# Annexe — Champ répulsif effectif et réduction FLRW minimale dans le cadre RGH

Laurent Besson (idée originale)
Rédaction annexe : ChatGPT

Version de travail — 20 avril 2026

## Objet de l'annexe

Le but de cette annexe est de fixer une formulation minimale, cohérente et exploitable du *champ répulsif effectif* dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), puis d'en donner la réduction cosmologique homogène et isotrope. L'idée centrale est de ne *pas* introduire un champ fantôme fondamental ni une "masse négative" au sens naïf, mais de représenter la répulsion gravitationnelle comme un *effet géométrique effectif*, activé dans certains régimes de courbure, et porté par les secteurs déjà présents dans la théorie :

- le secteur de Weyl $\phi_\mu$,
- la connexion interne hypercomplexe $A_\mu$,
- le secteur symplectique mixte $\Omega_{\text{mix}}$,
- les termes croisés issus du couplage base–fibre.

## 1 Définition covariante du secteur répulsif effectif

On définit le tenseur répulsif effectif activé par

$$\Theta^{\text{rep}}_{\mu\nu} := \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Theta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

où :

- $W$ désigne un invariant de courbure servant de variable d'activation ;
- $W_\star^{\text{eff}}$ est le seuil effectif d'activation ;
- $\mathcal{A}(z)$ est une fonction lisse telle que $0 \le \mathcal{A}(z) \le 1$, avec $\mathcal{A}(z) \to 0$ sous le seuil et $\mathcal{A}(z) \to 1$ au-dessus ;
- $\Theta_{\mu\nu}$ regroupe les contributions des secteurs internes et géométriques.

L'équation gravitationnelle effective minimale est alors

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T^{(m)}_{\mu\nu} + \Theta^{\text{rep}}_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Une écriture plus explicite du seuil est

$$W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle, \tag{3}$$

où $\hat{X}$ est l'observable interne quantifiée construite à partir des invariants du secteur hypercomplexe.

### Critère covariant de régime répulsif

Pour un observateur de quadrivitesse $u^\mu$, on introduit le scalaire

$$\Xi_{\rm rep}(u) := -\left(\Theta^{\rm rep}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Theta^{\rm rep}\right)u^\mu u^\nu, \qquad \Theta^{\rm rep} := g^{\mu\nu}\Theta^{\rm rep}_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Le régime répulsif effectif correspond à

$$\Xi_{\rm rep}(u) > 0. \tag{5}$$

Autrement dit, la correction géométrique agit contre la tendance habituelle au *focusing* des congruences.

# 2 Décomposition minimale de $\Theta_{\mu\nu}$

La fermeture minimale la plus naturelle est

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{(\phi)}_{\mu\nu} + \Theta^{(A)}_{\mu\nu} + \Theta^{(\Omega_{\rm mix})}_{\mu\nu} + \Theta^{(\rm cross)}_{\mu\nu}. \tag{6}$$

## 2.1 Bloc de Weyl

On part du terme de type Maxwell

$$S_\phi = -\frac{1}{4}\int F^{(\phi)}_{\mu\nu}F^{(\phi)\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \qquad F^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu. \tag{7}$$

La variation métrique donne

$$\Theta^{(\phi)}_{\mu\nu} = F^{(\phi)}_{\mu\alpha}F^{(\phi)\alpha}{}_\nu - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{(\phi)}_{\alpha\beta}F^{(\phi)\alpha\beta}. \tag{8}$$

## 2.2 Bloc interne hypercomplexe

Le secteur interne est pris sous forme Yang–Mills :

$$S_A = -\frac{1}{4}\int \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \tag{9}$$

La variation métrique fournit

$$\Theta^{(A)}_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\mathrm{Tr}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}). \tag{10}$$

## 2.3 Bloc symplectique mixte

Pour le secteur dynamique de $\Omega$, on considère le terme

$$S_{\Omega,\rm dyn} = \frac{\kappa_\Omega}{2}\int \mathrm{d}\Omega \wedge \star\mathrm{d}\Omega. \tag{11}$$

On projette la partie mixte observable sous la forme d'une 2-forme

$$B_{\mu\nu} := \Pi_{\rm obs}(\Omega_{\rm mix})_{\mu\nu}, \qquad H_{\mu\nu\rho} := 3\nabla_{[\mu}B_{\nu\rho]}. \tag{12}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion minimal associé est alors

$$\Theta^{(\Omega_{\rm mix})}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}H_{\mu\alpha\beta}H_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{12}g_{\mu\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma}. \tag{13}$$

### 2.4 Bloc croisé

Les termes croisés, issus des couplages gravité–Weyl–hypercomplexe–symplectique, sont définis par

$$\Theta^{(\mathrm{cross})}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\mathrm{coup}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{14}$$

où $S_{\mathrm{coup}}$ désigne le terme de couplage total.

En résumé, on obtient la formule compacte

$$\boxed{\Theta_{\mu\nu} = \Theta^{(\phi)}_{\mu\nu} + \Theta^{(A)}_{\mu\nu} + \Theta^{(\Omega_{\mathrm{mix}})}_{\mu\nu} + \Theta^{(\mathrm{cross})}_{\mu\nu}.} \tag{15}$$

## 3 Réduction FLRW minimale

On adopte l'ansatz homogène et isotrope

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \qquad H := \frac{\dot{a}}{a}, \tag{16}$$

avec

$$\phi = \phi_0(t)\,\mathrm{d}t, \qquad A_i{}^a(t) = \psi(t)\,\delta_i{}^a, \qquad A_0{}^a = 0, \tag{17}$$

et

$$\Omega_{\mathrm{ext}} = 0, \qquad \Omega_{\mathrm{int}} = \varpi(t)\sum_a \sigma_a, \qquad \Omega_{\mathrm{mix}} = \chi(t)\sum_i e^i \wedge \sigma_i. \tag{18}$$

### 3.1 Contribution du bloc de Weyl

Avec $\phi = \phi_0(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$F^{(\phi)} = \mathrm{d}(\phi_0(t)\,\mathrm{d}t) = \dot{\phi}_0\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}t = 0. \tag{19}$$

Par conséquent,

$$\Theta^{(\phi)}_{\mu\nu}|_{\mathrm{FLRW}} = 0. \tag{20}$$

Le bloc de Weyl cinétique ne contribue donc pas directement au fond FLRW strict.

