de Ω via $g(\cdot, \cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot)$, la variation complète $\delta S/\delta\Omega$ contient des contributions additionnelles de type $\delta(\star) \neq 0$. Dans une approche systématique, ces termes peuvent être regroupés dans le courant effectif J_Ω .

La variation de S fournit :

- des équations “de Maxwell” pour ϕ ,
- des équations de Yang–Mills internes pour \mathcal{A} ,
- et, via la métrique émergente, une équation gravitationnelle effective de type Einstein + corrections.

7.2 Équations pour le champ de Weyl. La variation $\delta S/\delta\phi = 0$ donne

$$(7.14) \quad \nabla_\mu F^{(\phi)\mu}{}_\nu = J_\nu^{(\phi)},$$

où $J^{(\phi)}$ provient des couplages et de la matière.

7.3 Équations pour le champ interne. La variation $\delta S/\delta\mathcal{A} = 0$ donne une équation de Yang–Mills interne :

$$(7.15) \quad \nabla_\mu \mathcal{F}^\mu{}_\nu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}^\mu{}_\nu] = J_\nu^{(\mathcal{A})}.$$

7.4 Équations gravitationnelles effectives. Une fois la métrique définie, on peut écrire une équation d'Einstein modifiée :

$$(7.16) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}(\phi, \mathcal{A}, \Omega_{\text{mix}}),$$

où $\Theta_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion effectif des secteurs Weyl et interne.

8 STABILITÉ DU LAGRANGIEN ET THÉORÈME D'OSTROGRADSKY

Le théorème d'Ostrogradsky interdit, en général, des lagrangiens non dégénérés dépendant de dérivées d'ordre supérieur, car ils conduisent à un Hamiltonien non borné inférieurement (instabilités et “fantômes”).

8.1 Pourquoi la formulation symplectique aide. La réécriture symplectique présente deux avantages structurels :

- (1) La variable fondamentale Ω est une *forme*, et l'action minimale $S_\Omega = \int \Omega \wedge \Omega$ est de premier ordre (topologique) ; les dynamiques apparaissent via des termes de courbure de type $\text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F})$ qui restent de *second ordre* en dérivées des potentiels.
- (2) Les champs internes (ϕ, \mathcal{A}) apparaissent avec des cinétiques de type Maxwell/Yang–Mills, connues pour être stables (au moins au niveau classique) et sans dérivées d'ordre supérieur.

Ainsi, la théorie évite naturellement les pathologies d'Ostrogradsky, tout en conservant la possibilité de corrections effectives dans le secteur gravitationnel via la métrique émergente.

8.2 Remarque sur la compatibilité Weyl. La condition $\nabla g = \phi \otimes g$ ne nécessite pas d'introduire de dérivées d'ordre supérieur : elle modifie simplement la structure de connexion et de transport.

ANNEXE : SUR LA FIGURE DE TRANSPORT (TIKZ)

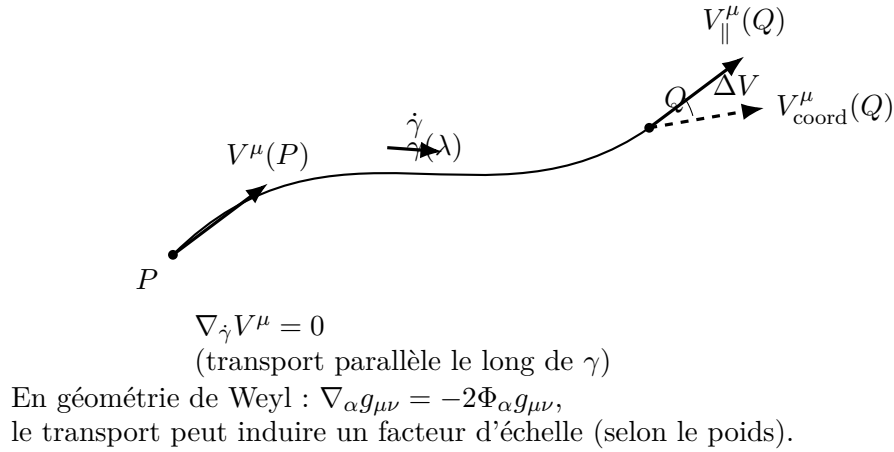


FIGURE 8.1. Schéma de transport d'un quadri-vecteur : $V^\mu(P)$ est transporté le long de γ vers Q (transport parallèle). On compare au vecteur défini par une identification de coordonnées.

9 COSMOLOGIE FLRW DANS LA REFORMULATION SYMPLECTIQUE

Choix de convention. Dans toute cette section, les contributions géométriques effectives sont exprimées en tant que *densités d'énergie physiques*, de sorte que l'équation de Friedmann conserve sa forme standard $H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}})$.

9.1 Métrique émergente : rappel minimal. On définit la métrique émergente par compatibilité presque-kählérienne :

$$(9.1) \quad g(X, Y) = \Omega(X, JY).$$

On suppose ensuite que la métrique émergente (9.1) prend la forme FLRW

$$(9.2) \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

où γ_{ij} est la métrique spatiale de courbure constante $k \in \{-1, 0, +1\}$, et $H = \dot{a}/a$ est le taux d'expansion.

L'homogénéité et l'isotropie imposent que *tous les invariants scalaires* construits à partir de g , de la jauge de Weyl ϕ et des champs internes (notés génériquement A / \mathcal{A}) ne dépendent que du temps cosmique t .

9.2 Ansatz FLRW explicite pour A et pour Ω (pas d'ambiguïté d'isotropie).

Point clef : aucune 1-forme spatiale strictement invariante n'existe en FLRW.. Il n'existe pas de 1-forme spatiale non nulle qui soit invariante sous *tout* le groupe d'isométries des tranches homogènes/isotropes. Par conséquent, si l'on veut garder une cosmologie FLRW au niveau du *fond* (background), on ne peut pas prendre “ A purement spatial et invariant” au sens littéral. Choix minimal compatible (recommandé dans ce manuscrit). On impose au fond :

$$(9.3) \quad \phi = \phi_0(t) dt, \quad A = A_0(t) dt, \quad \mathcal{A}_i^a(t) = \psi(t) \delta_i^a, \quad \mathcal{A}_0^a = 0,$$

où $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a h_a$ est la connexion interne (triplet) et δ_i^a identifie l'indice spatial $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'indice interne $a \in \{1, 2, 3\}$. Cet “ansatz triadique” (analogue à celui des champs de jauge $SU(2)$ en cosmologie) est *isotrope en moyenne* car une rotation spatiale peut être compensée par une rotation interne.¹

Coframe FLRW.. On utilise la base orthonormée

$$(9.4) \quad e^0 = dt, \quad e^i = a(t) \tilde{e}^i,$$

où \tilde{e}^i est un coframe sur la 3-variété de courbure constante (Σ_k, γ_{ij}) .

Décomposition explicite de Ω au fond. On prend une base interne de 2-formes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sur la fibre, normalisée selon une convention interne fixée, et l'on écrit l'ansatz homogène/isotrope

$$(9.5) \quad \Omega_{\text{ext}} = 0, \quad \Omega_{\text{int}} = \varpi(t) \sum_{a=1}^3 \sigma_a, \quad \Omega_{\text{mix}} = \chi(t) \sum_{i=1}^3 e^i \wedge \sigma_i.$$

Le choix $\Omega_{\text{ext}} = 0$ est le plus simple : toute composante Ω_{ext} non nulle tend à sélectionner une direction privilégiée, sauf à introduire une structure supplémentaire ou à la reparamétriser en termes du secteur tardif θ déjà encapsulé dans α .

1. Un triplet interne δ_i^a (ou équivalent) est autorisé en cosmologie homogène et isotrope car l'indice spatial i est compensé par un indice interne a , de sorte qu'aucune direction spatiale privilégiée n'est sélectionnée. Cette construction est standard dans les modèles cosmologiques à structure interne de type $SU(2)$, par exemple les champs de jauge isotropes, où l'isotropie est préservée par une identification diagonale espace-interne.

Conséquence : c'est ce choix qui rend la partie “explicite” non ambiguë. Les équations (7.10) et (7.13) se réduisent alors à des équations ordinaires pour $(\phi_0, A_0, \psi, \varpi, \chi)$, et l'identification des lois d'échelle a^{-2} et a^{-4} devient transparente (voir §9.4).

Les équations (7.10) et (7.13) se réduisent alors à des équations ordinaires pour les modes compatibles, tandis que (7.7) induit une équation effective pour $a(t)$ via la dépendance de \star en $g(a)$.

