Fermeture semi-quantique minimale de H_0 en RGH

Document LaTeX autonome

Rédaction assistée

22 avril 2026 — heure de Paris

Résumé

Ce document autonome formalise une fermeture minimale de la constante de Hubble présente H_0 dans le cadre RGH (Relativité Générale Hypercomplexe), en raccordant : (i) la réduction FLRW effective, (ii) le secteur interne quantifié défini par un observable $X = \alpha_X Q^p$, et (iii) une variable cosmologique tardive unique $Q_{\text{eff}}(a)$. L'objectif n'est pas de présenter un théorème définitif, mais une architecture cohérente, compilable, stable notationnellement, et directement réutilisable comme sous-appendice de manuscrit.

Table des matières

1 But et statut du présent texte

Le but est de produire une version autonome, cohérente et compilable de la chaîne logique suivante :

$$Q_{\text{micro}} \longrightarrow X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p \longrightarrow W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_{\text{eff}}(a) \longrightarrow H(a) \longrightarrow H_0.$$

Le statut exact est le suivant.

— **Résultats déjà présents dans le manuscrit RGH :** équation de Friedmann modifiée, forme effective $\rho_{\text{eff}}(a) = \alpha/a^2 - \beta/a^4$, définition d'un observable interne $X = \alpha_X Q^p$, seuil quantique effectif $W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \left\langle \hat{X}^2 \right\rangle$, approximation semi-classique de $\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle$.

— **Ajouts de ce document :** séparation explicite entre le Q microscopique et le Q cosmologique, hypothèse de projection $Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s$, verrouillage tardif sur un mode unique $Q_{\text{eff}}(a)$, et résolution explicite de H_0.

— **Nature de la construction :** fermeture minimale cohérente, pas encore démonstration ultime au sens d'un théorème microscopique fermé.

2 Base cosmologique effective

On part de la forme FLRW standardisée :

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}). \tag{1}$$

La contribution géométrique effective est prise sous la forme

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}. \tag{2}$$

Le terme radiatif interne est paramétré par une amplitude comobile :

$$\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} Q_{\text{cosmo}}^2. \tag{3}$$

Dans une formulation plus symplectique, on peut aussi écrire

$$\chi(t) = \frac{Q_{\text{cosmo}}}{a^2}, \qquad \rho_\Omega(a) = \frac{C_\Omega}{\kappa} \frac{Q_{\text{cosmo}}^2}{a^4}. \tag{4}$$

Commentaire

L'équation (2) est le point de départ effectif. Tant que α est défini en fonction de H_0, on n'a pas encore une prédiction autonome de H_0. L'enjeu du présent texte est précisément de remplacer cette dépendance circulaire par un raccord avec le secteur interne quantifié.

3 Secteur interne quantifié

On introduit l'invariant interne microscopique

$$Q_{\text{micro}}(x) \equiv E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i. \tag{5}$$

L'observable interne est alors défini par

$$X(x) = \alpha_X \, Q_{\text{micro}}(x)^p. \tag{6}$$

Après promotion quantique :

$$\hat{X}(x) = \alpha_X \left(\hat{E}_i^a \hat{E}_a^i + \hat{B}_i^a \hat{B}_a^i \right)^p. \tag{7}$$

On définit ensuite le seuil effectif

$$W_\star^{\text{eff}}(x) = \kappa_X \, \left\langle \hat{X}^2(x) \right\rangle. \tag{8}$$

En régime semi-classique, on pose

$$Q_{\text{cl}} \equiv \left\langle \hat{Q}_{\text{micro}} \right\rangle, \qquad (\Delta Q)^2 \equiv \left\langle \hat{Q}_{\text{micro}}^2 \right\rangle - \left\langle \hat{Q}_{\text{micro}} \right\rangle^2. \tag{9}$$

L'approximation cumulante au premier ordre donne :

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \approx \alpha_X^2 \, Q_{\text{cl}}^{2p} \left[1 + \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2} \right]. \tag{10}$$

