Interaction entre un champ hypercomplexe et un champ de Weyl

Régime de couplage faible ou nul dans le cadre RGH

Document autonome rédigé pour lolo / HAL

23 avril 2026

Résumé

On étudie, dans l'esprit de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH) reformulée symplectiquement, le cas où le couplage direct entre un champ de Weyl et un champ hypercomplexe est très faible, voire nul. L'objectif est de clarifier ce qui disparaît, ce qui subsiste, et quelles conséquences géométriques et cosmologiques en résultent. On montre que, dans cette limite, les deux secteurs se découplent au niveau direct des termes mixtes, tout en restant indirectement corrélés par la métrique émergente et par l'équation gravitationnelle effective. On obtient ainsi un cadre minimal, sobre et potentiellement plus stable, où le secteur de Weyl joue essentiellement un rôle conforme, tandis que le secteur hypercomplexe peut porter l'essentiel des corrections gravitationnelles effectives.

Table des matières

1 Position du problème

Dans le cadre RGH enrichi par une structure de Weyl et par un secteur hypercomplexe interne, la connexion totale peut être vue comme la somme de trois composantes :

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu + W_\mu + A_\mu, \tag{1}$$

où :

- Γ_μ désigne la partie gravitationnelle/spinorielle usuelle ;
- W_μ est le champ de Weyl, associé à la structure de dilatation ou de compatibilité conforme ;
- A_μ est la connexion interne hypercomplexe (quaternionique ou apparentée).

La courbure totale s'écrit alors schématiquement

$$[D_\mu, D_\nu] = R^{(\Gamma)}_{\mu\nu} + F^{(W)}_{\mu\nu} + F^{(H)}_{\mu\nu} + F^{(\text{mix})}_{\mu\nu}, \tag{2}$$

avec

$$F^{(W)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu, \tag{3}$$

$$F^{(H)}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{4}$$

La question étudiée ici est la suivante :

> *Que devient la théorie si le couplage direct entre le secteur de Weyl et le secteur hypercomplexe est très faible, voire nul ?*

2 Hypothèses

Nous supposons :

2.1 Hypothèse H1 : action décomposée

L'action totale peut être écrite sous la forme

$$S = S_{\text{grav}} + S_W + S_H + \varepsilon\, S_{\text{mix}} + S_{\text{mat}}, \tag{5}$$

où :

- S_{grav} représente le secteur gravitationnel émergent ;
- S_W le secteur de Weyl ;
- S_H le secteur hypercomplexe ;
- S_{mix} les termes de couplage direct entre Weyl et hypercomplexe ;
- ε est un paramètre de couplage.

2.2 Hypothèse H2 : régime faible

Le régime étudié correspond à

$$0 \leq \varepsilon \ll 1, \tag{6}$$

et le cas limite de découplage strict est

$$\varepsilon = 0. \tag{7}$$

2.3 Hypothèse H3 : même géométrie observable

Même lorsque $\varepsilon = 0$, les deux secteurs vivent sur la même géométrie effective $g_{\mu\nu}$, ou plus exactement participent tous deux à sa dynamique émergente.

3 Intuition physique

Il faut bien distinguer deux niveaux d'interaction :

3.1 Interaction directe

Elle provient des termes explicitement mixtes, par exemple

$$L_{\mathrm{mix}} = \zeta\, \Phi_I\, F^{(W)}_{\mu\nu} F_I^{(H)\,\mu\nu} + \eta\, W_\mu J^\mu_H + \xi\, R\, A^I_\mu A^\mu_I. \tag{8}$$

Si ε est très petit, ces termes deviennent perturbatifs ; si $\varepsilon = 0$, ils disparaissent.

3.2 Interaction indirecte

Même si les termes de (8) s'annulent, le champ de Weyl et le champ hypercomplexe restent couplés indirectement par leur contribution commune au tenseur d'énergie-impulsion effectif et donc à la géométrie observable.

