Mini-secteur bi-Weyl compatible avec la RGH

Action minimale, equations de champ et reduction FLRW

Document de travail

23 avril 2026

Résumé

On propose ici une extension minimale du secteur de Weyl de la Relativite Generale Hypercomplexe (RGH) dans laquelle la connexion d'echelle usuelle est doublee en deux champs abeliens independants, faiblement melanges. L'objectif n'est pas d'introduire une seconde metrique, mais une *bimodalite d'echelle* : un mode moyen, interpretable comme le secteur conforme observable, et un mode relatif, interpretable comme une tension d'echelle cachee. On ecrit une action minimale compatible avec l'esprit symplectique de la RGH, on derive les equations de champ associees, puis on effectue une reduction FLRW homogene et isotrope.

1 Position du probleme

Dans la version actuelle de la RGH symplectique, le secteur de Weyl est porte par une unique 1-forme $\phi = \phi_\mu \mathrm{d}x^\mu$, de courbure

$$F^{(\phi)} = \mathrm{d}\phi,$$

et de dynamique de type Maxwell. Le formalisme admet en outre des couplages mixtes entre le secteur de Weyl, le secteur interne hypercomplexe et la structure symplectique. L'idee etudiee ici consiste a remplacer le champ de Weyl unique par deux 1-formes abeliennes

$$W^{(1)} = W^{(1)}_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad W^{(2)} = W^{(2)}_\mu \mathrm{d}x^\mu,$$

avec pour ambition de modeliser une structure a deux echelles :

- un **mode visible** ou *moyen*, qui generalise le Weyl usuel ;
- un **mode cache** ou *relatif*, qui mesure une difference interne entre deux structures de dilatation locales.

2 Hypotheses minimales

2.1 Hypothese H1 : double secteur conforme abelien

On introduit deux connexions d'echelle abeliennes $W^{(1)}_\mu$ et $W^{(2)}_\mu$ avec courbures

$$\mathcal{F}^{(1)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{(1)}_\nu - \partial_\nu W^{(1)}_\mu, \qquad \mathcal{F}^{(2)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{(2)}_\nu - \partial_\nu W^{(2)}_\mu. \tag{1}$$

2.2 Hypothese H2 : une seule metrique observable

On conserve une metrique effective $g_{\mu\nu}$ unique, interpretee comme la metrique emergente de la RGH. Les deux champs de Weyl ne definissent donc pas deux geometries metriques distinctes, mais deux *modes de connexion conforme* couples au meme secteur gravitationnel observable.

2.3 Hypothese H3 : couplages mixtes faibles

On autorise :

- un melange cinetique bi-Weyl $\mathcal{F}^{(1)} \cdot \mathcal{F}^{(2)}$;
- un terme de masse relative ou de raideur geometrique pour $W^{(1)} - W^{(2)}$;
- des couplages faibles vers le secteur hypercomplexe A_μ et/ou le secteur symplectique Ω.

3 Action minimale bi-Weyl–RGH

On prend comme point de depart une action effective de la forme

$$S = S_{\text{grav}} + S_\Omega + S_H + S_{\text{biW}} + S_{\text{mix}} + S_{\text{mat}}, \tag{2}$$

avec

$$S_{\text{biW}} = \int d^4x \sqrt{-g} \Big[-\frac{1}{4} \mathcal{F}^{(1)}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}^{(2)}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{(2)\mu\nu} - \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{F}^{(1)}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{(2)\mu\nu} + \frac{m_-^2}{2} (W^{(1)}_\mu - W^{(2)}_\mu)(W^{(1)\mu} - W^{(2)\mu}) \Big]. \tag{3}$$

On peut y ajouter des couplages mixtes minimaux

$$S_{\text{mix}} = \int d^4x \sqrt{-g} \Big[\zeta_1 \mathcal{F}^{(1)}_{\mu\nu} \mathcal{H}^{\mu\nu} + \zeta_2 \mathcal{F}^{(2)}_{\mu\nu} \mathcal{H}^{\mu\nu} + \eta (W^{(1)}_\mu + W^{(2)}_\mu) J^\mu_H + \xi (W^{(1)}_\mu - W^{(2)}_\mu) J^\mu_{\text{rel}} \Big]. \tag{4}$$

4 Diagonalisation en modes moyen et relatif

On introduit les combinaisons orthogonales

$$W^{(+)}_\mu = \frac{W^{(1)}_\mu + W^{(2)}_\mu}{\sqrt{2}}, \qquad W^{(-)}_\mu = \frac{W^{(1)}_\mu - W^{(2)}_\mu}{\sqrt{2}}, \tag{5}$$

avec

$$\mathcal{F}^{(+)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{(+)}_\nu - \partial_\nu W^{(+)}_\mu, \qquad \mathcal{F}^{(-)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{(-)}_\nu - \partial_\nu W^{(-)}_\mu. \tag{6}$$

Le secteur cinetique devient

$$\mathcal{L}_{\text{biW}} = -\frac{1}{4}(1+\varepsilon) \mathcal{F}^{(+)}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{(+)\mu\nu} - \frac{1}{4}(1-\varepsilon) \mathcal{F}^{(-)}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{(-)\mu\nu} + m_-^2 W^{(-)}_\mu W^{(-)\mu}. \tag{7}$$

Si $|\varepsilon| < 1$, les deux termes cinetiques gardent le bon signe.

