

RELATIVITÉ GÉNÉRALE HYPERCOMPLEXE – RÉÉCRITURE SYMPLECTIQUE COMPLÈTE

LAURENT BESSON (IDÉE INITIALE)
RÉÉCRITURE SYMPLECTIQUE : CHATGPT

RÉSUMÉ. Ce document est une *réécriture intégrale* du manuscrit “Relativité générale hyper-complexe” dans un cadre *fondamentalement symplectique*. Au lieu de poser la métrique comme variable primitive et de “quaternioniser” directement les coordonnées, on reformule l’ensemble des ingrédients (coordonnées, dérivées, transport, courbures, lagrangiens, équations de champ) en termes d’une variété fibrée $\mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F}$ munie d’une 2-forme symplectique globale Ω , d’une structure hypercomplexe interne dynamique (I, J, K) , et d’une connexion de Weyl (jauge d’échelle) ϕ . La métrique devient une structure émergente via une compatibilité presque-Kähler (au sens de Weyl).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	4
2. Définition	4
2.1. Définition de l’espace-temps fibré	4
2.2. Définition de la structure symplectique	4
2.3. Définition des quaternions (rappel interne)	5
2.4. Notation d’Einstein	5
3. Postulat	5
1er postulat (équivalence)	5
2e postulat (hypercomplexité interne)	5
3e postulat (Weyl)	5
4. Notations diverses (dérivées covariantes, commutateurs, etc.)	5
4.1. Dérivée covariante et séparation base/fibre	5
4.2. Structure hypercomplexe comme champ	5
4.3. Commutateur de dérivées	5
5. Tenseurs	6
5.1. Transport d’un vecteur fibré	6
5.2. Calcul détaillé du double-transport (analogue au manuscrit historique)	6
5.3. Courbure : décomposition en quatre blocs	7
5.4. Interprétation symplectique : la forme de courbure	7
6. Lagrangiens Possibles pour RGH	7
6.1. Terme gravitationnel (émergent)	7
6.2. Lagrangien du champ de Weyl	8
6.3. Lagrangien du champ hypercomplexe interne	8
6.4. Termes de couplage	8
6.5. Action totale	8
7. Dérivation des équations de Champ à partir du Lagrangien	8

7.1. Variations explicites des champs fondamentaux	8
7.2. Équations pour le champ de Weyl	9
7.3. Équations pour le champ interne	9
7.4. Équations gravitationnelles effectives	9
8. Stabilité du Lagrangien et théorème d'Ostrogradsky	10
8.1. Pourquoi la formulation symplectique aide	10
8.2. Remarque sur la compatibilité Weyl	10
Annexe : sur la figure de transport (TikZ)	10
9. Cosmologie FLRW dans la reformulation symplectique	11
9.1. Métrique émergente : rappel minimal	11
9.2. Ansatz FLRW explicite pour A et pour Ω (pas d'ambiguïté d'isotropie)	11
9.3. Condition de rebond (solution type)	12
9.4. Identification explicite de α et β à partir de l'action (réduction FLRW)	12
9.5. Pression effective et équation d'état w_{eff} près du rebond	14
9.6. Estimation d'ordres de grandeur et falsifiabilité	14
10. Perspectives de quantification	16
Annexe A. Dictionnaire entre la formulation RGH historique et la reformulation symplectique	16
Quantification	18
Annexe B. Quantification canonique du secteur interne RGH	18
B.1. Action interne	18
B.2. Décomposition 3+1	18
B.3. Hamiltonien	18
B.4. Quantification	18
Annexe C. Construction d'un observable interne X et promotion quantique	19
C.1. Invariants de jauge et décomposition 3+1	19
C.2. Définition de l'observable interne X	19
C.3. Promotion quantique	19
C.4. Seuil effectif Weyl	19
Annexe D. Prescription d'ordre et approximation semi-classique de $\langle \hat{X}^2 \rangle$	20
D.1. Prescription d'ordre (choix minimal)	20
D.2. Approximation semi-classique	21
D.3. Seuil effectif et interprétation statistique	21
Annexe E. Galaxies dominées par matière noire et halos hypercomplexes dans la RGH	22
E.1. Contexte observationnel	22
E.2. Interprétation standard dans le modèle Λ CDM	22
E.3. Limites conceptuelles	23
E.4. Cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe	23
E.5. Hypothèse : halos hypercomplexes	23
E.6. Structure possible	23
E.7. Défaut de couplage baryonique	23
E.8. Domaines topologiques	24
E.9. Prédiction observationnelles	24
E.10. Intérêt pour la RGH	24
E.11. Analogie conceptuelle	24
Annexe F. Flux baryonique galactique et éjection par feedback stellaire	25
F.1. Motivation	25
F.2. Énergie de liaison gravitationnelle	25