Il est naturel d'écrire l'évolution cosmologique sous la forme d'une équation de Friedmann modifiée

$$(9.6) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}(\Omega, \phi, A),$$

où ρ_{eff} regroupe les contributions géométriques effectives (Weyl, secteur interne et couplages). Dans le cadre RGH, une contribution tardive de type θ peut être paramétrée à titre effectif par une loi en a^{-2} , ce qui s'intègre naturellement à (9.6).

9.3 Condition de rebond (solution type). Un rebond cosmologique correspond à l'existence d'un instant t_b tel que

$$(9.7) \quad H(t_b) = 0, \quad \dot{H}(t_b) > 0, \quad a(t_b) = a_{\min} > 0.$$

Pour exhiber une solution type, on paramètre la contribution géométrique effective par une combinaison simple de lois en puissance

$$(9.8) \quad \rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

où le terme en a^{-2} représente un secteur tardif (type θ) et le terme en a^{-4} provient d'un invariant interne associé à la structure symplectique/hypercomplexe (contribution effective).

Pour $k = 0$ et en négligeant la matière ordinaire au voisinage du rebond, (9.6) devient

$$(9.9) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \right) = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^4} (\alpha a^2 - \beta).$$

Ainsi $H^2 \geq 0$ impose $a^2 \geq \beta/\alpha$, et l'on obtient un rebond à

$$(9.10) \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

La condition $\dot{H}(t_b) > 0$ est satisfaite dès lors que la contribution effective viole l'équation d'état standard au voisinage de a_{\min} , ce qui est ici une propriété émergente de la dynamique géométrique (et non l'introduction d'un fluide exotique fondamental).

9.4 Identification explicite de α et β à partir de l'action (réduction FLRW). Pour lever toute ambiguïté dimensionnelle, on réécrit (9.6) sous la forme standard

$$(9.11) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}),$$

où ρ_{eff} est une *densité d'énergie physique*. On paramètre alors

$$(9.12) \quad \rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4},$$

avec α et β des constantes physiques (à dimension d'énergie volumique).

Lien avec la composante tardive θ . Dans la version RGH tardive, on introduit une contribution effective de type

$$(9.13) \quad \rho_\theta(a) = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2}.$$

Convention (normalisation de ρ_θ). Deux écritures sont fréquentes. (A) Si ρ_θ est une densité d'énergie physique,

$$(9.14) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{mat}} + \rho_\theta), \quad \rho_\theta(a) = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2},$$

alors α dans (9.12) s'identifie à

$$(9.15) \quad \alpha = \alpha_W \rho_{\text{crit},0} = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2.$$

(B) Si, au contraire, ρ_θ est défini comme un terme déjà normalisé dans H^2 ,

$$(9.16) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{mat}} + \rho_\theta^{(H)}, \quad \rho_\theta^{(H)} = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2},$$

alors la densité physique équivalente est $\rho_\theta = \frac{3}{8\pi G} \rho_\theta^{(H)}$. Dans ce manuscrit, on adopte la convention (A) (densité physique).

Pour la comparer à (9.12) dans (9.11), il faut exprimer (9.13) en densité d'énergie. On obtient l'identification directe

$$(9.17) \quad \boxed{\alpha = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2}$$

(à convention de normalisation près, i.e. selon que ρ_θ est définie comme densité physique ou comme terme déjà “normalisé” dans H^2).

Origine du terme en a^{-4} : secteur interne (type Yang–Mills). Le terme $-\beta/a^4$ apparaît naturellement dès qu'un invariant interne (courbure de connexion) contribue comme un fluide “radiatif” dans un fond FLRW. Par exemple, si le secteur interne est décrit par

$$(9.18) \quad S_A = -\frac{1}{2\lambda^2} \int \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}),$$

alors l'énergie effective associée à un mode homogène/isotrope (amplitude comobile conservée \mathcal{Q}) se comporte comme

$$(9.19) \quad \rho_A(a) = \frac{C_A}{\lambda^2} \frac{\mathcal{Q}^2}{a^4},$$

où C_A est un facteur numérique (dépendant de la normalisation de Tr et du choix d'ansatz isotrope), et \mathcal{Q} est un invariant comobile (analogue à une “charge” ou à une amplitude de champ).

Dans le scénario de rebond, la contribution interne doit apparaître avec un *signe effectif négatif* dans (9.12) :

$$(9.20) \quad \boxed{\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} \mathcal{Q}^2}$$

et l'origine du signe (“ $-\beta/a^4$ ”) est interprétée comme une propriété émergente de la dynamique géométrique (contrainte/auxiliaire) du secteur hypercomplexe, plutôt que comme l'introduction d'un fluide fondamental fantomatique.

Rôle de κ (normalisation du secteur symplectique). Dans ce manuscrit, κ désigne la normalisation du secteur symplectique (noté κ_Ω dans (7.5) lorsque l'on ajoute une dynamique locale). Au niveau cosmologique, κ fixe l'échelle d'énergie associée aux modes homogènes de Ω .

Pour rendre ce point *explicite*, on part de l'ansatz (9.5). Le carré de la composante mixte se comporte, à normalisation interne fixée (i.e. $\int_{\mathcal{F}} \sigma_i \wedge \sigma_j \propto \delta_{ij}$), comme un terme de type radiation :

$$(9.21) \quad \int_{\mathcal{F}} \Omega_{\text{mix}} \wedge \star \Omega_{\text{mix}} \propto \chi(t)^2 \frac{1}{a^4}.$$

Autrement dit, si la dynamique impose une amplitude comobile conservée \mathcal{Q} (par exemple via l'équation de mouvement d'un secteur de jauge interne), on peut paramétrer

$$(9.22) \quad \chi(t) = \frac{\mathcal{Q}}{a^2},$$

et l'énergie effective héritée du secteur Ω (ou, plus généralement, du secteur interne couplé à Ω) prend bien la forme

$$(9.23) \quad \rho_\Omega(a) = \frac{C_\Omega}{\kappa} \frac{\mathcal{Q}^2}{a^4},$$

où C_Ω est un facteur numérique dépendant des conventions de normalisation de σ_i et de la définition précise de l'action.

Cette dépendance est compatible avec (9.20) : *au niveau effectif* on peut absorber C_Ω/κ dans C_A/λ^2 (si le secteur interne est de type Yang–Mills (9.18)) ou, au contraire, distinguer les deux contributions si l'on veut une écriture plus microscopique. Dans la présente version, on regroupe toutes les contributions radiatives internes dans β .

Enfin, les contributions en a^{-2} (paramétrées par α) sont ici reliées prioritairement au secteur tardif θ via (9.17) (et donc à α_W). Une éventuelle contribution additionnelle de Ω au terme en a^{-2} dépend d'un ansatz plus riche pour Ω_{ext} ; elle n'est pas nécessaire pour le rebond minimal et n'est donc pas activée dans (9.5).

9.5 Pression effective et équation d'état w_{eff} près du rebond. Pour une composante effective qui se comporte comme $\rho \propto a^{-n}$, la conservation covariante dans FLRW implique

$$(9.24) \quad w = \frac{n}{3} - 1.$$

Ainsi, un terme en a^{-2} correspond à $w_{(2)} = -1/3$ et un terme en a^{-4} correspond à $w_{(4)} = +1/3$. En utilisant (9.12), on obtient donc pour la pression effective

$$(9.25) \quad p_{\text{eff}}(a) = -\frac{1}{3} \frac{\alpha}{a^2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{\beta}{a^4} \right) = -\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}.$$

Le paramètre d'équation d'état effectif vaut alors

$$(9.26) \quad w_{\text{eff}}(a) = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -\frac{\alpha a^2 + \beta}{3(\alpha a^2 - \beta)}.$$

Au voisinage du rebond $a_{\text{min}}^2 = \beta/\alpha$, le dénominateur tend vers zéro (avec $\alpha a^2 - \beta \rightarrow 0^+$ juste après le rebond), ce qui conduit à $w_{\text{eff}} \ll -1$ *effectivement* près de a_{min} . En particulier, la condition d'accélération $w_{\text{eff}} < -1/3$ est satisfaite dans une plage autour du rebond, ce qui assure $\dot{H}(t_b) > 0$ dans la description effective.