### 3.2 Contribution du bloc interne hypercomplexe

Sous l'ansatz isotrope triadique, le secteur Yang–Mills interne se comporte comme un fluide radiatif effectif :

$$\rho_A(a) = \frac{C_A}{\lambda^2}\frac{Q_A^2}{a^4}, \qquad p_A(a) = \frac{1}{3}\rho_A(a). \tag{21}$$

Le coefficient associé est

$$\beta_A = \frac{C_A}{\lambda^2}Q_A^2. \tag{22}$$

### 3.3 Contribution du bloc symplectique mixte

Pour la partie mixte, on obtient également une loi de type radiatif :

$$\rho_\Omega(a) = \frac{C_\Omega}{\kappa}\frac{Q_\Omega^2}{a^4}, \qquad p_\Omega(a) = \frac{1}{3}\rho_\Omega(a), \tag{23}$$

avec

$$\beta_\Omega = \frac{C_\Omega}{\kappa}Q_\Omega^2. \tag{24}$$

### 3.4 Contribution des termes croisés

À ce stade minimal, on absorbe les couplages cosmologiques additionnels dans un coefficient effectif

$$\beta_{\text{cross}}, \tag{25}$$

si bien que

$$\beta = \beta_A + \beta_\Omega + \beta_{\text{cross}}. \tag{26}$$

# 4 Identification des termes $\alpha/a^2$ et $\beta/a^4$

Dans la version minimale actuellement retenue, on identifie :

$$\alpha = \alpha_\theta = \frac{3}{8\pi G}\,\alpha_W H_0^2, \tag{27}$$

où $\alpha_W$ est le paramètre tardif du secteur $\theta$.

La densité effective totale prend alors la forme

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{28}$$

La pression effective associée est

$$p_{\text{eff}}(a) = -\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}. \tag{29}$$

L'équation d'état effective vaut

$$w_{\text{eff}}(a) = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -\frac{\alpha a^2 + \beta}{3(\alpha a^2 - \beta)}. \tag{30}$$

# 5 Équations cosmologiques effectives et condition de rebond

L'équation de Friedmann modifiée s'écrit

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{\text{mat}} + \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}\right). \tag{31}$$

Dans le cas plat $k = 0$ et en négligeant la matière ordinaire au voisinage du rebond, on obtient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}\right) = \frac{8\pi G}{3a^4}(\alpha a^2 - \beta). \tag{32}$$

La condition $H^2 \geq 0$ impose

$$a^2 \geq \frac{\beta}{\alpha}, \tag{33}$$

et le minimum est atteint pour

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{34}$$

Le rebond cosmologique correspond alors aux conditions

$$H(t_b) = 0, \qquad \dot{H}(t_b) > 0, \qquad a(t_b) = a_{\min} > 0. \tag{35}$$

Près du rebond, la condition d'accélération est satisfaite car

$$w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}. \tag{36}$$

## 6 Version activée par seuil

En incorporant le mécanisme d'activation par courbure, on définit la densité répulsive activée :

$$\rho_{\rm rep}(a) = \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\rm eff}}\right)\left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}\right), \tag{37}$$

et la pression activée :

$$p_{\rm rep}(a) = \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\rm eff}}\right)\left(-\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}\right). \tag{38}$$

L'équation gravitationnelle activée devient alors

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T^{(m)}_{\mu\nu} + \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\rm eff}}\right)\left(\Theta^{(\phi)}_{\mu\nu} + \Theta^{(A)}_{\mu\nu} + \Theta^{(\Omega_{\rm mix})}_{\mu\nu} + \Theta^{(\rm cross)}_{\mu\nu}\right). \tag{39}$$

## 7 Proposition synthétique

On peut résumer la structure minimale de la manière suivante :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T^{(m)}_{\mu\nu} + \mathcal{A}\left(\frac{W}{\kappa_X\langle \hat{X}^2\rangle}\right)\left[\Theta^{(\phi)}_{\mu\nu} + \Theta^{(A)}_{\mu\nu} + \Theta^{(\Omega_{\rm mix})}_{\mu\nu} + \Theta^{(\rm cross)}_{\mu\nu}\right].} \tag{40}$$

Au niveau FLRW minimal, cette structure se réduit à

$$\boxed{\rho_{\rm eff}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \qquad \alpha = \frac{3}{8\pi G}\alpha_W H_0^2, \qquad \beta = \beta_A + \beta_\Omega + \beta_{\rm cross}.} \tag{41}$$

## Conclusion

La formulation minimale précédente permet de donner un statut mathématique propre au *champ répulsif effectif* dans la RGH :

— il ne s'agit pas d'un champ fantôme fondamental;

— il s'agit d'une *source géométrique activée*;

— le terme en $a^{-2}$ est porté par le secteur tardif $\theta$;

— le terme en $a^{-4}$ provient du secteur interne hypercomplexe, du secteur symplectique mixte, et des éventuels couplages absorbés dans $\beta$;

— la répulsion s'interprète comme un effet *anti-focalisant* effectif, compatible avec un rebond cosmologique contrôlé.