F.3.	Vitesse d'éjection	25
F.4.	Milieu circumgalactique	26
F.5.	Éjection dans le milieu intergalactique	26
F.6.	Flux baryonique	26
F.7.	Limites de l'expulsion	26
F.8.	Interprétation possible dans la RGH	27
F.9.	Conséquences observationnelles	27
Annexe G.	Halos hypercomplexes et courbes de rotation galactiques	28
G.1.	Motivation	28
G.2.	Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique	28
G.3.	Masse effective intérieure	28
G.4.	Courbe de rotation	28
G.5.	Interprétation RGH	29
G.6.	Origine possible du profil en $1/r^2$	29
G.7.	Modèle minimal effectif	29
G.8.	Conséquences observationnelles	30
G.9.	Conclusion	30
G.10.	Définition minimale du modèle RGHCl	31
Annexe H.	Annexe — Esquisse d'une extension hypercomplexe Clifford–quaternionique (RGHCl)	32
H.1.	Motivation	32
H.2.	Structure algébrique étendue	32
H.3.	Variété de base et fibre interne	32
H.4.	Principe de projection observable	32
H.5.	Connexion totale étendue	33
H.6.	Courbure totale	33
H.7.	Action effective minimale	33
H.8.	Équations de champ effectives	34
H.9.	Interprétation physique	34
H.10.	Position méthodologique	34
H.11.	Résumé	34
H.12.	Ansatz affine minimale du secteur hypercomplexe	35
Annexe I.	Annexe — Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurelle avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou	36
I.1.	Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurelle avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou	36
Références		38

1 INTRODUCTION

La relativité générale (RG) décrit la gravitation comme une géométrie de l'espace-temps. La théorie quantique, elle, s'exprime naturellement en termes d'espaces d'états et d'opérateurs non commutatifs. Une intuition ancienne (Hamilton, Pauli, Weyl, Cartan, etc.) est que la *non-commutativité* et/ou les *degrés internes* peuvent être encodés géométriquement.

Le manuscrit historique RGH adoptait l'approche la plus directe : rendre *hypercomplexes* les coordonnées du quadri-vecteur et suivre les conséquences sur les symboles de connexion et la courbure, en y réintroduisant une jauge d'échelle à la Weyl. La présente version conserve l'esprit (hypercomplexité + Weyl + nouveaux tenseurs), mais *change le choix des primitives* :

- la structure première n'est plus la métrique mais une *forme symplectique* Ω (structure de phase) ;
- l'hypercomplexité n'est plus une “coordonnée quaternionique” posée à la main, mais une *fibre interne* $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$ portant un triplet (I, J, K) ;
- la jauge d'échelle de Weyl est un champ ϕ relié à la compatibilité *conforme* entre Ω et la métrique émergente.

Cette réécriture “en symplectique” est particulièrement adaptée à : (i) une lecture hamiltonienne/ADM, (ii) la quantification canonique, (iii) une interprétation unifiée des termes additionnels du transport (anciens $H_{\mu i}^j$ et $\Phi_{\mu j}^i$) comme connexions sur la fibre interne.

2 DÉFINITION

2.1 Définition de l'espace-temps fibré. On considère une variété totale

$$(2.1) \quad \mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F},$$

où M^4 est l'espace-temps (variété différentielle orientée de dimension 4) et \mathcal{F} une fibre interne de dimension réelle 4 localement isomorphe aux quaternions \mathbb{H} . Un point est noté (x^μ, q^a) avec x^μ coordonnées sur M^4 et q^a coordonnées internes sur \mathcal{F} .

2.2 Définition de la structure symplectique. La donnée fondamentale est une 2-forme symplectique globale

$$(2.2) \quad \Omega \in \Omega^2(\mathcal{M}), \quad d\Omega = 0, \quad \Omega \text{ non dégénérée.}$$

On admet une décomposition naturelle en parties “espace-temps”, “interne” et “mixte” :

$$(2.3) \quad \Omega = \Omega_{\text{ext}} + \Omega_{\text{int}} + \Omega_{\text{mix}}.$$

Typiquement,

$$(2.4) \quad \Omega_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

$$(2.5) \quad \Omega_{\text{int}} = \sum_{a=1}^3 \omega^a(x) \sigma_a,$$

$$(2.6) \quad \Omega_{\text{mix}} = A^a{}_\mu(x) dx^\mu \wedge \sigma_a,$$

où $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est un triplet de 2-formes sur \mathcal{F} et $A^a{}_\mu$ encode le couplage “base-fibre” qui jouait historiquement le rôle des nouveaux tenseurs du transport.

2.3 Définition des quaternions (rappel interne). La fibre \mathcal{F} est localement modélisée par $\mathbb{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(1, h_1, h_2, h_3)$ avec

$$(2.7) \quad h_1 h_2 h_3 = -1, \quad h_i^2 = -1 \ (i \neq 0),$$

et la non-commutativité est encodée par un commutateur

$$(2.8) \quad [h_i, h_j] \equiv h_i h_j - h_j h_i = 2 \varepsilon_{ij}^{\ \ k} h_k.$$

Dans la formulation symplectique, cette non-commutativité ne vit pas dans les coordonnées x^μ mais dans la géométrie interne (et donc dans les connexions sur la fibre).