9.6 Estimation d'ordres de grandeur et falsifiabilité.

Exemple numérique jouet et contrainte sur T_{\max}

On considère

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

On fixe un exemple *jouet* :

$$\alpha_W = 0.1, \quad \alpha = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2 = \alpha_W \rho_{\text{crit},0},$$

où $\rho_{\text{crit},0} = 3H_0^2/(8\pi G)$. Pour la contribution interne, on paramètre

$$\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} \mathcal{Q}^2, \quad C_A \sim \mathcal{O}(1),$$

et on choisit des valeurs illustratives (λ, \mathcal{Q}) . Le rebond se produit à

$$a_{\min} = \sqrt{\beta/\alpha}.$$

Une estimation simple de la température maximale atteinte au rebond est

$$T_{\max} \simeq \frac{T_0}{a_{\min}}, \quad T_0 \simeq 2.725 \text{ K}.$$

La falsifiabilité consiste à contraindre $(\alpha_W, \lambda, \mathcal{Q})$ de sorte que T_{\max} reste compatible (i) avec la borne supérieure de l'échelle de Planck et (ii) avec la nécessité d'une cosmologie standard avant la nucléosynthèse primordiale (BBN), tout en reproduisant les observables (CMB/BAO/SNe) via CLASS+Cobaya.

L'expression fermée du minimum

$$(9.27) \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

rend le scénario falsifiable dès que α et β sont reliés à des paramètres physiques mesurables.

Estimation de α à partir de α_W . En combinant (9.17) avec $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, on obtient une densité caractéristique de l'ordre

$$(9.28) \quad \alpha \sim \alpha_W \rho_{\text{crit},0}, \quad \rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Autrement dit, α_W calibre directement la fraction de densité effective associée à la composante tardive (à $a = 1$).

Estimation de β à partir du secteur interne. L'identification (9.20) montre que β dépend d'une amplitude comobile \mathcal{Q} et du couplage λ . Dans un scénario "théorie des champs", \mathcal{Q} est fixé par des conditions initiales (ou par une quantification effective), et λ est contraint par l'absence d'écarts observables dans les tests locaux/perturbatifs. La combinaison β/α est donc testable via (9.27).

Interprétation physique de a_{\min} . Une fois α et β fixés, a_{\min} détermine l'échelle minimale atteinte par l'Univers dans le scénario de rebond. En unités physiques, cela fixe le maximum de redshift et la température maximale atteinte avant le rebond, ce qui peut être confronté : (i) aux contraintes BBN, (ii) aux contraintes sur le spectre primordial, (iii) aux contraintes CMB/LSS via l'implémentation numérique (CLASS modifié).

Comparaison observationnelle (feuille de route). La falsifiabilité se formule alors en trois étapes :

- (1) relier α à α_W via (9.17) et contraindre α_W par CMB+BAO+SNe,
- (2) relier β à (λ, \mathcal{Q}) via (9.20) en contrôlant l'impact sur les perturbations,

- (3) prédire a_{\min} via (9.27) et vérifier la compatibilité avec BBN et l'absence d'anomalies observables.

10 PERSPECTIVES DE QUANTIFICATION

Le cadre de la RGH est actuellement formulé comme une théorie géométrique classique. Néanmoins, sa structure interne admet naturellement un programme de quantification bien défini. En particulier, la formulation symplectique introduite dans ce travail dote le secteur interne d'une deux-forme fermée et non dégénérée ω , qui définit une algèbre de Poisson des observables sur la fibre interne.

Cette structure fournit un point de départ naturel pour une quantification géométrique ou par déformation, dans laquelle les parenthèses de Poisson classiques associées à ω sont promues en commutateurs quantiques. Dans cette interprétation, la non-commutativité interne apparaissant dans le cadre de la RGH n'est pas postulée de manière fondamentale, mais émerge comme la limite quantifiée d'une géométrie symplectique sous-jacente.

Au stade actuel, le secteur gravitationnel est traité classiquement au niveau du fond, tandis que les effets quantiques sont introduits de manière cohérente par le biais de perturbations autour de fonds cosmologiques. Cette stratégie permet d'inscrire le modèle RGH dans le cadre d'une théorie effective des champs, au sein de laquelle les fluctuations quantiques de la métrique et des champs internes peuvent être calculées et confrontées aux observations cosmologiques.

Une quantification complète et non perturbative de la théorie, incluant l'ensemble des degrés de liberté gravitationnels, demeure un problème ouvert et est laissée à des travaux ultérieurs. Toutefois, la formulation présente définit d'ores et déjà un régime semi-quantique contrôlé et testable, adapté à des applications phénoménologiques et cosmologiques.

ANNEXE A DICTIONNAIRE ENTRE LA FORMULATION RGH HISTORIQUE ET LA REFORMULATION SYMPLECTIQUE

Cette annexe établit une correspondance explicite entre les objets de la Relativité Générale Hypercomplexe (formulation historique) et ceux de la reformulation symplectique moderne.

RGH historique (hypercomplexe)	Formulation symplectique
Coordonnées hypercomplexes $x^{\mu i} h_i$	Coordonnées (x^μ, q^a) sur $\mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F}$
Base quaternionique h_i	Base de la fibre interne $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$
Non-commutativité $[h_i, h_j] \neq 0$	Courbure de la connexion interne \mathcal{A}
Quadri-vecteur $X = x^\alpha \varphi^i h_i e_\alpha$	Section du fibré tangent total $T\mathcal{M}$
$\partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j h_j$	$\nabla_\mu u_i = H_{\mu i}^j u_j$ (connexion interne)
$\partial_\mu \varphi^i = \Phi_{\mu j}^i \varphi^j$	Connexion de Weyl / jauge d'échelle ϕ_μ
Symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$	Connexion affine sur M^4
Transport $\nabla_\mu X$	Dérivée covariante sur la fibration $\mathcal{M} \rightarrow M^4$
Commutateur $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$	Courbure totale de la connexion fibrée
Tenseur $R_{\sigma\mu\nu}^{(\Gamma)\rho}$	Courbure riemannienne effective
Tenseur $F_{j\mu\nu}^i(\Phi)$	Champ de Weyl $F^{(\phi)} = d\phi$
Tenseur $T_{n\mu\nu}^m(H)$	Courbure interne $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ (type Yang–Mills quaternionique)
Termes croisés $C_{\mu\nu}$	Couplages base–fibre (mixité symplectique)
Métrique fondamentale $g_{\mu\nu}$	Métrique émergente $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$
Jauge d'échelle de Weyl postulée	Compatibilité conforme $\nabla g = \phi \otimes g$
Lagrangien $R + F^2 + T^2 + \dots$	Action symplectique $\int \Omega \wedge \Omega + \int \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}$

Interprétation. Cette correspondance montre que la reformulation symplectique ne modifie pas le contenu physique de la RGH mais en change la structure géométrique fondamentale.

QUANTIFICATION

ANNEXE B QUANTIFICATION CANONIQUE DU SECTEUR INTERNE RGH

B.1 Action interne. On considère le secteur Yang–Mills interne :

$$(B.1) \quad S_A = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{4g_A^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}),$$

avec

$$(B.2) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

B.2 Décomposition 3+1. Les variables canoniques sont A_i^a et

$$(B.3) \quad E_a^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i^a} = \frac{\sqrt{h}}{g_A^2} F_a^{0i}.$$

B.3 Hamiltonien. La densité Hamiltonienne s'écrit :

$$(B.4) \quad \mathcal{H}_A = \frac{g_A^2}{2\sqrt{h}} E_a^i E_i^a + \frac{\sqrt{h}}{4g_A^2} F_{ij}^a F_a^{ij} + A_0^a \mathcal{G}_a,$$

où la contrainte de Gauss est

$$(B.5) \quad \mathcal{G}_a = D_i E_a^i.$$

Fermeture des contraintes (secteur interne). On introduit la contrainte lissée

$$G[\lambda] \equiv \int_\Sigma d^3x \lambda^a(x) G_a(x), \quad G_a = D_i E_a^i.$$

En utilisant les crochets canoniques, on vérifie que $G[\lambda]$ engendre la jauge interne :

$$\delta_\lambda A_i^a = \{A_i^a, G[\lambda]\} = -D_i \lambda^a, \quad \delta_\lambda E_a^i = \{E_a^i, G[\lambda]\} = f_{ab}^c \lambda^b E_c^i.$$

On en déduit la fermeture de l'algèbre de Gauss :

$$\{G[\lambda], G[\mu]\} = G[[\lambda, \mu]], \quad [\lambda, \mu]^c \equiv f_{ab}^c \lambda^a \mu^b,$$

ainsi que l'invariance de jauge de l'Hamiltonien interne construit à partir d'invariants (E^2, F^2) :

$$\{G[\lambda], H_A\} \approx 0,$$

où \approx désigne l'égalité au sens faible (sur la surface des contraintes).

