

# Interaction entre deux champs hypercomplexes dans un cadre de relativité générale hypercomplexe

Note autonome de travail

22 avril 2026

## Résumé

On construit un modèle minimal et autonome décrivant l'interaction entre deux champs hypercomplexes internes dans un cadre de type connexion–courbure. L'idée centrale est qu'un champ hypercomplexe est représenté par une connexion interne non commutative, de sorte que l'interaction entre deux secteurs peut apparaître de quatre manières : par mélange cinétique des courbures, par commutateur croisé entre connexions, par couplage via la géométrie émergente, ou par verrouillage de structures internes. On retient ici le modèle minimal le plus directement calculable : deux connexions internes  $A_\mu$  et  $B_\mu$ , leurs courbures  $F_{\mu\nu}^{(A)}$  et  $F_{\mu\nu}^{(B)}$ , un terme de mélange cinétique proportionnel à  $\epsilon$ , et un terme d'interaction non commutative proportionnel à  $\lambda$ . On en déduit les équations du mouvement sous forme schématique ainsi que le tenseur énergie–impulsion effectif complet. Le document est autosuffisant et peut servir de base à une section d'article ou à un appendice de développement ultérieur.

## 1 Objet de la note

Cette note formalise une idée simple mais structurante : *que se passe-t-il lorsque deux champs hypercomplexes coexistent et interagissent dans un même secteur géométrique ?*

Le point de vue adopté est le suivant. Dans une reformulation géométrique de type symplectique ou fibrée, la non-commutativité interne n'est pas portée directement par les coordonnées de l'espace-temps, mais par une structure interne, typiquement sous la forme d'une connexion sur une fibre interne. Dès lors, un champ hypercomplexe peut être représenté par une connexion interne, et sa dynamique par une courbure de type Yang–Mills non abélienne.

Nous cherchons ici un modèle minimal autonome, c'est-à-dire :

- suffisamment simple pour être calculable ;
- suffisamment général pour capturer l'idée physique ;
- suffisamment propre pour être réutilisable dans un manuscrit scientifique.

## 2 Hypothèses, intuitions, modèle, résultats formels

### 2.1 Hypothèses

On introduit deux champs hypercomplexes internes, représentés par deux connexions

$$A_\mu, \quad B_\mu, \tag{1}$$

définies sur l'espace-temps observable, mais à valeurs dans une algèbre interne non commutative. On notera cette algèbre par  $\mathcal{H}$ , sans imposer à ce stade une réalisation unique ; on peut penser

à une structure quaternionique, ou à une algèbre interne plus large contenant un sous-secteur quaternionique.

Deux lectures sont possibles.

1.  $A_\mu$  et  $B_\mu$  vivent dans le *même* secteur interne, et peuvent donc interagir directement par commutateur.
2.  $A_\mu$  et  $B_\mu$  vivent dans *deux sous-secteurs distincts* d'une structure élargie ; l'interaction directe peut alors être absente, réduite, ou médiée par la géométrie émergente.

Dans cette note, on adopte le cadre le plus simple : les deux champs sont suffisamment proches pour que les termes croisés aient un sens invariant, en particulier

$$[A_\mu, B_\nu] \neq 0 \tag{2}$$

soit autorisé en général.

## 2.2 Intuitions physiques

L'idée physique se résume en trois images.

- **Deux courbures internes.** Chaque champ hypercomplexe courbe la fibre interne. L'un peut donc ressentir la présence de l'autre via la courbure totale.
- **Deux règles de transport concurrentes.** Si  $A_\mu$  et  $B_\mu$  n'induisent pas le même transport interne, leur incompatibilité se mesure naturellement par un commutateur croisé.
- **Une énergie d'interférence géométrique.** Même si les deux secteurs restent distincts, leurs densités d'énergie peuvent se mélanger par un terme bilinéaire en courbures.

## 2.3 Modèle minimal retenu

Le modèle retenu repose sur deux courbures internes

$$F_{\mu\nu}^{(A)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{3}$$

$$F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu]. \tag{4}$$

On ajoute à leurs termes cinétiques propres :

- un **mélange cinétique** entre courbures, de coefficient  $\epsilon$  ;
- un **terme d'interaction non commutative directe**, de coefficient  $\lambda$ .