On introduit l'abréviation

$$\delta_q \equiv \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2}, \tag{11}$$

de sorte que

$$\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \approx \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} (1 + \delta_q). \tag{12}$$

Par conséquent,

$$W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} (1 + \delta_q). \tag{13}$$

On peut alors inverser :

$$Q_{\text{cl}} = \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}. \tag{14}$$

4 Séparation des deux amplitudes Q

Hypothèse 1 (Séparation notationnelle)**.** *On distingue explicitement :*

$$Q_{\text{micro}} : \textit{invariant interne microscopique/quantifié,} \tag{15}$$
$$Q_{\text{cosmo}} : \textit{amplitude cosmologique effective entrant dans } \beta. \tag{16}$$

Cette séparation est conceptuellement indispensable : utiliser la même lettre pour ces deux objets est dangereux, même si leur parenté physique est claire.

Hypothèse 2 (Projection semi-classique minimale)**.** *On introduit une relation de projection*

$$Q_0 = \zeta \, Q_{\rm cl}^s, \tag{17}$$

où Q_0 est l'amplitude cosmologique tardive à $a = 1$, ζ est un coefficient de normalisation effectif, et s un exposant de coarse-graining.

Le choix minimal est

$$s = 1, \qquad Q_0 = \zeta \, Q_{\rm cl}. \tag{18}$$

En combinant (14) et (17), on obtient

$$Q_0 = \zeta \left(\frac{W_\star^{\rm eff}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{s/(2p)}. \tag{19}$$

Dans le cas minimal $s = 1$:

$$Q_0 = \zeta \left(\frac{W_\star^{\rm eff}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}. \tag{20}$$

5 Version tardive générale HGR–Weyl

On considère une équation de type

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha \, \omega_J^2 + \beta \, \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J + A\phi^2 + BH\phi + C\dot{\phi}. \tag{21}$$

Cette équation contient deux secteurs additionnels :

— un mode hypercomplexe effectif ω_J ;

— un mode de Weyl homogène ϕ.

Le problème consiste à fermer ce système de la manière la plus économique possible.

6 Réduction à un unique mode effectif

Hypothèse 3 (Verrouillage tardif minimal)**.** *On suppose que, dans le régime tardif, les deux secteurs se verrouillent sur un seul mode :*

$$\omega_J = u \, Q_{\rm eff}, \qquad \phi = v \, Q_{\rm eff}, \tag{22}$$

où u et v sont des constantes de projection.

On prend ensuite un ansatz de dilution tardive

$$Q_{\rm eff}(a) = Q_0 \, a^{-m}, \qquad m > 0. \tag{23}$$

Comme $\dot{a} = Ha$, on a

$$\dot{Q}_{\rm eff} = -mHQ_{\rm eff}, \tag{24}$$

puis

$$\dot{\omega}_J = -mH\omega_J, \qquad \dot{\phi} = -mH\phi. \tag{25}$$

En injectant (22)–(25) dans (21), on obtient

$$
\begin{aligned}
H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha u^2 Q_{\text{eff}}^2 + \beta m^2 u^2 H^2 Q_{\text{eff}}^2 \\
+ \gamma u H Q_{\text{eff}} + A v^2 Q_{\text{eff}}^2 + B v H Q_{\text{eff}} - C m v H Q_{\text{eff}}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

On regroupe alors les termes :

$$
(1 - \beta m^2 u^2 Q_{\text{eff}}^2) H^2 - [\gamma u + (B - Cm)v] Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + (\alpha u^2 + A v^2) Q_{\text{eff}}^2\right] = 0. \tag{27}
$$

Définissons

$$
\mu \equiv \beta m^2 u^2, \tag{28}
$$

$$
\nu \equiv \gamma u + (B - Cm)v, \tag{29}
$$

$$
\sigma \equiv \alpha u^2 + A v^2. \tag{30}
$$

L'équation cosmologique fermée minimale devient alors

$$
(1 - \mu Q_{\text{eff}}^2) H^2 - \nu Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}^2\right] = 0. \tag{31}
$$