B.4 Quantification. Les crochets de Poisson deviennent :

$$(B.6) \quad [A_i^a(x), E_b^j(y)] = i\hbar \delta_i^j \delta_b^a \delta^{(3)}(x - y).$$

Les états physiques satisfont :

$$(B.7) \quad \hat{\mathcal{G}}_a(x) |\Psi\rangle = 0.$$

ANNEXE C CONSTRUCTION D'UN OBSERVABLE INTERNE X ET PROMOTION QUANTIQUE

C.1 Invariants de jauge et décomposition 3+1. On considère une connexion interne $A_\mu = A_\mu^a T_a$ et sa courbure

$$(C.1) \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

Les invariants de jauge usuels sont

$$(C.2) \quad \mathcal{I}_1 = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad \mathcal{I}_2 = \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}),$$

où $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

Sur une tranche spatiale Σ , on définit les champs “électrique” et “magnétique” internes :

$$(C.3) \quad E_i^a \equiv F_{0i}^a, \quad B^{ia} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}^a.$$

On introduit les scalaires (jauge-invariants)

$$(C.4) \quad \omega^2 \equiv E_i^a E_a^i, \quad J^2 \equiv B_i^a B_a^i.$$

C.2 Définition de l'observable interne X . On définit l'observable interne RGH-compatible :

$$(C.5) \quad \boxed{X(x) \equiv \alpha \left(E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i \right)^p.}$$

Cette quantité est locale, scalaire et invariante sous la jauge interne.

C.3 Promotion quantique. En représentation “connexion”, on pose

$$(C.6) \quad \hat{E}_a^i(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)}, \quad \hat{B}_a^i(x) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \hat{F}_{jk}^a[A](x),$$

et l'opérateur

$$(C.7) \quad \boxed{\hat{X}(x) = \alpha \left(\hat{E}_i^a \hat{E}_a^i + \hat{B}_i^a \hat{B}_a^i \right)^p.}$$

Une prescription d'ordre (p.ex. symétrisation de Weyl) peut être adoptée afin de définir sans ambiguïté \hat{X}^2 .

Comme \hat{E} et $\hat{B}(\hat{A})$ ne commutent pas, la définition de \hat{X}^2 requiert une prescription d'ordre. On adopte par défaut l'ordre de Weyl (symétrisation), garantissant l'hermiticité et l'absence de biais entre contributions électriques et magnétiques, tout en reproduisant la limite classique lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

C.4 Seuil effectif Weyl. On promeut le seuil de déclenchement en quantité état-dépendante :

$$(C.8) \quad \boxed{W_\star^{\text{eff}}(x) \equiv \kappa_X \langle \Psi | \hat{X}^2(x) | \Psi \rangle.}$$

La condition de déclenchement d'un rebond local peut alors s'exprimer sous la forme

$$(C.9) \quad W(x) \geq W_\star^{\text{eff}}(x).$$

Condition de rebond (formulation minimale). Dans l'approche domainée, les corrections RGH s'activent localement lorsque l'invariant de courbure W franchit un seuil effectif W_\star^{eff} . Dans la version quantifiée du secteur interne, ce seuil devient état-dépendant :

$$W_\star^{\text{eff}} \equiv \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle,$$

où \hat{X} est construit à partir d'invariants internes (et éventuellement saturé au niveau effectif), garantissant une réponse bornée.

Un *rebond* correspond alors, au niveau effectif, à l'existence d'un instant t_b tel que : (i) $H(t_b) = 0$ (arrêt de la contraction), et (ii) $\dot{H}(t_b) > 0$ (reprise en expansion), dans une région où l'activation est satisfaite, i.e. $W(t_b) \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$. Autrement dit, la condition physique minimale pour un rebond local est l'activation du terme RGH avec un signe effectif conduisant à $\dot{H}(t_b) > 0$. La saturation de X assure que W_\star^{eff} reste fini, évitant une activation incontrôlée en régime ultra-courbe.

Raychaudhuri effective et critère de signe. Au niveau effectif (métrique classique, secteur interne quantifié), on peut écrire l'équation d'évolution de H sous la forme minimale

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{GR}} + \Delta_{\text{RGH}}(W; W_\star^{\text{eff}}),$$

où \dot{H}_{GR} regroupe le contenu standard (matière + Λ) et où Δ_{RGH} est une correction qui s'active localement lorsque $W \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$. Dans une formulation seuil/domaines, on peut modéliser cette activation par une fonction d'interpolation $\mathcal{A}(W/W_\star^{\text{eff}})$ nulle sous-seuil et proche de l'unité au-dessus du seuil, de sorte que

$$\Delta_{\text{RGH}}(W; W_\star^{\text{eff}}) \equiv \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Xi_{\text{RGH}},$$

où Ξ_{RGH} encode le *signe effectif* (et l'amplitude) de la correction.

Au temps de rebond t_b on a $H(t_b) = 0$ et la condition dynamique est

$$\dot{H}(t_b) = \dot{H}_{\text{GR}}(t_b) + \mathcal{A}\left(\frac{W(t_b)}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Xi_{\text{RGH}} > 0.$$

Ainsi, dans un domaine activé ($W(t_b) \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$), un rebond se produit si la contribution RGH domine localement la tendance GR à la focalisation, i.e. si Ξ_{RGH} est suffisamment positive. La saturation interne intervient uniquement via $W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle$ et garantit que l'activation reste contrôlée en régime ultra-courbe.

ANNEXE D PRESCRIPTION D'ORDRE ET APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE $\langle \hat{X}^2 \rangle$

On rappelle la définition

$$(D.1) \quad X(x) = \alpha Q(x)^p, \quad Q(x) \equiv E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i,$$

d'où

$$(D.2) \quad X^2 = \alpha^2 Q^{2p}.$$

Après quantification, \hat{E} et $\hat{B}(A)$ ne commutent pas, et une prescription d'ordre est requise pour définir $\hat{X}^2 = \alpha^2 \widehat{Q^{2p}}$.

D.1 Prescription d'ordre (choix minimal). On adopte par défaut l'ordre de Weyl (symétrisation) pour $\widehat{Q^{2p}}$, ce qui évite un biais entre les contributions électriques et magnétiques.

D.2 Approximation semi-classique. Dans un état semi-classique $|\Psi\rangle$ tel que

$$(D.3) \quad \langle \hat{Q} \rangle = Q_{\text{cl}}, \quad (\Delta Q)^2 \equiv \langle \hat{Q}^2 \rangle - \langle \hat{Q} \rangle^2, \quad \Delta Q \ll Q_{\text{cl}},$$

on obtient (développement en cumulants à l'ordre dominant)

$$(D.4) \quad \langle \hat{X}^2 \rangle = \alpha^2 \langle \widehat{Q^{2p}} \rangle \approx \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p} \left[1 + \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2} \right].$$

Ainsi,

$$(D.5) \quad \langle \hat{X}^2 \rangle \approx X_{\text{cl}}^2 + \Delta X^2$$

avec

$$(D.6) \quad X_{\text{cl}}^2 = \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p}, \quad \Delta X^2 \simeq \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p} \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2}.$$

D.3 Seuil effectif et interprétation statistique. Le seuil Weyl devient état-dépendant :

$$(D.7) \quad W_{\star}^{\text{eff}}(x) = \kappa_X \langle \hat{X}^2(x) \rangle.$$

En posant le seuil équivalent en Q ,

$$(D.8) \quad Q_{\star} \equiv \left(\frac{W}{\kappa_X \alpha^2} \right)^{\frac{1}{2p}},$$

la probabilité de déclenchement dans une approche “domaines” s’écrit

$$(D.9) \quad P_{\text{bounce}} = \mathbb{P}(Q \geq Q_{\star}),$$

et, si $\ln Q$ est approximativement gaussien,

$$(D.10) \quad P_{\text{bounce}} \simeq \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\ln Q_{\star} - \mu_Q}{\sqrt{2} \sigma_Q} \right).$$