## 2.4 Résultats formels obtenus

Les résultats formels principaux sont :

1. l'action minimale à deux champs ;
2. les équations du mouvement sous forme covariante schématique ;
3. le tenseur énergie-impulsion effectif complet du système ;
4. l'identification claire des cas limites ( $\epsilon = 0$ ,  $\lambda = 0$ , ou  $[A, B] = 0$ ).

### 3 Action minimale à deux champs hypercomplexes

On considère l'action effective

$$S[A, B, g] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{eff}}, \quad (5)$$

avec

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(A)\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (6)$$

et

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \lambda \text{Tr}([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]). \quad (7)$$

Le premier terme de (7) décrit un *mélange cinétique* entre les deux secteurs hypercomplexes. Le second terme mesure leur *interaction non commutative directe*.

**Remarque 1.** *Le terme en  $\epsilon$  couple les courbures, tandis que le terme en  $\lambda$  couple les algèbres. Cette distinction est conceptuellement essentielle : l'un mélange la propagation, l'autre pénalise ou favorise certaines configurations de non-commutation.*

### 4 Structure du commutateur croisé

Il est utile d'introduire le tenseur croisé

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} := [A_\mu, B_\nu]. \quad (8)$$

Le régime suivant joue un rôle central :

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} = 0 \iff [A_\mu, B_\nu] = 0 \text{ pour tous } \mu, \nu. \quad (9)$$

Dans ce cas, l'interaction hypercomplexe directe disparaît et seul subsiste, le cas échéant, le mélange cinétique. À l'inverse, lorsque  $\mathcal{C}_{\mu\nu} \neq 0$ , le système possède une véritable énergie d'interaction interne.

### 5 Équations du mouvement

Une variation de l'action par rapport à  $A_\mu$  puis à  $B_\mu$  fournit, sous forme schématique, les équations

$$D_\mu^{(A)} F^{(A)\mu\nu} + \epsilon D_\mu^{(A)} F^{(B)\mu\nu} + \lambda \mathcal{J}_{AB}^\nu = 0, \quad (10)$$

$$D_\mu^{(B)} F^{(B)\mu\nu} + \epsilon D_\mu^{(B)} F^{(A)\mu\nu} + \lambda \mathcal{J}_{BA}^\nu = 0, \quad (11)$$

où  $D_\mu^{(A)}$  et  $D_\mu^{(B)}$  désignent les dérivées covariantes dans les deux secteurs, et où  $\mathcal{J}_{AB}^\nu$ ,  $\mathcal{J}_{BA}^\nu$  sont les courants effectifs issus de la variation du terme quartique en commutateurs.

#### 5.1 Forme des courants d'interaction

Sans imposer ici un calcul détaillé jusqu'au bout, on peut anticiper la structure générale de ces courants. En notant

$$\delta \mathcal{C}_{\mu\nu} = [\delta A_\mu, B_\nu] + [A_\mu, \delta B_\nu], \quad (12)$$

la variation du terme

$$\text{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\nu} \mathcal{C}^{\mu\nu}) \quad (13)$$

produit nécessairement des contributions du type

$$\mathcal{J}_{AB}^\nu \sim [B_\mu, [A^\nu, B^\mu]], \quad \mathcal{J}_{BA}^\nu \sim [A_\mu, [B^\nu, A^\mu]], \quad (14)$$

à des facteurs de symétrisation et de convention près.

On retiendra surtout le fait qualitatif suivant :

les équations (10)–(11) ne décrivent plus deux champs indépendants, mais deux champs qui se rétro-agissent à la fois par leurs courbures et par leur non-commutation.