2.4 Notation d'Einstein. Nous utilisons la convention de sommation d'Einstein sur indices répétés (hauts/bas) lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

3 POSTULAT

1er postulat (équivalence). Le principe d'équivalence reste vrai : localement, au premier ordre, on peut choisir un repère où l'inertie et la gravitation se confondent.

2e postulat (hypercomplexité interne). Les degrés de liberté “hypercomplexes” sont portés par une fibre interne $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$ et interagissent avec M^4 via la partie mixte Ω_{mix} de la structure symplectique. La non-commutativité est donc géométrisée par une connexion interne.

3e postulat (Weyl). La comparaison des longueurs est définie à une jauge d'échelle près : il existe une 1-forme de Weyl ϕ telle que

$$(3.1) \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \phi_\lambda g_{\mu\nu},$$

où g est la métrique *émergente* (définie plus loin) et ∇ une connexion affine.

4 NOTATIONS DIVERSES (DÉRIVÉES COVARIANTES, COMMUTATEURS, ETC.)

4.1 Dérivée covariante et séparation base/fibre. Au lieu d'écrire $\partial/\partial(x^{\mu i} h_i)$ comme dans la version historique, on introduit une connexion sur la fibration $\mathcal{M} \rightarrow M^4$. On note ∇_μ la dérivée covariante le long de ∂_μ (base) et ∇_a celle le long de la fibre. Schématiquement, toute variation infinitésimale se décompose en

$$(4.1) \quad d = d_{\text{ext}} + d_{\text{int}},$$

et les “coefficients” $H_{\mu i}^{\ j}$ du texte historique sont réinterprétés comme coefficients de connexion interne :

$$(4.2) \quad \nabla_\mu h_i = H_{\mu i}^{\ j} h_j.$$

4.2 Structure hypercomplexe comme champ. On autorise (I, J, K) à dépendre de x :

$$(4.3) \quad \nabla_\mu I = \mathcal{A}_\mu \cdot I, \quad \nabla_\mu J = \mathcal{A}_\mu \cdot J, \quad \nabla_\mu K = \mathcal{A}_\mu \cdot K,$$

où \mathcal{A}_μ est une connexion interne (généralisant A_μ^a).

4.3 Commutateur de dérivées. Le cœur de la construction reste l'opérateur

$$(4.4) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu],$$

qui produit une courbure effective composée d'une part riemannienne (base), et d'une part interne (fibre), plus des termes de couplage.

5 TENSEURS

L'objectif de cette section est de re-définir courbure et transport en termes symplectiques, tout en retrouvant la structure “somme de contributions” du manuscrit historique : Riemann/Ricci + Weyl/EM + champ interne + couplages croisés.

5.1 Transport d'un vecteur fibré.

5.2 Calcul détaillé du double-transport (analogue au manuscrit historique). Pour garder une correspondance *pas à pas* avec le document source, on explicite ici le calcul de $(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)X$ sur un champ fibré.

On part d'un champ de type

$$(5.1) \quad X = x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha,$$

où x^α sont des composantes sur la base, u_i une base interne, et ψ^i des coefficients internes (qui, dans l'écriture historique, étaient notés φ^i).

La dérivée covariante le long de ∂_μ s'écrit

$$(5.2) \quad \nabla_\mu X = \partial_\mu (x^\alpha \psi^i) u_i e_\alpha + x^\alpha \psi^i \nabla_\mu (u_i) e_\alpha + x^\alpha \psi^i u_i \nabla_\mu (e_\alpha)$$

$$(5.3) \quad = \partial_\mu x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \partial_\mu \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \psi^i H_{\mu i}^j u_j e_\alpha + x^\alpha \psi^i u_i \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta.$$

Comme dans le manuscrit d'origine, il est commode de regrouper les termes de connexion dans une quantité effective

$$(5.4) \quad \gamma_\mu \equiv \Phi_{\mu j}^i \psi^j u_i + \psi^i H_{\mu i}^j u_j + \psi^i u_i \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha,$$

où l'objet $\Phi_{\mu j}^i$ est interprété ici comme connexion de Weyl et/ou connexion d'échelle sur le secteur interne (ce qui correspond à la lecture “Weyl/EM” de la version historique).

On obtient alors la forme compacte :

$$(5.5) \quad \nabla_\mu X = \partial_\mu x^\alpha \psi^i u_i e_\alpha + x^\alpha \gamma_\mu e_\alpha.$$

En réappliquant ∇_ν puis en antisymétrisant, on isole les termes d'ordre connexion :

$$(5.6) \quad (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)X = x^\alpha \left(\partial_\mu \gamma_\nu - \partial_\nu \gamma_\mu + [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) e_\alpha + (\text{termes de base sur } x^\alpha).$$

Le commutateur $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ contient :

- le commutateur des connexions internes, responsable de la courbure quaternionique (analogue au tenseur T),
- le commutateur des connexions d'échelle (analogue au tenseur F),
- des mélanges avec Γ donnant les couplages croisés (analogue au bloc C).

