Annexe — Conventions d'unités et normalisations dimensionnelles en RGH

Laurent Besson — rédaction assistée

Version de travail — 26 avril 2026, 18:08, heure de Paris

1 Conventions d'unités et normalisations dimensionnelles

1.1 Objet de l'annexe

Cette annexe fixe les conventions d'unités utilisées dans les applications numériques du cadre RGH/HGR. Son objectif est d'éviter tout mélange ambigu entre les unités géométriques, où l'on pose souvent $c = 1$, et les unités SI strictes, nécessaires dès que l'on donne des valeurs numériques en $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\mathrm{m^{-2}}$, $\mathrm{m^{-4}}$, secondes ou années-lumière.

Dans tout tableau numérique, sauf mention explicite contraire, on adopte les unités SI strictes. Les facteurs de c doivent donc être conservés lorsqu'ils sont nécessaires dimensionnellement.

1.2 Densité massique, densité d'énergie et pression

On distingue trois grandeurs :

$$\rho_m \quad : \text{densité massique, en } \mathrm{kg\,m^{-3}}, \tag{1}$$

$$u \quad : \text{densité d'énergie, en } \mathrm{J\,m^{-3}}, \tag{2}$$

$$p \quad : \text{pression, en } \mathrm{Pa} = \mathrm{J\,m^{-3}}. \tag{3}$$

Elles sont reliées par

$$u = \rho_m c^2. \tag{4}$$

Pour un fluide parfait d'équation d'état constante,

$$p = wu = w\rho_m c^2. \tag{5}$$

Dans les documents numériques RGH, lorsque le symbole ρ apparaît dans une formule de Friedmann avec un facteur $8\pi G/3$, il désigne par défaut une densité massique ρ_m.

1.3 Équation de Friedmann en SI strict

Pour une métrique FLRW, avec facteur d'échelle $a(t)$ et courbure spatiale normalisée $k \in \{-1, 0, +1\}$, on utilise la convention

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{6}$$

avec

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{7}$$

Si l'on préfère écrire l'équation en densité d'énergie u, alors

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}u + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{8}$$

Ces deux écritures sont équivalentes si $u = \rho_m c^2$.

1.4 Densité effective et terme normalisé dans H^2

On distingue strictement :

$$\rho_{\text{eff}} \quad : \text{densité massique effective, en kg m}^{-3}, \tag{9}$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \quad : \text{contribution déjà normalisée dans l'équation de Friedmann, en s}^{-2}. \tag{10}$$

Le lien entre les deux est

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_{\text{eff}}. \tag{11}$$

Ainsi, les deux écritures suivantes sont équivalentes mais ne doivent pas être confondues :

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_{\text{eff}}\right), \tag{12}$$

ou bien

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \mathcal{H}_{\text{eff}}. \tag{13}$$

Dans les applications numériques, on réserve le symbole ρ_{eff} à une densité physique ou effective exprimée en kg m^{-3}. Les termes directement ajoutés à H^2 doivent être notés $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ ou par un symbole équivalent de dimension s^{-2}.

1.5 Loi d'échelle d'un fluide parfait

Pour un fluide parfait de paramètre d'équation d'état constant w, la conservation standard donne

$$\dot{\rho}_m + 3H(1+w)\rho_m = 0, \tag{14}$$

soit

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}. \tag{15}$$

Les cas usuels sont :

$$w = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-3} \quad \text{matière non relativiste,} \tag{16}$$

$$w = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-4} \quad \text{radiation,} \tag{17}$$

$$w = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-6} \quad \text{fluide stiff.} \tag{18}$$

Lorsque les tableaux utilisent la même valeur de référence ρ_0 pour comparer radiation et fluide stiff, les colonnes stiff doivent être comprises comme comparatives. Une prédiction physique pour un secteur stiff exige de fixer sa densité actuelle propre, notée $\rho_{w=1,0}$.

1.6 Scalaire de Ricci en SI strict

Avec la convention de signature et de signe fixée dans le corps du texte, le scalaire de Ricci est relié à la trace du tenseur énergie-impulsion. En ordre de grandeur FLRW pour un fluide parfait, on retient la relation dimensionnelle

$$|R| \sim \frac{8\pi G}{c^2}\,|1-3w|\,\rho_m. \tag{19}$$

Cette formule montre immédiatement que, pour une radiation parfaite en FLRW strict,

$$w = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad R = 0. \tag{20}$$

Un seuil de Ricci $R_\star$ ne peut donc pas déclencher un rebond en radiation pure FLRW standard, sauf si l'on introduit un écart effectif $w_{\text{eff}} \neq 1/3$, un contenu non radiatif, ou une modification géométrique propre au secteur RGH.

La densité critique équivalente associée à un seuil $R_\star$ s'écrit, en SI strict,

$$\rho_\star(R) \sim \frac{c^2 R_\star}{8\pi G|1-3w|}. \tag{21}$$

1.7 Invariant de Kretschmann en SI strict

L'invariant de Kretschmann est défini par

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{22}$$

avec dimension m^{-4}.