## 6 Tenseur énergie–impulsion effectif

### 6.1 Définition

Le tenseur énergie–impulsion du système est défini par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (15)$$

Il est naturel de le décomposer sous la forme

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(A)} + T_{\mu\nu}^{(B)} + T_{\mu\nu}^{(\epsilon)} + T_{\mu\nu}^{(\lambda)}. \quad (16)$$

### 6.2 Contributions propres des deux secteurs

La contribution propre du champ  $A_\mu$  est

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = \text{Tr} \left( F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(A)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left( F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(A)\rho\sigma} \right). \quad (17)$$

De même, pour le champ  $B_\mu$ ,

$$T_{\mu\nu}^{(B)} = \text{Tr} \left( F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(B)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left( F_{\rho\sigma}^{(B)} F^{(B)\rho\sigma} \right). \quad (18)$$

Ces deux termes sont les analogues directs du tenseur énergie–impulsion Yang–Mills standard.

### 6.3 Terme de mélange cinétique

Le terme de mélange cinétique fournit

$$T_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \epsilon \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} \left( F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(B)\rho}{}_\nu + F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(A)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left( F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(B)\rho\sigma} \right) \right]. \quad (19)$$

Ce terme peut être lu comme une *énergie commune de corrélation géométrique*. Les deux champs ne portent plus seulement leur énergie propre ; ils stockent aussi une énergie mixte due à la corrélation de leurs courbures.

### 6.4 Terme d’interaction non commutative directe

En introduisant

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} := [A_\mu, B_\nu], \quad (20)$$

le terme quartique donne un tenseur de la forme

$$T_{\mu\nu}^{(\lambda)} = -2\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho} + \mathcal{C}_{\nu\rho}\mathcal{C}_{\mu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \quad (21)$$

Quand aucune ambiguïté n'est à craindre sur la symétrisation en  $\mu, \nu$ , on peut écrire de façon plus compacte

$$T_{\mu\nu}^{(\lambda)} \simeq -4\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \quad (22)$$

## 6.5 Expression complète

En regroupant les blocs (17), (18), (19) et (21), on obtient

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(A)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(A)\rho\sigma}\right) \\ & + \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(B)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(B)} F^{(B)\rho\sigma}\right) \\ & + \epsilon \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(B)\rho}{}_{\nu} + F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(A)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(B)\rho\sigma}\right) \right] \\ & - 2\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho} + \mathcal{C}_{\nu\rho}\mathcal{C}_{\mu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (23)$$

## 7 Interprétation physique du tenseur effectif

L'expression (23) se lit naturellement comme la somme de trois contenus physiques.

### 7.1 Deux énergies propres

Les deux premiers blocs sont les densités d'énergie et de pression transportées séparément par chacun des champs hypercomplexes.

### 7.2 Une énergie d'interférence

Le terme en  $\epsilon$  représente une énergie d'interférence ou de corrélation entre les deux secteurs. Il n'exprime pas une non-commutativité directe, mais une co-dynamique des courbures.

### 7.3 Une énergie de non-compatibilité algébrique

Le terme en  $\lambda$  mesure le coût énergétique associé au défaut d'alignement interne entre les deux connexions. Selon le signe de  $\lambda$  :

- si  $\lambda > 0$ , les configurations fortement non commutatives sont pénalisées ;
- si  $\lambda < 0$ , la théorie peut favoriser des configurations non triviales, possiblement liées à des domaines, défauts, ou états condensés.

## 8 Cas limites

### Cas 1 : secteurs complètement découplés

$$\epsilon = 0, \quad \lambda = 0. \quad (24)$$

Alors

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(A)} + T_{\mu\nu}^{(B)}. \quad (25)$$

On a simplement deux fluides géométriques internes indépendants.

### Cas 2 : mélange cinétique seul

$$\epsilon \neq 0, \quad \lambda = 0. \quad (26)$$

Les deux champs restent algébriquement séparés, mais leurs courbures se mélangent dynamiquement.

### Cas 3 : interaction non commutative seule

$$\epsilon = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (27)$$

La physique nouvelle provient alors uniquement du secteur de commutateur croisé.

### Cas 4 : commutation exacte

$$[A_\mu, B_\nu] = 0 \quad \forall \mu, \nu. \quad (28)$$

Alors

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} = 0, \quad T_{\mu\nu}^{(\lambda)} = 0, \quad (29)$$

et toute l'interaction directe disparaît.