En particulier, en séparant explicitement les contributions, on retrouve une écriture du type :

$$(5.7) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho X^\sigma e_\rho + \left(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu + [\Phi_\mu, \Phi_\nu] \right) \cdot X + \left(\partial_\mu H_\nu - \partial_\nu H_\mu + [H_\mu, H_\nu] \right) \cdot X + C_{\mu\nu} \cdot X,$$

qui est la traduction symplectique directe de la décomposition finale du manuscrit source (tenseur riemannien + “Weyl/EM” + “champ quaternionique” + couplages).

Soit une section (champ) X du fibré tangent total $T\mathcal{M}$. Dans une base adaptée, on peut écrire symboliquement

$$(5.8) \quad X = X^\alpha e_\alpha + X^i u_i,$$

où e_α est une base sur M^4 et u_i une base interne sur \mathcal{F} (liée aux h_i). Le transport parallèle est défini par une connexion totale ∇ telle que

$$(5.9) \quad \nabla_\mu e_\alpha = \Gamma_{\mu\alpha}^\beta e_\beta, \quad \nabla_\mu u_i = H_{\mu i}^j u_j, \quad \nabla_\mu(\text{échelle}) = \Phi_\mu(\text{échelle}),$$

où l'objet Φ joue le rôle de connexion de Weyl (jauge d'échelle) dans l'écriture historique.

5.3 Courbure : décomposition en quatre blocs. On définit la courbure totale par

$$(5.10) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = \mathcal{R}_{\mu\nu} X.$$

Dans une base adaptée, on peut la décomposer en contributions :

$$(5.11) \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X = R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho X^\sigma e_\rho + F_{\mu\nu} \cdot X + T_{\mu\nu} \cdot X + C_{\mu\nu} \cdot X.$$

5.3.1 Bloc riemannien (Einstein/Riemann standard).

$$(5.12) \quad R^{(\Gamma)}_{\sigma\mu\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}{}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}{}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}{}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}{}^\lambda.$$

Sa contraction donne le tenseur de Ricci puis le tenseur d'Einstein usuel.

5.3.2 Bloc Weyl (jauge d'échelle). La connexion de Weyl est portée par une 1-forme $\phi = \phi_\mu dx^\mu$. Son “champ” est la 2-forme

$$(5.13) \quad F^{(\phi)} = d\phi,$$

et l'on retrouve une structure de type Maxwell (éventuellement non abélienne si l'on étend l'espace des échelles).

5.3.3 Bloc hypercomplexe interne. La connexion interne \mathcal{A}_μ (issue de Ω_{mix}) possède une courbure

$$(5.14) \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu],$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le commutateur quaternionique (non-commutativité interne). C'est la réinterprétation symplectique des objets historiques $H_{\mu i}{}^j$ et $T_{n\mu\nu}^m$.

5.3.4 Termes mixtes (couplages croisés). Les termes $C_{\mu\nu}$ regroupent les mélanges gravité–Weyl–interne. Ils proviennent géométriquement de la non-trivialité de la fibration et des compatibilités imposées entre Ω , (I, J, K) et g . On peut les voir comme la partie “torsion/couplage” de la courbure totale (5.11).

5.4 Interprétation symplectique : la forme de courbure. Dans la version symplectique, il est naturel de coder la dynamique avec des formes :

$$(5.15) \quad \mathbb{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \quad F^{(\phi)} = d\phi.$$

La structure de Ω suggère également un invariant topologique

$$(5.16) \quad \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega,$$

qui joue un rôle fondamental dans l'action (section suivante).

6 LAGRANGIENS POSSIBLES POUR RGH

Le manuscrit historique proposait un Lagrangien total $L = L_{\text{grav}} + L_\Phi + L_H + L_{\text{coup}} + L_{\text{mat}}$. Nous conservons ce découpage, mais en l'interprétant comme une action de formes.

6.1 Terme gravitationnel (émergent). Au lieu de poser *d'emblée* l'action d'Einstein-Hilbert, on part de l'action symplectique minimale

$$(6.1) \quad S_\Omega = \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega.$$

La métrique (et donc le scalaire de Ricci R) n'intervient qu'*après* avoir défini g par compatibilité presque-Kähler.