En FLRW, pour un fluide parfait, on utilise comme calibrage d'ordre de grandeur

$$K \sim \frac{G^2}{c^4}\,\rho_m^2 \times \mathcal{C}_K(w), \tag{23}$$

où $\mathcal{C}_K(w)$ est un coefficient numérique dépendant de l'équation d'état et de la convention exacte utilisée.

Si l'on emploie la forme détaillée

$$K \approx \frac{64\pi^2 G^2}{3c^4}\, ho_m^2 \left(9w^2 + 12w + 7\right), \tag{24}$$

la densité critique équivalente associée à un seuil $K_\star$ est

$$\rho_\star(K) \approx \frac{c^2}{G}\sqrt{\frac{3K_\star}{64\pi^2\,(9w^2+12w+7)}}. \tag{25}$$

Toute utilisation d'une formule sans le facteur c^{-4} correspond implicitement à des unités géométriques $c = 1$ et ne doit pas être mélangée directement avec des densités en $\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

1.8 Invariant conforme de Weyl

L'invariant conforme de Weyl est défini par

$$W \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{26}$$

Il a pour dimension m^{-4}.

En FLRW strict,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \qquad W = 0. \tag{27}$$

Un déclencheur fondé sur $W \to W_\star$ suppose donc au minimum une anisotropie, une inhomogénéité, un cisaillement, une structure de domaine, ou une branche Weyl non strictement FLRW.

Dans les modèles jouets où l'on paramètre les marées par un scalaire sans dimension Σ, on utilise l'ansatz dimensionnel

$$W \sim \kappa\Sigma^2 H^4. \tag{28}$$

Avec

$$H^2 \sim \frac{8\pi G}{3}\rho_m, \tag{29}$$

on obtient, en SI strict,

$$W \sim \kappa\Sigma^2\left(\frac{8\pi G}{3c^2}\right)^2 u^2 = \kappa\Sigma^2\left(\frac{8\pi G}{3}\right)^2 \rho_m^2, \tag{30}$$

si l'on passe par H^2 déjà exprimé en fonction de la densité massique. La cohérence dimensionnelle doit alors être vérifiée selon la définition précise de l'invariant géométrique utilisé.

Pour éviter toute ambiguïté dans les tableaux, on écrira la densité critique équivalente sous la forme calibrée

$$\rho_\star(W,\Sigma) = \frac{3}{8\pi G}\sqrt{\frac{W_\star}{\kappa\Sigma^2}}\,\mathcal{U}_W, \tag{31}$$

où $\mathcal{U}_W$ est le facteur de conversion dimensionnel choisi. En unités géométriques $c = 1$, $\mathcal{U}_W = 1$. En SI strict, $\mathcal{U}_W$ doit être fixé explicitement par la convention reliant H^4 et l'invariant W en m^{-4}.

1.9 Rayons, distances et années-lumière

Les applications numériques utilisent souvent une échelle de référence

$$R_0 = 96\,\mathrm{Gly}. \tag{32}$$

Cette grandeur est une échelle physique associée à un volume comobile de référence. Elle ne doit pas être interprétée comme un rayon matériel rigide de l'Univers.

La conversion utilisée est

$$1\,\mathrm{a.l.} = 9.460730472 \times 10^{15}\,\mathrm{m}. \tag{33}$$

Ainsi,

$$96\,\mathrm{Gly} = 96 \times 10^9\,\mathrm{a.l.} \simeq 9.082 \times 10^{26}\,\mathrm{m}. \tag{34}$$

Si $x = a_b/a_0$, alors

$$R_b = R_0 x. \tag{35}$$

1.10 Règle de lecture des tableaux numériques

Dans tout tableau numérique RGH/HGR :

1. les densités indiquées en $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ sont des densités massiques ;
2. les densités d'énergie doivent être indiquées en $\mathrm{J\,m^{-3}}$;
3. les termes ajoutés directement à H^2 doivent être indiqués en s^{-2} ;
4. les seuils $R_\star$, $K_\star$ et $W_\star$ doivent porter respectivement les dimensions m^{-2}, m^{-4} et m^{-4} ;
5. toute formule issue d'une convention $c = 1$ doit être reconvertie avant insertion dans un tableau SI ;
6. les colonnes stiff utilisant la même normalisation que la radiation sont des comparaisons d'exposants, non des prédictions physiques autonomes.

1.11 Résumé opérationnel

La convention recommandée pour les applications numériques est la suivante :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m, \tag{36}$$

$$u = \rho_m c^2, \tag{37}$$

$$p = w\rho_m c^2, \tag{38}$$

$$R \sim \frac{8\pi G}{c^2}\rho_m, \tag{39}$$

$$K \sim \frac{G^2}{c^4}\rho_m^2, \tag{40}$$

$$W \sim \frac{G^2}{c^4}\rho_m^2 \quad \text{hors FLRW strict ou avec anisotropies.} \tag{41}$$

Cette annexe sert de référence commune aux applications numériques. Toute déviation volontaire, par exemple le passage en unités géométriques $c = 1$, doit être annoncée explicitement avant les formules et ne doit pas être mélangée avec des valeurs SI dans un même tableau.