## 9 Lien avec une géométrie émergente

Le modèle précédent peut être vu comme un sous-secteur effectif d'une théorie plus large dans laquelle la métrique observable émerge d'une structure symplectique et d'une structure interne. Dans cette lecture, deux champs hypercomplexes peuvent interagir non seulement par les termes explicites (7), mais aussi parce qu'ils contribuent ensemble à la géométrie émergente.

Schématiquement, si la métrique effective dépend de deux secteurs internes,

$$g(X, Y) = \Omega(X, \mathcal{J}(A, B)Y), \quad (30)$$

alors les champs  $A_\mu$  et  $B_\mu$  modifient indirectement :

- la connexion effective ;
- la courbure effective ;
- la dynamique cosmologique ou galactique ;
- le contenu gravitationnel observable.

Autrement dit, même en l'absence d'interaction directe explicite, deux champs hypercomplexes peuvent se coupler parce qu'ils *co-construisent* la géométrie effective.

## 10 Discussion méthodologique

Ce document n'impose volontairement ni une algèbre hypercomplexe unique, ni une réduction cosmologique précise, ni un choix complet de conventions de signe. Cette retenue est méthodologique.

Ce qui est fixé ici, c'est la *charpente* :

1. deux connexions internes ;
2. deux courbures propres ;
3. un mélange cinétique bilinéaire ;
4. une interaction quartique issue du commutateur croisé ;
5. un tenseur énergie-impulsion effectif calculable.

Les points à fixer dans une étape ultérieure sont :

- la réalisation exacte de l'algèbre interne ;
- les conventions de trace et de normalisation ;
- la réduction FLRW ou statique sphérique ;
- le signe physiquement admissible du terme en  $\lambda$  ;
- la conservation covariante détaillée de  $T_{\mu\nu}$  une fois les équations du mouvement imposées.

## 11 Conclusion

Le modèle minimal construit ici montre qu'une interaction entre deux champs hypercomplexes peut être décrite de manière propre dans un langage de type connexion-courbure. Deux mécanismes distincts apparaissent immédiatement.

1. Un **mélange cinétique** entre courbures, qui traduit une corrélation dynamique entre secteurs.
2. Une **interaction non commutative directe**, qui mesure le défaut d'alignement algébrique entre les deux connexions.

Le tenseur énergie-impulsion effectif obtenu constitue la sortie la plus immédiatement exploitable de cette construction. Il fournit la source gravitationnelle effective d'un système à deux champs hypercomplexes, et ouvre naturellement vers des applications cosmologiques, des solutions de type halo géométrique, ou des structures de domaines internes.

En ce sens, l'interaction entre deux champs hypercomplexes n'est pas seulement une généralisation technique ; elle esquisse déjà une physique multi-secteur de la géométrie interne.

## A Version courte réutilisable dans un manuscrit

Pour un usage rapide dans un article, on peut condenser le modèle sous la forme suivante.

On introduit deux connexions hypercomplexes  $A_\mu$  et  $B_\mu$  avec courbures

$$F_{\mu\nu}^{(A)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu].$$

L'action minimale à deux champs est

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(A)\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu} \right) - \frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left( F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \lambda \text{Tr}([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]) \right]$$

Le tenseur énergie–impulsion effectif se décompose en contributions propres, en un terme de mélange cinétique et en un terme d'interaction non commutative directe.

## B Remarque sur les conventions de signe

Le signe exact du bloc quartique dans le tenseur énergie–impulsion dépend des conventions suivantes :

- signature de la métrique ;
- définition de  $T_{\mu\nu}$  par variation par rapport à  $g^{\mu\nu}$  ou  $g_{\mu\nu}$  ;
- normalisation de la trace interne ;
- symétrisation choisie dans la contraction du terme  $[A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]$ .

La structure tensorielle générale exposée dans ce document reste toutefois stable : une partie quadratique en  $\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_\nu{}^\rho$  et une partie proportionnelle à  $g_{\mu\nu} \text{Tr}(\mathcal{C}^2)$ .