7 Mise en exergue : 10 équations centrales

Les 10 équations structurantes

$$
H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}) \tag{C1}
$$

$$
\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \tag{C2}
$$

$$
\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} Q_{\text{cosmo}}^2 \tag{C3}
$$

$$
X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p \tag{C4}
$$

$$
W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \tag{C5}
$$

$$
\left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \approx \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p}(1 + \delta_q) \tag{C6}
$$

$$
Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s \tag{C7}
$$

$$
Q_{\text{eff}}(a) = Q_0 a^{-m} \tag{C8}
$$

$$
\begin{aligned}
(1 - \mu Q_{\text{eff}}^2) H^2 - \nu Q_{\text{eff}} H \\
- \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}^2\right] = 0
\end{aligned}
\tag{C9}
$$

$$
H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1 - \mu Q_0^2)(E_0 + \sigma Q_0^2)}}{2(1 - \mu Q_0^2)} \tag{C10}
$$

$$
E_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k \tag{32}
$$

8 Résolution générale pour $H(a)$

L'équation (31) est quadratique en H. Posons

$$
D(a) = 1 - \mu Q_{\text{eff}}(a)^2, \tag{33}
$$

$$\Gamma(a) = \nu Q_{\text{eff}}(a), \tag{34}$$

$$\Xi(a) = \frac{8\pi G}{3}\rho(a) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}(a)^2. \tag{35}$$

Alors

$$D(a)H^2 - \Gamma(a)H - \Xi(a) = 0. \tag{36}$$

La solution de branche expansive est

$$H(a) = \frac{\Gamma(a) + \sqrt{\Gamma(a)^2 + 4D(a)\Xi(a)}}{2D(a)}. \tag{37}$$

9 Formule explicite pour H_0

À l'époque présente $a = 1$:

$$Q_{\text{eff}}(1) = Q_0, \qquad \rho(1) = \rho_0 = \rho_{m0} + \rho_{r0}. \tag{38}$$

On définit

$$D_0 = 1 - \mu Q_0^2, \tag{39}$$

$$\Gamma_0 = \nu Q_0, \tag{40}$$

$$\Xi_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma Q_0^2. \tag{41}$$

Alors

$$D_0 H_0^2 - \Gamma_0 H_0 - \Xi_0 = 0, \tag{42}$$

d'où

$$H_0 = \frac{\Gamma_0 \pm \sqrt{\Gamma_0^2 + 4D_0\Xi_0}}{2D_0}. \tag{43}$$

La branche physique en expansion est

$$H_0 = \frac{\Gamma_0 + \sqrt{\Gamma_0^2 + 4D_0\Xi_0}}{2D_0}. \tag{44}$$

En remplaçant explicitement :

$$H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1-\mu Q_0^2)\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma Q_0^2\right)}}{2(1-\mu Q_0^2)}. \tag{45}$$

10 Injection du seuil quantique dans H_0

À partir de (20), on a

$$Q_0^2 = \zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)}\right)^{1/p}. \tag{46}$$

Donc

$$D_0 = 1 - \mu\zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)}\right)^{1/p}, \tag{47}$$

$$\Gamma_0 = \nu\zeta \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/(2p)}, \tag{48}$$

$$\Xi_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma\zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/p}. \tag{49}$$

En remplaçant dans (44), on obtient une dépendance explicite de H_0 au seuil quantique effectif. Pour alléger l'écriture, posons

$$Y \equiv \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/(2p)}, \qquad E_0 \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k. \tag{50}$$

Alors

$$H_0 = \frac{\nu\zeta Y + \sqrt{\nu^2\zeta^2 Y^2 + 4(1-\mu\zeta^2 Y^2)(E_0 + \sigma\zeta^2 Y^2)}}{2(1-\mu\zeta^2 Y^2)}. \tag{51}$$

11 Régime perturbatif tardif

Supposons

$$\mu Q_0^2 \ll 1, \qquad |\nu Q_0| \ll \sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2}. \tag{52}$$