5 Equations de champ

La variation donne

$$\nabla_\mu \Big(\mathcal{F}^{(1)\mu\nu} + \varepsilon \mathcal{F}^{(2)\mu\nu} \Big) + m_-^2 (W^{(1)\nu} - W^{(2)\nu}) = J^\nu_{(1)}, \tag{8}$$

$$\nabla_\mu \Big(\mathcal{F}^{(2)\mu\nu} + \varepsilon \mathcal{F}^{(1)\mu\nu} \Big) - m_-^2 (W^{(1)\nu} - W^{(2)\nu}) = J^\nu_{(2)}. \tag{9}$$

En base diagonale,

$$(1+\varepsilon) \nabla_\mu \mathcal{F}^{(+)\mu\nu} = J^\nu_+, \tag{10}$$

$$(1-\varepsilon) \nabla_\mu \mathcal{F}^{(-)\mu\nu} + 2m_-^2 W^{(-)\nu} = J^\nu_-. \tag{11}$$

6 Tenseur d'energie-impulsion

Le tenseur du secteur bi-Weyl s'ecrit schematiquement

$$T_{\mu\nu}^{(\mathrm{biW})} = T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + T_{\mu\nu}^{(12)} + T_{\mu\nu}^{(-m)}, \tag{12}$$

avec le terme croise

$$T_{\mu\nu}^{(12)} = \varepsilon\Big(\mathcal{F}_{\mu\rho}^{(1)}\mathcal{F}^{(2)\rho}{}_{\nu} + \mathcal{F}_{\mu\rho}^{(2)}\mathcal{F}^{(1)\rho}{}_{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(1)}\mathcal{F}^{(2)\rho\sigma}\Big). \tag{13}$$

Le secteur contribue alors a l'equation d'Einstein effective :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\Big(T_{\mu\nu}^{()} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\Omega)} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{biW})} + T_{\mu\nu}^{(\mathrm{mix})}\Big). \tag{14}$$

7 Reduction FLRW minimale

Pour preserver l'isotropie de fond, on prend d'abord

$$W^{(1)} = w_1(t)\,\mathrm{d}t, \qquad W^{(2)} = w_2(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

Alors

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} = 0, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \tag{16}$$

et le secteur cinetique pur ne contribue pas directement au fond. En revanche, le mode relatif peut subsister via le terme en m_-^2 et via les couplages mixtes.

Dans la base diagonale,

$$W^{(+)} = w_+(t)\,\mathrm{d}t, \qquad W^{(-)} = w_-(t)\,\mathrm{d}t, \tag{17}$$

le mode relatif contribue schematiquement comme

$$\rho_{W_-}^{(0)} \sim +m_-^2 w_-^2, \qquad p_{W_-}^{(0)} \sim +m_-^2 w_-^2, \tag{18}$$

soit un comportement typiquement *stiff* si rien ne le contraint davantage.

Si l'on enrichit l'ansatz par une version isotropisee effective, on obtient au niveau phenomenologique

$$\rho_{W_+}(a) \sim \frac{Q_+^2}{a^4}, \qquad \rho_{W_-}(a) \sim \frac{Q_-^2}{a^4} + m_-^2\,\Xi_-(a). \tag{19}$$

8 Equation de Friedmann effective

La dynamique cosmologique peut alors s'ecrire

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\Big(\rho + \rho_H + \rho_\Omega + \rho_{W_+} + \rho_{W_-} + \rho_{\mathrm{mix}}\Big). \tag{20}$$

Une parametrisation minimale compatible avec l'esprit RGH est

$$\rho_{\mathrm{eff}}(a) = \frac{\alpha_+}{a^2} + \frac{\gamma_+}{a^4} + \frac{\gamma_-}{a^4} + \rho_{W_-}^{(m)}(a) + \rho_{\mathrm{mix}}(a) - \frac{\beta_H}{a^4}. \tag{21}$$

Pour un scenario de rebond, on peut condenser cela en

$$\rho_{\mathrm{eff}}(a) = \frac{\alpha_{\mathrm{biW}}}{a^2} - \frac{\beta_{\mathrm{RGH}}}{a^4}, \qquad \alpha_{\mathrm{biW}} > 0, \quad \beta_{\mathrm{RGH}} > 0, \tag{22}$$

avec

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta_{\mathrm{RGH}}}{\alpha_{\mathrm{biW}}}}. \tag{23}$$

9 Conclusion

Le mini-secteur bi-Weyl propose ici realise une *bimodalite d'echelle sans seconde metrique.* Il fournit :

1. une action coherente a deux champs abeliens melanges ;
2. des equations de type Maxwell couple ;
3. une decomposition claire en mode moyen et mode relatif ;
4. une insertion naturelle dans la Friedmann effective RGH ;
5. une possibilite de retroaction sur le rebond via les couplages mixtes.