Autrement dit :

> *pas de couplage direct ne signifie pas absence totale de dialogue ; cela signifie seulement absence de mélange local explicite entre les deux secteurs.*

4 Modèle minimal

4.1 Secteur de Weyl

On prend une action de type Maxwell

$$S_W = -\frac{1}{4} \int d^4x\, \sqrt{-g}\, F^{(W)}_{\mu\nu} F^{(W)\,\mu\nu}. \tag{9}$$

La variation par rapport à W_μ conduit à

$$\nabla_\mu F^{(W)\,\mu\nu} = J^\nu_{(W)}. \tag{10}$$

4.2 Secteur hypercomplexe

On prend pour le secteur interne une action de type Yang–Mills :

$$S_H = -\frac{1}{4} \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \mathrm{Tr}\Big(F^{(H)}_{\mu\nu} F^{(H)\,\mu\nu} \Big). \tag{11}$$

La variation par rapport à A_μ donne

$$\nabla_\mu F^{(H)\,\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\,\mu\nu}] = J^\nu_{(H)}. \tag{12}$$

4.3 Secteur mixte

On introduit un terme mixte générique

$$S_{\text{mix}} = \int d^4x \sqrt{-g}\, L_{\text{mix}}, \tag{13}$$

où L_{mix} est donné par (8) à titre indicatif.

L'intérêt du présent document est justement d'étudier ce qui se passe lorsque ce terme est négligeable ou absent.

5 Résultats formels dans la limite de couplage faible

5.1 Découplage de la courbure mixte

Lorsque $\varepsilon \to 0$, les blocs mixtes deviennent négligeables :

$$F^{(\text{mix})}_{\mu\nu} \simeq 0. \tag{14}$$

Au niveau de la décomposition globale,

$$[D_\mu, D_\nu] \simeq R^{(\Gamma)}_{\mu\nu} + F^{(W)}_{\mu\nu} + F^{(H)}_{\mu\nu}. \tag{15}$$

5.2 Équations presque séparées

Les équations de champ se réécrivent alors, à l'ordre dominant :

$$\nabla_\mu F^{(W)\,\mu\nu} = J^\nu_{(W)} + O(\varepsilon), \tag{16}$$

$$\nabla_\mu F^{(H)\,\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\,\mu\nu}] = J^\nu_{(H)} + O(\varepsilon). \tag{17}$$

Dans le cas strictement découplé $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$\nabla_\mu F^{(W)\,\mu\nu} = J^\nu_{(W)}, \tag{18}$$

$$\nabla_\mu F^{(H)\,\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\,\mu\nu}] = J^\nu_{(H)}. \tag{19}$$

5.3 Tenseur d'énergie-impulsion effectif

La dynamique gravitationnelle effective reste néanmoins sensible aux deux secteurs :

$$G_{\mu\nu} = \kappa \Big(T^{(\text{mat})}_{\mu\nu} + T^{(W)}_{\mu\nu} + T^{(H)}_{\mu\nu} + \varepsilon\, T^{(\text{mix})}_{\mu\nu} \Big). \tag{20}$$

Dans la limite découplée,

$$G_{\mu\nu} = \kappa \Big(T^{(\text{mat})}_{\mu\nu} + T^{(W)}_{\mu\nu} + T^{(H)}_{\mu\nu} \Big), \tag{21}$$

et donc les deux secteurs restent liés *gravitationnellement* même sans couplage direct.

6 Interprétation conceptuelle

6.1 Ce qui disparaît

Lorsque le couplage direct est très faible ou nul, on perd :

- les transferts directs d'énergie ou de structure entre Weyl et hypercomplexe ;
- les termes d'interférence dominants ;
- les sources croisées importantes dans les équations de mouvement.

6.2 Ce qui subsiste

En revanche, on conserve :

— la présence d'un champ de Weyl autonome ;

— la présence d'un secteur hypercomplexe autonome ;

— la sommation de leurs contributions dans l'équation gravitationnelle effective ;

— la possibilité que le secteur hypercomplexe produise à lui seul une gravitation additionnelle observable.

6.3 Lecture physique

Dans cette limite, le champ de Weyl peut être interprété comme un secteur de structure conforme ou de jauge d'échelle, relativement discret, tandis que le champ hypercomplexe peut porter :

— des halos géométriques ;

— des corrections effectives aux équations cosmologiques ;

— des contributions de type rebond, saturation ou gravité invisible.