6.2 Lagrangien du champ de Weyl. On conserve un terme cinétique de type Maxwell pour la jauge d'échelle :

$$(6.2) \quad S_\phi = -\frac{1}{4} \int_{M^4} F_{\mu\nu}^{(\phi)} F^{(\phi)\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad F_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu.$$

6.3 Lagrangien du champ hypercomplexe interne. Pour la connexion interne \mathcal{A} (valeurs dans l'algèbre quaternionique interne), on prend

$$(6.3) \quad S_{\mathcal{A}} = -\frac{1}{4} \int_{M^4} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu].$$

6.4 Termes de couplage. Les couplages “croisés” du texte historique sont naturellement représentés par des invariants mixtes construits à partir de Ω_{mix} , ϕ et de la courbure effective de la base. Un prototype est

$$(6.4) \quad S_{\text{coup}} = \int_{M^4} \left(\kappa \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}) + \eta F^{(\phi)} \wedge \star F^{(\phi)} \right),$$

où l'opérateur de Hodge est défini par la métrique émergente.

6.5 Action totale. On résume :

$$(6.5) \quad S = S_\Omega + S_\phi + S_{\mathcal{A}} + S_{\text{coup}} + S_{\text{mat}}.$$

7 DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE CHAMP À PARTIR DU LAGRANGIEN

7.1 Variations explicites des champs fondamentaux. On considère une action de la forme

$$(7.1) \quad S[\Omega, \phi, A, \Psi] = S_\Omega[\Omega] + S_\phi[\phi; g] + S_A[A; g] + S_{\text{coup}}[\Omega, \phi, A; g] + S_{\text{mat}}[g, \Psi],$$

où g est la métrique émergente issue de (Ω, J) et Ψ désigne la matière. Dans un premier temps, on effectue les variations à *métrique fixée* (i.e. $\delta\star = 0$). Les corrections dues à $\delta g(\delta\Omega)$ sont discutées ensuite.

7.1.1 Variation par rapport à la 2-forme symplectique Ω . On prend pour terme symplectique minimal

$$(7.2) \quad S_\Omega[\Omega] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} \Omega \wedge \Omega.$$

Alors

$$(7.3) \quad \delta S_\Omega = \kappa \int_{\mathcal{M}} \delta\Omega \wedge \Omega,$$

et, à sources près, l'équation d'Euler–Lagrange correspondante est

$$(7.4) \quad \Omega = \Omega_{\text{source}}.$$

Pour obtenir une dynamique locale (non purement topologique), on ajoute un terme cinétique de type

$$(7.5) \quad S_{\Omega, \text{dyn}} = \frac{\kappa_\Omega}{2} \int_{\mathcal{M}} d\Omega \wedge \star d\Omega,$$

ce qui donne

$$(7.6) \quad \delta S_{\Omega, \text{dyn}} = \kappa_\Omega \int_{\mathcal{M}} d(\delta\Omega) \wedge \star d\Omega = -\kappa_\Omega \int_{\mathcal{M}} \delta\Omega \wedge d\star d\Omega$$

(après intégration par parties et en négligeant les termes de bord), donc

$$(7.7) \quad d \star d\Omega = J_\Omega,$$

où J_Ω regroupe les contributions des couplages et/ou de la matière.

7.1.2 Variation par rapport au champ de Weyl ϕ . On définit $F^{(\phi)} = d\phi$ et

$$(7.8) \quad S_\phi[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{M^4} F^{(\phi)} \wedge \star F^{(\phi)}.$$

Alors

$$(7.9) \quad \delta S_\phi = - \int_{M^4} d(\delta\phi) \wedge \star F^{(\phi)} = \int_{M^4} \delta\phi \wedge d \star F^{(\phi)},$$

et l'équation de champ est

$$(7.10) \quad d \star F^{(\phi)} = J_\phi.$$

7.1.3 Variation par rapport à la connexion interne A . On définit la courbure interne $\mathcal{F} = dA + A \wedge A$. Avec

$$(7.11) \quad S_A[A] = -\frac{1}{2} \int_{M^4} \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}),$$

on a $\delta\mathcal{F} = D(\delta A)$, où $D = d + [A, \cdot]$ est la dérivée covariante. Alors

$$(7.12) \quad \delta S_A = - \int_{M^4} \text{Tr}(D(\delta A) \wedge \star \mathcal{F}) = \int_{M^4} \text{Tr}(\delta A \wedge D \star \mathcal{F}),$$

d'où l'équation de Yang–Mills interne

$$(7.13) \quad D \star \mathcal{F} = J_A.$$

7.1.4 Remarque sur la dépendance métrique (termes $\delta\star$). Comme \star dépend de g et g dépend de Ω via $g(\cdot, \cdot) = \Omega(\cdot, J\cdot)$, la variation complète $\delta S/\delta\Omega$ contient des contributions additionnelles de type $\delta(\star) \neq 0$. Dans une approche systématique, ces termes peuvent être regroupés dans le courant effectif J_Ω .

La variation de S fournit :

- des équations “de Maxwell” pour ϕ ,
- des équations de Yang–Mills internes pour \mathcal{A} ,
- et, via la métrique émergente, une équation gravitationnelle effective de type Einstein + corrections.

7.2 Équations pour le champ de Weyl. La variation $\delta S/\delta\phi = 0$ donne

$$(7.14) \quad \nabla_\mu F^{(\phi)\mu}{}_\nu = J_\nu^{(\phi)},$$

où $J^{(\phi)}$ provient des couplages et de la matière.