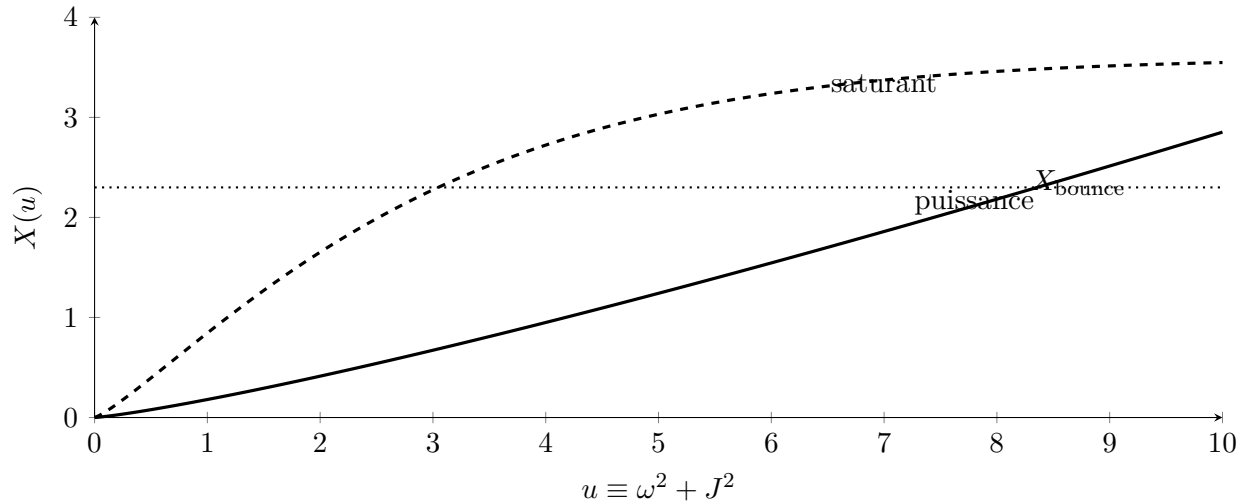


FIGURE D.1. Saturation interne (schéma). $u = \omega^2 + J^2$. La loi puissance $X = \alpha u^p$ diverge, tandis qu’une loi saturante $X = X_{\text{max}} \left(1 - e^{-(u/\Lambda^2)^p} \right)$ tend vers X_{max} . La ligne pointillée indique un seuil X_{bounce} (rebond).

ANNEXE E GALAXIES DOMINÉES PAR MATIÈRE NOIRE ET HALOS HYPERCOMPLEXES DANS LA RGH

E.1 Contexte observationnel. Certaines galaxies récemment observées présentent une fraction baryonique extrêmement faible. Ces objets sont souvent désignés comme :

- *dark galaxies*,
- *ultra-diffuse galaxies* (UDG),
- halos dominés par matière noire.

Les indices observationnels sont essentiellement gravitationnels :

- amas globulaires orbitant autour d'un centre gravitationnel,
- dispersion de vitesse mesurée,
- parfois lentille gravitationnelle faible,
- estimation dynamique de la masse du halo.

Ces observations impliquent généralement

$$(E.1) \quad M_{\text{halo}} \gg M_{\text{baryon}}$$

Dans certains systèmes extrêmes :

$$(E.2) \quad \frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$$

alors que la fraction baryonique cosmologique attendue est

$$(E.3) \quad \frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \approx 0.15.$$

Ces estimations proviennent d'analyses dynamiques (dispersion de vitesse, dynamique des amas globulaires) et non d'une mesure directe de la masse invisible.

E.2 Interprétation standard dans le modèle Λ CDM. Dans le cadre cosmologique standard, la formation des galaxies suit le scénario hiérarchique

$$(E.4) \quad \text{halo de matière noire} \rightarrow \text{capture du gaz baryonique} \rightarrow \text{formation stellaire.}$$

Dans les galaxies extrêmement diffuses, ce processus baryonique semble avoir échoué.

Trois mécanismes principaux sont généralement invoqués.

Feedback stellaire violent. Les premières générations d'étoiles peuvent expulser le gaz par :

- vents stellaires
- explosions de supernova
- rayonnement ultraviolet intense.

Stripping gravitationnel. Dans un environnement d'amas de galaxies :

$$(E.5) \quad \text{pression dynamique} + \text{forces de marée}$$

peuvent arracher le gaz baryonique au halo.

Suppression par réionisation. Lors de l'époque de réionisation cosmique, le gaz chauffé peut rester trop énergétique pour être capturé par certains halos.

E.3 Limites conceptuelles. Ces objets extrêmes sont souvent interprétés comme un argument en faveur d'une composante matérielle réelle (matière noire) plutôt qu'une modification universelle de la gravité.

Cependant la variabilité observée des fractions baryoniques suggère également que la structure gravitationnelle peut exister indépendamment de la matière visible.

Cela ouvre la possibilité d'interprétations géométriques plus fondamentales.

E.4 Cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe. Dans la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), la gravité effective peut contenir une contribution provenant d'un champ hypercomplexe.

La métrique effective peut être écrite sous la forme

$$(E.6) \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(R)} + g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})}$$

où $g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})}$ représente la contribution hypercomplexe.

Le tenseur énergie-impulsion effectif devient alors

$$(E.7) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}}.$$

Dans certains régimes :

$$(E.8) \quad T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}} \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}.$$

Un halo gravitationnel peut donc exister même en absence quasi complète de matière baryonique.

E.5 Hypothèse : halos hypercomplexes. Hypothèse H1.

Il peut exister des domaines astrophysiques où la densité d'énergie hypercomplexe domine la contribution baryonique :

$$(E.9) \quad \rho_{\mathbb{H}} \gg \rho_{\text{baryon}}.$$

Dans ce cas, la structure gravitationnelle observable correspondrait à un condensat du champ hypercomplexe.

E.6 Structure possible. Une galaxie dominée par le champ hypercomplexe pourrait suivre le schéma :

$$(E.10) \quad \text{condensation du champ hypercomplexe} \rightarrow \text{puits gravitationnel} \rightarrow \text{capture partielle de baryons.}$$

Si la capture baryonique est inefficace, l'objet apparaîtrait presque invisible.

E.7 Défaut de couplage baryonique. Il est également possible que le couplage

$$(E.11) \quad \mathbb{H} \leftrightarrow T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}$$

soit faible dans certains domaines.

La structure gravitationnelle peut alors se former sans accumulation significative de matière ordinaire.

E.8 Domaines topologiques. Dans certaines extensions géométriques, ces structures pourraient correspondre à :

- défauts topologiques,
- solitons gravitationnels,
- domaines de Weyl ou de torsion.

Ces structures produisent une perturbation métrique

$$(E.12) \quad \Delta g_{\mu\nu}$$

générant une gravité effective similaire à celle d'un halo de matière noire.

E.9 Prédiction observationnelles. Si cette interprétation est correcte, plusieurs signatures observables pourraient apparaître :

- (1) dispersion dynamique atypique,
- (2) relation masse–amas globulaires anormale,
- (3) profil de masse non compatible avec un halo NFW standard,
- (4) signatures de lentille gravitationnelle modifiées.

E.10 Intérêt pour la RGH. Ces galaxies représentent des laboratoires astrophysiques particulièrement intéressants car elles minimisent les effets baryoniques et isolent la structure gravitationnelle pure.

Elles constituent donc des systèmes privilégiés pour tester des extensions géométriques de la relativité générale.

E.11 Analogie conceptuelle. Une analogie simple consiste à comparer une galaxie à un sapin de Noël :

- dans le modèle Λ CDM, l'arbre correspond au halo de matière noire et les guirlandes à la matière baryonique ;
- dans MOND, la gravité modifiée affecte la luminosité apparente des guirlandes ;
- dans la RGH, la structure même de l'arbre pourrait provenir d'une géométrie hypercomplexe du champ gravitationnel.

ANNEXE F FLUX BARYONIQUE GALACTIQUE ET ÉJECTION PAR FEEDBACK STELLAIRE

F.1 Motivation. Les processus de formation stellaire produisent des mécanismes de rétroaction (*stellar feedback*) capables d'expulser une fraction importante du gaz baryonique d'une galaxie.

Les principaux mécanismes sont :

- vents stellaires,
- explosions de supernova,
- rayonnement ultraviolet intense.

Ces mécanismes peuvent produire des vents galactiques capables de transporter du gaz au-delà du disque galactique.

La question physique fondamentale est alors :

Quelle quantité de matière baryonique peut être expulsée et jusqu'à quelle distance ?

