1 Halos hypercomplexes et courbes de rotation galactiques

1.1 Motivation

Une propriété observationnelle majeure des galaxies spirales est la présence de courbes de rotation approximativement plates à grande distance du centre. Dans le cadre standard, cette propriété est généralement interprétée comme la signature d'un halo de matière noire.

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), on peut envisager qu'une partie de cette gravitation effective provienne d'une contribution géométrique hypercomplexe, sans postuler nécessairement une nouvelle composante particulaire.

1.2 Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique

Considérons un halo effectif statique, sphériquement symétrique, décrit par une densité d'énergie hypercomplexe effective $\rho_H(r)$.

On suppose qu'à grande distance la densité suit la loi asymptotique

$$\rho_H(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2}, \tag{1}$$

où ρ_0 et r_0 sont des constantes caractéristiques du halo.

Cette loi est particulièrement intéressante car elle conduit naturellement à une croissance linéaire de la masse enfermée.

1.3 Masse effective intérieure

La masse effective contenue à l'intérieur d'un rayon r est

$$M_H(r) = 4\pi \int_0^r \rho_H(r')\, r'^2\, dr'. \tag{2}$$

En utilisant (1), on obtient

$$M_H(r) = 4\pi\rho_0 r_0^2 \int_0^r dr' = 4\pi\rho_0 r_0^2\, r. \tag{3}$$

Ainsi,

$$M_H(r) \propto r. \tag{4}$$

1.4 Courbe de rotation

Dans l'approximation newtonienne, la vitesse circulaire vérifie

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}. \tag{5}$$

Si la contribution dominante à grande distance est $M_H(r)$ donnée par (3), alors

$$v_c^2(r) = \frac{G}{r}\left(4\pi\rho_0 r_0^2 r\right) = 4\pi G\rho_0 r_0^2. \tag{6}$$

Donc

$$v_c(r) \approx \text{constante}. \tag{7}$$

On retrouve ainsi naturellement une courbe de rotation plate.

1.5 Interprétation RGH

Dans la RGH, cette densité effective peut être interprétée comme provenant du secteur hypercomplexe du tenseur énergie–impulsion :

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^{H}. \tag{8}$$

Dans le régime de halo externe, on peut supposer que

$$T_{\mu\nu}^{H} \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}, \tag{9}$$

de sorte que la dynamique orbitale est dominée par la contribution hypercomplexe.

Le profil $\rho_H(r) \propto r^{-2}$ peut alors être vu comme une solution effective stationnaire du secteur géométrique interne.

1.6 Origine possible du profil en $1/r^2$

Un tel profil peut émerger si le champ hypercomplexe forme un halo auto-gravitant quasi-statique dont l'énergie se distribue selon une loi d'échelle.

Par exemple, si un invariant scalaire du champ interne $X(r)$ vérifie asymptotiquement

$$X(r) \propto \frac{1}{r}, \tag{10}$$

et si la densité effective est quadratique en cet invariant,

$$\rho_H(r) \propto X(r)^2, \tag{11}$$

alors on obtient immédiatement

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}. \tag{12}$$

Cette possibilité est cohérente avec une lecture où le secteur interne RGH agit comme une structure de halo géométrique plutôt que comme une matière particulaire ordinaire.

1.7 Modèle minimal effectif

On peut paramétrer le potentiel gravitationnel total par

$$\Phi(r) = \Phi_b(r) + \Phi_H(r), \tag{13}$$

où Φ_b est la contribution baryonique et Φ_H la contribution hypercomplexe.
La contribution hypercomplexe vérifie alors

$$\nabla^2 \Phi_H = 4\pi G \rho_H(r). \tag{14}$$

Avec $\rho_H(r) = \rho_0 r_0^2 / r^2$, on obtient un champ radial

$$\frac{d\Phi_H}{dr} = \frac{G M_H(r)}{r^2} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{r}, \tag{15}$$

ce qui donne après intégration

$$\Phi_H(r) \sim 4\pi G \rho_0 r_0^2 \ln r + \text{const}. \tag{16}$$

Le potentiel logarithmique est précisément le comportement classique associé à des vitesses orbitales asymptotiquement constantes.

1.8 Conséquences observationnelles

Si les halos hypercomplexes reproduisent effectivement les courbes de rotation, on s'attend à observer :

1. des vitesses orbitales asymptotiquement plates,
2. une transition baryons $\to$ halo hypercomplexe à grand rayon,
3. des profils de masse effective compatibles avec $M(r) \propto r$,
4. des écarts possibles au profil NFW standard dans les régions intermédiaires.

1.9 Conclusion

Le cadre RGH permet donc, au moins au niveau effectif, d'envisager une explication géométrique des courbes de rotation galactiques.

Une densité hypercomplexe asymptotique de type

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2} \tag{17}$$

implique

$$M_H(r) \propto r, \qquad v_c(r) \approx \text{constante}, \tag{18}$$

ce qui reproduit directement le comportement observé des halos galactiques.

Cette possibilité fait des halos hypercomplexes des candidats naturels pour l'interprétation RGH de la dynamique galactique à grande échelle.