7.3 Équations pour le champ interne. La variation $\delta S/\delta\mathcal{A} = 0$ donne une équation de Yang–Mills interne :

$$(7.15) \quad \nabla_\mu \mathcal{F}^\mu{}_\nu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}^\mu{}_\nu] = J_\nu^{(\mathcal{A})}.$$

7.4 Équations gravitationnelles effectives. Une fois la métrique définie, on peut écrire une équation d'Einstein modifiée :

$$(7.16) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu}(\phi, \mathcal{A}, \Omega_{\text{mix}}),$$

où $\Theta_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion effectif des secteurs Weyl et interne.

8 STABILITÉ DU LAGRANGIEN ET THÉORÈME D’OSTROGRADSKY

Le théorème d’Ostrogradsky interdit, en général, des lagrangiens non dégénérés dépendant de dérivées d’ordre supérieur, car ils conduisent à un Hamiltonien non borné inférieurement (instabilités et “fantômes”).

8.1 Pourquoi la formulation symplectique aide. La réécriture symplectique présente deux avantages structurels :

- (1) La variable fondamentale Ω est une *forme*, et l’action minimale $S_\Omega = \int \Omega \wedge \Omega$ est de premier ordre (topologique) ; les dynamiques apparaissent via des termes de courbure de type $\text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F})$ qui restent de *second ordre* en dérivées des potentiels.
- (2) Les champs internes (ϕ, \mathcal{A}) apparaissent avec des cinétiques de type Maxwell/Yang–Mills, connues pour être stables (au moins au niveau classique) et sans dérivées d’ordre supérieur.

Ainsi, la théorie évite naturellement les pathologies d’Ostrogradsky, tout en conservant la possibilité de corrections effectives dans le secteur gravitationnel via la métrique émergente.

8.2 Remarque sur la compatibilité Weyl. La condition $\nabla g = \phi \otimes g$ ne nécessite pas d’introduire de dérivées d’ordre supérieur : elle modifie simplement la structure de connexion et de transport.

ANNEXE : SUR LA FIGURE DE TRANSPORT (TIKZ)

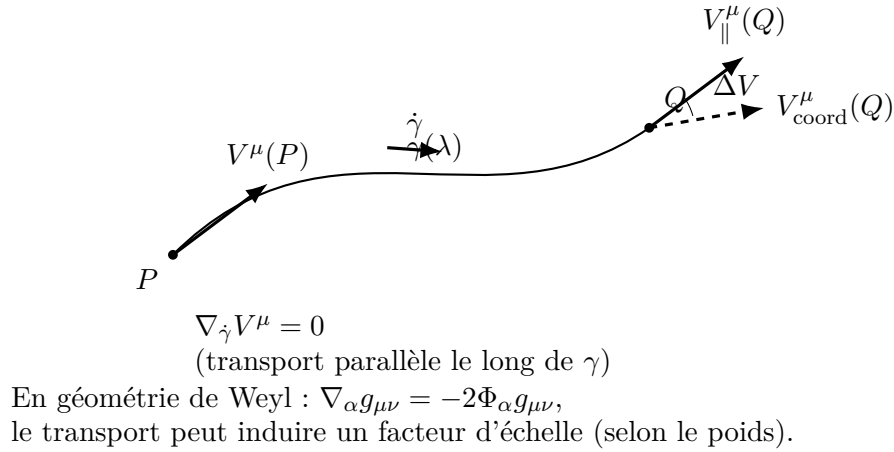


FIGURE 8.1. Schéma de transport d’un quadri-vecteur : $V^\mu(P)$ est transporté le long de γ vers Q (transport parallèle). On compare au vecteur défini par une identification de coordonnées.

9 COSMOLOGIE FLRW DANS LA REFORMULATION SYMPLECTIQUE

Choix de convention. Dans toute cette section, les contributions géométriques effectives sont exprimées en tant que *densités d'énergie physiques*, de sorte que l'équation de Friedmann conserve sa forme standard $H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}})$.

9.1 Métrique émergente : rappel minimal. On définit la métrique émergente par compatibilité presque-kählérienne :

$$(9.1) \quad g(X, Y) = \Omega(X, JY).$$

On suppose ensuite que la métrique émergente (9.1) prend la forme FLRW

$$(9.2) \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

où γ_{ij} est la métrique spatiale de courbure constante $k \in \{-1, 0, +1\}$, et $H = \dot{a}/a$ est le taux d'expansion.

L'homogénéité et l'isotropie imposent que *tous les invariants scalaires* construits à partir de g , de la jauge de Weyl ϕ et des champs internes (notés génériquement A / \mathcal{A}) ne dépendent que du temps cosmique t .