F.2 Énergie de liaison gravitationnelle. Pour une galaxie de masse totale M et de rayon caractéristique R , l'énergie gravitationnelle de liaison est approximativement

$$(F.1) \quad E_{\text{bind}} \sim \frac{GM^2}{R}.$$

Pour une galaxie typique :

$$M \sim 10^{11} M_{\odot}, \quad R \sim 50 \text{ kpc}.$$

On obtient un ordre de grandeur

$$(F.2) \quad E_{\text{bind}} \sim 10^{59} \text{ J}.$$

L'énergie libérée par une supernova est typiquement

$$(F.3) \quad E_{\text{SN}} \sim 10^{44} \text{ J}.$$

Le nombre de supernovae nécessaires pour expulser entièrement le gaz serait donc

$$(F.4) \quad N_{\text{SN}} \sim \frac{E_{\text{bind}}}{E_{\text{SN}}} \sim 10^{15}.$$

Cela montre que l'expulsion complète de la matière baryonique est difficile pour les galaxies massives.

F.3 Vitesse d'éjection. Les vents galactiques présentent typiquement des vitesses

$$(F.5) \quad v_{\text{wind}} \sim 300 - 1000 \text{ km s}^{-1}.$$

La distance maximale atteinte par le gaz peut être estimée en comparant cette vitesse à la vitesse d'échappement du halo.

Pour un halo galactique typique :

$$(F.6) \quad v_{\text{esc}} \sim 500 \text{ km s}^{-1}.$$

Ainsi, une partie du gaz expulsé reste gravitationnellement liée au halo.

F.4 Milieu circumgalactique. Le gaz expulsé forme généralement un halo diffus appelé Circumgalactic Medium (CGM)

caractérisé par :

$$(F.7) \quad T \sim 10^5 - 10^6 \text{ K},$$

$$(F.8) \quad R \sim 100 - 500 \text{ kpc},$$

$$(F.9) \quad M_{\text{gas}} \sim 10^9 - 10^{10} M_{\odot}.$$

Ce gaz peut ensuite retomber vers la galaxie dans un cycle appelé *galactic fountain*.

F.5 Éjection dans le milieu intergalactique. Dans certains cas extrêmes (galaxies naines ou interactions gravitationnelles), une fraction du gaz peut être expulsée dans le milieu intergalactique.

Le gaz se distribue alors dans le

Warm-Hot Intergalactic Medium (WHIM)

caractérisé par :

$$(F.10) \quad T \sim 10^5 - 10^7 \text{ K}.$$

Ce milieu pourrait contenir une grande fraction des baryons manquants de l'univers.

F.6 Flux baryonique. On peut estimer le flux de masse éjectée par un vent galactique :

$$(F.11) \quad \dot{M}_{\text{out}} \sim \eta \dot{M}_{\star},$$

où

- \dot{M}_{\star} est le taux de formation stellaire,
- η est le facteur de chargement du vent.

Les observations donnent typiquement

$$(F.12) \quad \eta \sim 1 - 10$$

pour les galaxies à forte formation stellaire.

F.7 Limites de l'expulsion. Pour atteindre une distance de plusieurs mégaparsecs, la vitesse d'éjection devrait être

$$(F.13) \quad v \gtrsim 3000 \text{ km s}^{-1}.$$

Ces vitesses ne sont généralement pas atteintes par les vents galactiques standards.

Ainsi, la plupart du gaz expulsé reste confiné dans le halo circumgalactique ou le voisinage intergalactique immédiat.

F.8 Interprétation possible dans la RGH. Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), une autre interprétation peut être envisagée.

La gravité effective peut contenir une contribution provenant du champ hypercomplexe :

$$(F.14) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H.$$

Dans certains régimes :

$$(F.15) \quad T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}.$$

Dans ce cas, un halo gravitationnel peut exister même en présence d'une quantité très faible de matière baryonique.

Ces structures pourraient correspondre à des halos hypercomplexes dans lesquels la matière ordinaire n'a jamais été capturée efficacement ou a été expulsée lors des premières phases d'évolution galactique.

F.9 Conséquences observationnelles. De tels systèmes pourraient apparaître comme :

- galaxies ultra-diffuses,
- halos gravitationnels détectés par dynamique des amas globulaires,
- structures dominées par une composante gravitationnelle invisible.

Ces objets constituent donc des laboratoires astrophysiques intéressants pour tester les modèles de formation galactique et les extensions géométriques de la gravitation.

ANNEXE G HALOS HYPERCOMPLEXES ET COURBES DE ROTATION GALACTIQUES

G.1 Motivation. Une propriété observationnelle majeure des galaxies spirales est la présence de courbes de rotation approximativement plates à grande distance du centre. Dans le cadre standard, cette propriété est généralement interprétée comme la signature d'un halo de matière noire.

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), on peut envisager qu'une partie de cette gravitation effective provienne d'une contribution géométrique hypercomplexe, sans postuler nécessairement une nouvelle composante particulaire.

G.2 Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique. Considérons un halo effectif statique, sphériquement symétrique, décrit par une densité d'énergie hypercomplexe effective $\rho_H(r)$.

On suppose qu'à grande distance la densité suit la loi asymptotique

$$(G.1) \quad \rho_H(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2},$$

où ρ_0 et r_0 sont des constantes caractéristiques du halo.

Cette loi est particulièrement intéressante car elle conduit naturellement à une croissance linéaire de la masse enfermée.

G.3 Masse effective intérieure. La masse effective contenue à l'intérieur d'un rayon r est

$$(G.2) \quad M_H(r) = 4\pi \int_0^r \rho_H(r') r'^2 dr'.$$

En utilisant (G.1), on obtient

$$(G.3) \quad M_H(r) = 4\pi \rho_0 r_0^2 \int_0^r dr' = 4\pi \rho_0 r_0^2 r.$$

Ainsi,

$$(G.4) \quad M_H(r) \propto r.$$

G.4 Courbe de rotation. Dans l'approximation newtonienne, la vitesse circulaire vérifie

$$(G.5) \quad v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}.$$

Si la contribution dominante à grande distance est $M_H(r)$ donnée par (G.3), alors

$$(G.6) \quad v_c^2(r) = \frac{G}{r} (4\pi \rho_0 r_0^2 r) = 4\pi G \rho_0 r_0^2.$$

Donc

$$(G.7) \quad v_c(r) \approx \text{constante}.$$

On retrouve ainsi naturellement une courbe de rotation plate.

G.5 Interprétation RGH. Dans la RGH, cette densité effective peut être interprétée comme provenant du secteur hypercomplexe du tenseur énergie–impulsion :

$$(G.8) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H.$$

Dans le régime de halo externe, on peut supposer que

$$(G.9) \quad T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}},$$

de sorte que la dynamique orbitale est dominée par la contribution hypercomplexe.

Le profil $\rho_H(r) \propto r^{-2}$ peut alors être vu comme une solution effective stationnaire du secteur géométrique interne.

G.6 Origine possible du profil en $1/r^2$. Un tel profil peut émerger si le champ hypercomplexe forme un halo auto-gravitant quasi-statique dont l'énergie se distribue selon une loi d'échelle.

Par exemple, si un invariant scalaire du champ interne $X(r)$ vérifie asymptotiquement

$$(G.10) \quad X(r) \propto \frac{1}{r},$$

et si la densité effective est quadratique en cet invariant,

$$(G.11) \quad \rho_H(r) \propto X(r)^2,$$

alors on obtient immédiatement

$$(G.12) \quad \rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}.$$

Cette possibilité est cohérente avec une lecture où le secteur interne RGH agit comme une structure de halo géométrique plutôt que comme une matière particulaire ordinaire.

G.7 Modèle minimal effectif. On peut paramétrer le potentiel gravitationnel total par

$$(G.13) \quad \Phi(r) = \Phi_b(r) + \Phi_H(r),$$

où Φ_b est la contribution baryonique et Φ_H la contribution hypercomplexe.

La contribution hypercomplexe vérifie alors

$$(G.14) \quad \nabla^2 \Phi_H = 4\pi G \rho_H(r).$$

Avec $\rho_H(r) = \rho_0 r_0^2 / r^2$, on obtient un champ radial

$$(G.15) \quad \frac{d\Phi_H}{dr} = \frac{GM_H(r)}{r^2} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{r},$$

ce qui donne après intégration

$$(G.16) \quad \Phi_H(r) \sim 4\pi G \rho_0 r_0^2 \ln r + \text{const.}$$

Le potentiel logarithmique est précisément le comportement classique associé à des vitesses orbitales asymptotiquement constantes.