Alors un développement limité donne

$$H_0 \approx \sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2} + \frac{\nu Q_0}{2} + \frac{\mu Q_0^2}{2}\sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2}. \tag{53}$$

En remplaçant Q_0 par (20), on obtient :

$$\begin{aligned} H_0 \approx{}& \sqrt{E_0 + \sigma\zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/p}} \\ &+ \frac{\nu\zeta}{2} \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/(2p)} \\ &+ \frac{\mu\zeta^2}{2} \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/p} \sqrt{E_0 + \sigma\zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/p}}. \end{aligned} \tag{54}$$

12 Conditions de cohérence

Pour que la branche soit physiquement acceptable, il faut au minimum :

(i) Absence de singularité du coefficient cinétique

$$D_0 = 1 - \mu Q_0^2 > 0. \tag{55}$$

(ii) Réalité de la solution

$$\Gamma_0^2 + 4D_0\Xi_0 \geq 0. \tag{56}$$

(iii) Version quantique de la première condition

À partir de (47) :

$$1 - \mu\zeta^2 \left(\frac{W_\star^{\mathrm{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/p} > 0. \tag{57}$$

13 Interprétation physique

La lecture minimale de la construction est la suivante.

1. Le secteur interne quantifié définit un observable $X = \alpha_X Q_{\mathrm{micro}}^p$.
2. Cet observable contrôle un seuil effectif $W_\star^{\mathrm{eff}}$.
3. Ce seuil détermine une amplitude tardive Q_0 après projection/coarse-graining.
4. L'amplitude Q_0 gouverne un mode effectif $Q_{\mathrm{eff}}(a) = Q_0 a^{-m}$.
5. Ce mode rétroagit sur la Friedmann fermée via trois couplages :

$$\mu : \text{renormalisation du terme } H^2, \tag{58}$$

$$\nu : \text{correction linéaire en } H, \tag{59}$$

$$\sigma : \text{densité géométrique supplémentaire.} \tag{60}$$

6. La valeur présente H_0 devient alors une *sortie* du modèle effectif, et non plus seulement une constante injectée comme normalisation externe.

14 Ce qui est établi, et ce qui reste ouvert

Établi dans ce document

On a construit une dépendance explicite du type

$$H_0 = H_0\Big(W_\star^{\mathrm{eff}}, \delta_q, \zeta, p, \mu, \nu, \sigma, \rho_0, \Lambda, k\Big). \tag{61}$$

Reste ouvert

Le point non encore dérivé microscopiquement est la loi exacte de projection

$$Q_0 = \zeta Q_{\mathrm{cl}}^s. \tag{62}$$

Trois lectures physiques restent possibles :

— projection directe de moyenne semi-classique ;

— variable coarse-grained de domaine ;

— amplitude saturée.

Remarque 1. *Autrement dit, la structure logique est fermée, mais la micro-fondation détaillée du passage $Q_{\mathrm{cl}} \mapsto Q_0$ reste à préciser si l'on veut transformer cette fermeture cohérente en théorème pleinement dérivé.*

15 Résumé final

La chaîne complète peut être résumée par

$$
\begin{aligned}
Q_{\rm micro} &\longrightarrow X = \alpha_X Q_{\rm micro}^{p} \longrightarrow W_\star^{\rm eff} = \kappa_X \left\langle \hat{X}^2 \right\rangle \longrightarrow Q_0 = \zeta \left(\frac{W_\star^{\rm eff}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1+\delta_q)} \right)^{1/(2p)} \\
&\longrightarrow Q_{\rm eff}(a) = Q_0 a^{-m} \longrightarrow (1-\mu Q_{\rm eff}^2)H^2 - \nu Q_{\rm eff} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\rm eff}^2 \right] = 0 \\
&\longrightarrow H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1-\mu Q_0^2)(E_0 + \sigma Q_0^2)}}{2(1-\mu Q_0^2)}. \qquad (63)
\end{aligned}
$$

Ce document fournit donc une base LaTeX autonome pour incorporer la fermeture semi-quantique minimale de H_0 dans un manuscrit RGH plus large.