9.2 Ansatz FLRW explicite pour A et pour Ω (pas d'ambiguïté d'isotropie).

Point clef : aucune 1-forme spatiale strictement invariante n'existe en FLRW.. Il n'existe pas de 1-forme spatiale non nulle qui soit invariante sous *tout* le groupe d'isométries des tranches homogènes/isotropes. Par conséquent, si l'on veut garder une cosmologie FLRW au niveau du *fond* (background), on ne peut pas prendre “ A purement spatial et invariant” au sens littéral. Choix minimal compatible (recommandé dans ce manuscrit). On impose au fond :

$$(9.3) \quad \phi = \phi_0(t) dt, \quad A = A_0(t) dt, \quad \mathcal{A}_i^a(t) = \psi(t) \delta_i^a, \quad \mathcal{A}_0^a = 0,$$

où $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a h_a$ est la connexion interne (triplet) et δ_i^a identifie l'indice spatial $i \in \{1, 2, 3\}$ à l'indice interne $a \in \{1, 2, 3\}$. Cet “ansatz triadique” (analogue à celui des champs de jauge $SU(2)$ en cosmologie) est *isotrope en moyenne* car une rotation spatiale peut être compensée par une rotation interne.¹

Coframe FLRW.. On utilise la base orthonormée

$$(9.4) \quad e^0 = dt, \quad e^i = a(t) \tilde{e}^i,$$

où \tilde{e}^i est un coframe sur la 3-variété de courbure constante (Σ_k, γ_{ij}) .

Décomposition explicite de Ω au fond. On prend une base interne de 2-formes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sur la fibre, normalisée selon une convention interne fixée, et l'on écrit l'ansatz homogène/isotrope

$$(9.5) \quad \Omega_{\text{ext}} = 0, \quad \Omega_{\text{int}} = \varpi(t) \sum_{a=1}^3 \sigma_a, \quad \Omega_{\text{mix}} = \chi(t) \sum_{i=1}^3 e^i \wedge \sigma_i.$$

Le choix $\Omega_{\text{ext}} = 0$ est le plus simple : toute composante Ω_{ext} non nulle tend à sélectionner une direction privilégiée, sauf à introduire une structure supplémentaire ou à la reparamétriser en termes du secteur tardif θ déjà encapsulé dans α .

1. Un triplet interne δ_i^a (ou équivalent) est autorisé en cosmologie homogène et isotrope car l'indice spatial i est compensé par un indice interne a , de sorte qu'aucune direction spatiale privilégiée n'est sélectionnée. Cette construction est standard dans les modèles cosmologiques à structure interne de type $SU(2)$, par exemple les champs de jauge isotropes, où l'isotropie est préservée par une identification diagonale espace-interne.

Conséquence : c'est ce choix qui rend la partie “explicite” non ambiguë. Les équations (7.10) et (7.13) se réduisent alors à des équations ordinaires pour $(\phi_0, A_0, \psi, \varpi, \chi)$, et l'identification des lois d'échelle a^{-2} et a^{-4} devient transparente (voir §9.4).

Les équations (7.10) et (7.13) se réduisent alors à des équations ordinaires pour les modes compatibles, tandis que (7.7) induit une équation effective pour $a(t)$ via la dépendance de \star en $g(a)$.

Il est naturel d'écrire l'évolution cosmologique sous la forme d'une équation de Friedmann modifiée

$$(9.6) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}(\Omega, \phi, A),$$

où ρ_{eff} regroupe les contributions géométriques effectives (Weyl, secteur interne et couplages). Dans le cadre RGH, une contribution tardive de type θ peut être paramétrée à titre effectif par une loi en a^{-2} , ce qui s'intègre naturellement à (9.6).

9.3 Condition de rebond (solution type). Un rebond cosmologique correspond à l'existence d'un instant t_b tel que

$$(9.7) \quad H(t_b) = 0, \quad \dot{H}(t_b) > 0, \quad a(t_b) = a_{\min} > 0.$$

Pour exhiber une solution type, on paramètre la contribution géométrique effective par une combinaison simple de lois en puissance

$$(9.8) \quad \rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

où le terme en a^{-2} représente un secteur tardif (type θ) et le terme en a^{-4} provient d'un invariant interne associé à la structure symplectique/hypercomplexe (contribution effective).

Pour $k = 0$ et en négligeant la matière ordinaire au voisinage du rebond, (9.6) devient

$$(9.9) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \right) = \frac{8\pi G}{3} \frac{1}{a^4} (\alpha a^2 - \beta).$$

Ainsi $H^2 \geq 0$ impose $a^2 \geq \beta/\alpha$, et l'on obtient un rebond à

$$(9.10) \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

La condition $\dot{H}(t_b) > 0$ est satisfaite dès lors que la contribution effective viole l'équation d'état standard au voisinage de a_{\min} , ce qui est ici une propriété émergente de la dynamique géométrique (et non l'introduction d'un fluide exotique fondamental).

9.4 Identification explicite de α et β à partir de l'action (réduction FLRW). Pour lever toute ambiguïté dimensionnelle, on réécrit (9.6) sous la forme standard

$$(9.11) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}),$$

où ρ_{eff} est une *densité d'énergie physique*. On paramètre alors

$$(9.12) \quad \rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4},$$

avec α et β des constantes physiques (à dimension d'énergie volumique).