G.8 Conséquences observationnelles. Si les halos hypercomplexes reproduisent effectivement les courbes de rotation, on s'attend à observer :

- (1) des vitesses orbitales asymptotiquement plates,
- (2) une transition baryons \rightarrow halo hypercomplexe à grand rayon,
- (3) des profils de masse effective compatibles avec $M(r) \propto r$,
- (4) des écarts possibles au profil NFW standard dans les régions intermédiaires.

G.9 Conclusion. Le cadre RGH permet donc, au moins au niveau effectif, d'envisager une explication géométrique des courbes de rotation galactiques.

Une densité hypercomplexe asymptotique de type

$$(G.17) \quad \rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

implique

$$(G.18) \quad M_H(r) \propto r, \quad v_c(r) \approx \text{constante},$$

ce qui reproduit directement le comportement observé des halos galactiques.

Cette possibilité fait des halos hypercomplexes des candidats naturels pour l'interprétation RGH de la dynamique galactique à grande échelle.

G.10 Définition minimale du modèle RGHCl. On considère une variété lorentzienne (M, g) de dimension 4, munie d'une structure spin.

L'extension RGHCl repose sur une structure algébrique interne fondée sur le produit tensoriel

$$\mathcal{A}_{RGHCl} = Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

où $Cl(1, 3)$ désigne l'algèbre de Clifford associée à la métrique lorentzienne et \mathbb{H} l'algèbre des quaternions.

À chaque point $x \in M$ est associée une fibre algébrique

$$\mathcal{F}_x \simeq Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}.$$

La dérivation covariante étendue est définie par

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} + W_\mu + g_H A_\mu^I \tau_I,$$

où ω_μ^{ab} est la connexion de spin, W_μ un champ conforme de type Weyl, et A_μ^I une connexion quaternionique interne.

La courbure totale est définie par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu].$$

L'action effective minimale s'écrit

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(W)} F^{\mu\nu}_{(W)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F_I^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_m \right].$$

ANNEXE H ANNEXE — ESQUISSE D’UNE EXTENSION HYPERCOMPLEXE
CLIFFORD–QUATERNIONIQUE (RGHCLi)

H.1 Motivation. Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), il est naturel d’envisager une extension où la structure géométrique sous-jacente ne se limite plus à une métrique lorentzienne réelle munie de sa connexion de Levi-Civita, mais inclut également un secteur interne hypercomplexe dynamique. L’idée directrice de cette extension, que nous noterons RGHCLi, est que l’espace-temps observable pourrait n’être que la projection réelle d’une structure géométrique plus riche, combinant une algèbre de Clifford relativiste et une fibre quaternionique interne.

L’objectif de cette annexe n’est pas de proposer une théorie complète, mais de fixer une architecture mathématique minimale cohérente, susceptible de servir de base à des développements ultérieurs.

H.2 Structure algébrique étendue. Nous introduisons l’algèbre effective

$$(H.1) \quad \mathcal{A}_{\text{RGHCLi}} = Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

où :

- $Cl(1, 3)$ désigne l’algèbre de Clifford de signature lorentzienne, adaptée à la structure locale de l’espace-temps relativiste ;
- \mathbb{H} désigne l’algèbre des quaternions, interprétée ici comme secteur interne de type rotation/jauge.

Le secteur $Cl(1, 3)$ porte naturellement :

- les vecteurs de l’espace-temps ;
- les bivecteurs associés aux rotations et boosts ;
- les structures spinorielles locales.

Le secteur quaternionique \mathbb{H} porte quant à lui :

- une structure interne triplet ;
- une dynamique de type $SU(2)$;
- des degrés de liberté géométriques supplémentaires non directement observables.

H.3 Variété de base et fibre interne. On conserve une variété lorentzienne classique M de dimension 4, munie d’une métrique réelle observable $g_{\mu\nu}$. À chaque point $x \in M$, on associe une fibre algébrique

$$(H.2) \quad \mathcal{F}_x \simeq Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}.$$

Ainsi, la structure totale peut être vue comme un fibré algébrique étendu

$$(H.3) \quad \mathcal{F} \longrightarrow M.$$

Dans cette perspective, les quantités mesurées expérimentalement ne sont pas nécessairement les objets fondamentaux, mais des projections effectives de la structure complète.

H.4 Principe de projection observable. L’une des hypothèses conceptuelles de RGHCLi est que la géométrie observable correspond à une projection réelle d’une structure plus riche. Formellement, on peut introduire une application de projection

$$(H.4) \quad \Pi_{\text{obs}} : Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \Pi_{\text{obs}} : Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow TM.$$

Dans une première version conservatrice du modèle, on maintient la métrique réelle $g_{\mu\nu}$ comme objet fondamental observable, et l’extension hypercomplexe est portée non par la métrique elle-même mais par les connexions et les courbures associées.

H.5 Connexion totale étendue. Nous introduisons une dérivation covariante étendue

$$(H.5) \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} + W_\mu \mathbf{1} + g_H A_\mu^I \tau_I,$$

où :

- ω_μ^{ab} est la connexion de spin associée au secteur relativiste ;
- γ_{ab} sont les générateurs bivectoriels de $Cl(1, 3)$;
- W_μ est un champ de type Weyl associé à une structure conforme/dilatation ;
- A_μ^I est une connexion quaternionique interne ;
- τ_I désignent les générateurs internes associés au secteur quaternionique ;
- g_H est une constante de couplage du secteur hypercomplexe.

Cette écriture sépare naturellement trois composantes :

- (1) la géométrie relativiste standard ;
- (2) le secteur conforme de type Weyl ;
- (3) la géométrie interne quaternionique.

H.6 Courbure totale. La courbure associée à la connexion totale est définie par

$$(H.6) \quad [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

Elle peut se décomposer schématiquement sous la forme

$$(H.7) \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{ab} \gamma_{ab} + F_{\mu\nu}^{(W)} \mathbf{1} + g_H F_{\mu\nu}^I \tau_I + \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\text{mix})},$$

où :

- $R_{\mu\nu}^{ab}$ est la courbure du secteur spin/gravitation ;
- $F_{\mu\nu}^{(W)} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ est la courbure du secteur de Weyl ;
-

$$(H.8) \quad F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + g_H \epsilon^I_{JK} A_\mu^J A_\nu^K$$

est la courbure du secteur quaternionique ;

- $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\text{mix})}$ regroupe les termes de couplage entre les différents secteurs.

Ces termes mixtes constituent le coeur spécifique de l'extension RGHCli.

H.7 Action effective minimale. Une action effective minimale compatible avec cette structure peut être écrite sous la forme

$$(H.9) \quad S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(W)} F^{\mu\nu}_{(W)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu}_I + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_m \right].$$

Le terme \mathcal{L}_{mix} encode les interactions entre la courbure relativiste, le secteur de Weyl et le secteur hypercomplexe interne. À titre indicatif, on peut envisager des contributions de la forme

$$(H.10) \quad \mathcal{L}_{\text{mix}} = \xi R A_\mu^I A_I^\mu + \eta W_\mu J_H^\mu + \zeta F_{\mu\nu}^{(W)} F^{\mu\nu}_I \Phi^I,$$

où ξ, η, ζ sont des constantes de couplage et où Φ^I et J_H^μ représentent des variables effectives issues du secteur hypercomplexe.

H.8 Équations de champ effectives. La variation de l'action par rapport à la métrique conduit schématiquement à des équations d'Einstein modifiées :

$$(H.11) \quad G_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})} \right).$$

Le tenseur d'énergie-impulsion effectif peut donc être défini par

$$(H.12) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})}.$$

Dans cette lecture, la gravitation observée n'est plus exclusivement due à la matière ordinaire, mais reçoit également des contributions géométriques issues :

- de la structure conforme ;
- de la courbure quaternionique interne ;
- des termes de couplage entre secteurs.

H.9 Interprétation physique. Dans une telle extension, il devient possible d'interpréter certaines composantes gravitationnelles effectives comme provenant d'une structure interne géométrique plutôt que d'une matière particulière additionnelle. En particulier, on peut envisager des configurations pour lesquelles

$$(H.13) \quad T_{\mu\nu}^{(m)} \ll T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})},$$

ce qui ouvre la possibilité de halos gravitationnels à faible contenu baryonique apparent.

Dans un contexte cosmologique homogène, les équations de Friedmann seraient alors modifiées par des densités et pressions effectives supplémentaires,

$$(H.14) \quad \rho_{\text{eff}} = \rho_m + \rho_W + \rho_H + \rho_{\text{mix}}, \quad p_{\text{eff}} = p_m + p_W + p_H + p_{\text{mix}},$$

permettant en principe l'émergence de régimes de rebond, de saturation ou d'accélération effective.