7 Réduction cosmologique FLRW

7.1 Équation de Friedmann effective

On suppose une géométrie FLRW effective,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \tag{22}$$

et une équation de Friedmann modifiée

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}), \tag{23}$$

avec

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_W + \rho_H + \varepsilon\, \rho_{\text{mix}}. \tag{24}$$

Dans le régime de couplage faible,

$$\rho_{\text{eff}} \simeq \rho_W + \rho_H. \tag{25}$$

7.2 Ansatz minimal utile

Dans l'esprit du modèle minimal RGH–Weyl, on peut paramétrer

$$\rho_W(a) \sim \frac{\alpha}{a^2}, \qquad \rho_H(a) \sim -\frac{\beta}{a^4}, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{26}$$

On obtient ainsi

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \tag{27}$$

sans qu'un terme d'interférence Weyl–hypercomplexe soit nécessaire à l'ordre dominant.

7.3 Condition de rebond

En univers plat et en négligeant la matière ordinaire près du rebond, l'équation de Friedmann devient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}\right). \tag{28}$$

La condition $H = 0$ impose

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{29}$$

Ainsi, même en l'absence de couplage direct fort entre Weyl et hypercomplexe, un rebond effectif peut exister si le secteur hypercomplexe contribue avec le signe et l'intensité adéquats dans (27).

7.4 Message cosmologique essentiel

Le point conceptuel important est le suivant :

> *le rebond n'a pas besoin d'être porté par un dialogue fort entre Weyl et hypercomplexe ; il peut déjà émerger de la combinaison gravitationnelle indirecte de deux secteurs presque séparés.*

8 Cas particulier : couplage exactement nul

Prenons maintenant le cas radical

$$\varepsilon = 0. \tag{30}$$

Alors :

1. les termes mixtes disparaissent de l'action ;
2. les équations de Weyl et du secteur hypercomplexe sont dynamiquement séparées ;
3. la seule interaction restante est gravitationnelle, via la métrique effective.

Ce régime peut être résumé par le schéma :

$$\text{GR émergente} \quad + \quad \text{Weyl autonome} \quad + \quad \text{hypercomplexe autonome}. \tag{31}$$

On obtient ainsi un modèle plus minimal, plus lisible, et souvent plus défendable du point de vue phénoménologique.

9 Discussion méthodologique

9.1 Pourquoi ce régime est intéressant

Le régime de couplage faible présente plusieurs avantages :

- il limite la prolifération des paramètres libres ;
- il réduit le risque de pathologies dynamiques liées à des mélanges trop agressifs ;
- il permet d'attribuer plus clairement un effet observé à un secteur donné ;
- il fournit une base plus propre pour des tests numériques ou observationnels.

9.2 Ce que l'on ne peut pas conclure sans travail supplémentaire

En revanche, sans fixer davantage le modèle, on ne peut pas encore déterminer de façon univoque :

- — le signe exact de tous les termes effectifs ;
- — la stabilité complète des perturbations ;
- — la forme exacte des observables en structure fine, lentillage ou spectre cosmologique ;
- — la valeur réelle du paramètre ε dans la nature.

10 Conclusion

Le cas d'un couplage très faible, voire nul, entre champ hypercomplexe et champ de Weyl ne vide pas la théorie de sa substance ; il la clarifie.

On obtient alors le tableau suivant :

1. les termes mixtes directs sont négligeables ou absents ;
2. les secteurs Weyl et hypercomplexe évoluent presque séparément ;
3. ils restent néanmoins reliés par leur contribution commune à la gravitation effective ;
4. le secteur hypercomplexe peut demeurer le principal support d'une gravité additionnelle ;
5. le secteur de Weyl conserve un rôle conforme et structurel plus discret.

Ce régime apparaît donc comme une version minimaliste, propre et potentiellement plus robuste du cadre RGH–Weyl. Il constitue une base naturelle pour une suite plus technique : ansatz minimal, perturbations, stabilité, puis confrontation observationnelle.

Formule synthétique. Si

$$S = S_{\text{grav}} + S_W + S_H + \varepsilon S_{\text{mix}}, \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{32}$$

alors, à l'ordre dominant,

$$\boxed{\text{interaction directe faible} \implies \text{découplage local presque complet mais rétroaction gravitationnelle commune.}} \tag{33}$$