H.10 Position méthodologique. Il convient de souligner que la présente annexe ne constitue qu'une première esquisse structurale. Dans une première phase, l'option méthodologiquement la plus robuste consiste à :

- conserver une métrique réelle observable $g_{\mu\nu}$;
- porter l'extension sur les connexions, courbures et secteurs internes ;
- n'introduire une métrique hypercomplexe complète qu'à un stade ultérieur, une fois les conditions de cohérence causale, variationnelle et énergétique clarifiées.

H.11 Résumé. L'extension RGHCl proposée ici repose sur l'idée qu'une structure mixte

$$(H.15) \quad Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}$$

peut servir de support naturel à une géométrie gravitationnelle étendue combinant :

- la géométrie relativiste locale ;
- une structure conforme de type Weyl ;
- une dynamique interne quaternionique ;
- des termes de couplage susceptibles de générer une gravitation effective additionnelle.

Cette architecture offre ainsi un cadre conceptuel pour explorer une généralisation de la RGH dans laquelle les contributions géométriques internes participent directement à la dynamique gravitationnelle observable.

H.12 Ansatz affine minimale du secteur hypercomplexe. Dans le cadre de la RGH, la structure quaternionique interne peut être interprétée non seulement comme un secteur de jauge contribuant au tenseur d'énergie-impulsion effectif, mais également comme une structure géométrique susceptible de modifier le transport parallèle dans l'espace-temps observable.

Afin de capturer cette possibilité au niveau le plus simple, nous introduisons ici une ansatz affine minimale dans laquelle la connexion effective de l'espace-temps reçoit une contribution supplémentaire provenant du secteur hypercomplexe interne.

Dans une version forte de la RGH, on peut postuler que le secteur quaternionique ne contribue pas seulement au tenseur d'énergie-impulsion effectif, mais également à la connexion affine observable. On introduit alors une connexion effective de la forme

La géométrie observable est alors décrite par une connexion effective $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\text{eff}}$ obtenue en complétant la connexion de Levi-Civita par une correction dépendant du champ hypercomplexe interne.

$$(H.16) \quad \Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\text{eff}} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(H),$$

où la contribution hypercomplexe est prise, au niveau minimal, sous la forme

$$(H.17) \quad \Delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A^I_{\mu} \Sigma^{\rho}_{\nu I} + A^I_{\nu} \Sigma^{\rho}_{\mu I} \right).$$

Cette écriture peut être interprétée géométriquement comme la projection sur l'espace-temps observable d'une connexion définie sur l'espace total fibré $M_4 \times F$, où F désigne la fibre interne hypercomplexe.

Ici, A^I_{μ} désigne la connexion quaternionique interne, $\Sigma^{\rho}_{\nu I}$ un tenseur de projection base-fibre, et λ une constante de couplage géométrique. Cette écriture traduit l'idée que la structure hypercomplexe interne modifie directement le transport parallèle et les géodésiques de l'espace-temps observable.

ANNEXE I ANNEXE — ÉQUATION DE FRIEDMANN EFFECTIVE EN CADRE RGH–WEYL
ET COMPARAISON STRUCTURELLE AVEC LA BIGRAVITÉ DE
DAMOUR–KOGAN–PAPAZOGLU

I.1 Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurale avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou. Cette annexe explicite la forme effective de l'équation de Friedmann dans le cadre RGH–Weyl et précise en quel sens son terme géométrique additionnel joue un rôle structurellement analogue, sans identité de contenu, au terme d'interaction bimétrique étudié par Damour, Kogan et Papazoglou.

On considère un espace-temps homogène et isotrope de type FLRW,

$$(I.1) \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Sigma_k^2, \quad H := \frac{\dot{a}}{a},$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, $k \in \{-1, 0, +1\}$ la courbure spatiale normalisée, et H le paramètre de Hubble.

Dans le cadre standard, l'équation de Friedmann s'écrit

$$(I.2) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}.$$

Dans le cadre RGH enrichi par une structure interne hypercomplexe et par une contribution de type Weyl, on postule que la dynamique cosmologique effective reçoit une correction géométrique supplémentaire. On écrit alors

$$(I.3) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})}$$

avec

$$(I.4) \quad \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})} = \Phi(I_{\text{HC}}) + \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H)$$

où :

- I_{HC} désigne un invariant effectif du secteur hypercomplexe interne ;
- $\varphi(t)$ désigne la composante homogène du champ de Weyl, via

$$(I.5) \quad W_\mu = (\varphi(t), 0, 0, 0).$$

Au premier ordre non trivial, on peut paramétrer ces contributions sous la forme

$$(I.6) \quad \Phi(I_{\text{HC}}) \simeq \alpha \omega_J^2 + \beta \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J,$$

où ω_J représente un mode effectif associé à la structure hypercomplexe, et

$$(I.7) \quad \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H) \simeq A \varphi^2 + B H \varphi + C \dot{\varphi}.$$

On obtient ainsi l'équation effective explicite

$$(I.8) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha \omega_J^2 + \beta \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J + A \varphi^2 + B H \varphi + C \dot{\varphi}$$

L'équation d'accélération correspondante s'écrit de manière générale

$$(I.9) \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} + \tilde{\Phi}(I_{\text{HC}}) + \tilde{\Psi}(\varphi, \dot{\varphi}, H)$$

où les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ dépendent du détail du couplage effectif choisi.

Un rebond cosmologique en $t = t_b$ est alors caractérisé par les conditions

$$(I.10) \quad H(t_b) = 0, \quad \ddot{a}(t_b) > 0.$$

En utilisant (I.3), cela impose

$$(I.11) \quad 0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a_b^2} + \rho_{\text{eff},b}^{(\text{RGH-W})},$$

tandis que (I.9) requiert

$$(I.12) \quad \tilde{\Phi}(I_{\text{HC},b}) + \tilde{\Psi}(\varphi_b, \dot{\varphi}_b, H_b) > \frac{4\pi G}{3}(\rho_b + 3p_b) - \frac{\Lambda}{3}.$$

Cette écriture admet une analogie structurelle claire avec la bigravité non linéaire étudiée par Damour, Kogan et Papazoglou : dans leur cas, l'accélération cosmique effective provient d'un potentiel d'interaction entre deux métriques dynamiques ; dans le cadre présent, elle provient d'une densité géométrique effective issue du secteur hypercomplexe et/ou du champ de Weyl. Le parallèle pertinent n'est donc pas une identification des deux théories, mais une correspondance de rôle dans l'équation cosmologique effective :

$$(I.13) \quad \text{bigravité de Damour-Kogan-Papazoglou : } H^2 \sim \frac{\Lambda}{3} + \rho_{\text{int}},$$

à comparer avec

$$(I.14) \quad \text{cadre RGH-Weyl : } H^2 \sim \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})}.$$

Ainsi, dans les deux cas, un terme géométrique additionnel occupe la même position structurelle dans la dynamique de Friedmann, bien que son origine microscopique soit différente :

$$(I.15) \quad \rho_{\text{DE}}^{\text{eff}} \sim \begin{cases} \rho_{\text{interaction bimétrique}}, & \text{chez Damour-Kogan-Papazoglou,} \\ \Phi(I_{\text{HC}}) + \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H), & \text{dans le cadre RGH-Weyl.} \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

- [1] A. Einstein, *Les théories d'Einstein : nouvelle figure du monde*, Paris (1921). Disponible sur Archive.org : <https://archive.org/details/unenouvellefigur00fabruoft>
- [2] A. Einstein, *The General Theory of Relativity — Manuscript*, facsimilé du manuscrit original.
- [3] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Dover Publications (1952). (édition originale 1918)
- [4] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, Cambridge University Press (1866).
- [5] P. Eecke, *Géométrie des espaces de Riemann*, Dunod, UER Sciences.
- [6] E. Elbaz, *De l'électromagnétisme à l'électrofaible — Monopoles magnétiques*, Ellipses.
- [7] J.-M. Bauduin, *Problèmes corrigés de physique — Options M, P, TA*, Ellipses.
- [8] J.-M. Bauduin, *Problèmes corrigés de physique et chimie — Options T et TA*, Ellipses.
- [9] C. Ngô et H. Ngô, *Physique quantique — Introduction avec exercices*, Dunod, Paris. ISBN : 978-2225825823.
- [10] É. Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 174 (1922).