Lien avec la composante tardive θ . Dans la version RGH tardive, on introduit une contribution effective de type

$$(9.13) \quad \rho_\theta(a) = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2}.$$

Convention (normalisation de ρ_θ). Deux écritures sont fréquentes. (A) Si ρ_θ est une densité d'énergie physique,

$$(9.14) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{mat}} + \rho_\theta), \quad \rho_\theta(a) = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2},$$

alors α dans (9.12) s'identifie à

$$(9.15) \quad \alpha = \alpha_W \rho_{\text{crit},0} = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2.$$

(B) Si, au contraire, ρ_θ est défini comme un terme déjà normalisé dans H^2 ,

$$(9.16) \quad H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{mat}} + \rho_\theta^{(H)}, \quad \rho_\theta^{(H)} = \alpha_W \frac{H_0^2}{a^2},$$

alors la densité physique équivalente est $\rho_\theta = \frac{3}{8\pi G} \rho_\theta^{(H)}$. Dans ce manuscrit, on adopte la convention (A) (densité physique).

Pour la comparer à (9.12) dans (9.11), il faut exprimer (9.13) en densité d'énergie. On obtient l'identification directe

$$(9.17) \quad \boxed{\alpha = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2}$$

(à convention de normalisation près, i.e. selon que ρ_θ est définie comme densité physique ou comme terme déjà “normalisé” dans H^2).

Origine du terme en a^{-4} : secteur interne (type Yang–Mills). Le terme $-\beta/a^4$ apparaît naturellement dès qu'un invariant interne (courbure de connexion) contribue comme un fluide “radiatif” dans un fond FLRW. Par exemple, si le secteur interne est décrit par

$$(9.18) \quad S_A = -\frac{1}{2\lambda^2} \int \text{Tr}(\mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}),$$

alors l'énergie effective associée à un mode homogène/isotrope (amplitude comobile conservée \mathcal{Q}) se comporte comme

$$(9.19) \quad \rho_A(a) = \frac{C_A}{\lambda^2} \frac{\mathcal{Q}^2}{a^4},$$

où C_A est un facteur numérique (dépendant de la normalisation de Tr et du choix d'ansatz isotrope), et \mathcal{Q} est un invariant comobile (analogue à une “charge” ou à une amplitude de champ).

Dans le scénario de rebond, la contribution interne doit apparaître avec un *signe effectif négatif* dans (9.12) :

$$(9.20) \quad \boxed{\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} \mathcal{Q}^2}$$

et l'origine du signe (“ $-\beta/a^4$ ”) est interprétée comme une propriété émergente de la dynamique géométrique (contrainte/auxiliaire) du secteur hypercomplexe, plutôt que comme l'introduction d'un fluide fondamental fantomatique.

Rôle de κ (normalisation du secteur symplectique). Dans ce manuscrit, κ désigne la normalisation du secteur symplectique (noté κ_Ω dans (7.5) lorsque l'on ajoute une dynamique locale). Au niveau cosmologique, κ fixe l'échelle d'énergie associée aux modes homogènes de Ω .

Pour rendre ce point *explicite*, on part de l'ansatz (9.5). Le carré de la composante mixte se comporte, à normalisation interne fixée (i.e. $\int_{\mathcal{F}} \sigma_i \wedge \sigma_j \propto \delta_{ij}$), comme un terme de type radiation :

$$(9.21) \quad \int_{\mathcal{F}} \Omega_{\text{mix}} \wedge \star \Omega_{\text{mix}} \propto \chi(t)^2 \frac{1}{a^4}.$$

Autrement dit, si la dynamique impose une amplitude comobile conservée \mathcal{Q} (par exemple via l'équation de mouvement d'un secteur de jauge interne), on peut paramétrer

$$(9.22) \quad \chi(t) = \frac{\mathcal{Q}}{a^2},$$

et l'énergie effective héritée du secteur Ω (ou, plus généralement, du secteur interne couplé à Ω) prend bien la forme

$$(9.23) \quad \rho_\Omega(a) = \frac{C_\Omega}{\kappa} \frac{\mathcal{Q}^2}{a^4},$$

où C_Ω est un facteur numérique dépendant des conventions de normalisation de σ_i et de la définition précise de l'action.

Cette dépendance est compatible avec (9.20) : *au niveau effectif* on peut absorber C_Ω/κ dans C_A/λ^2 (si le secteur interne est de type Yang–Mills (9.18)) ou, au contraire, distinguer les deux contributions si l'on veut une écriture plus microscopique. Dans la présente version, on regroupe toutes les contributions radiatives internes dans β .

Enfin, les contributions en a^{-2} (paramétrées par α) sont ici reliées prioritairement au secteur tardif θ via (9.17) (et donc à α_W). Une éventuelle contribution additionnelle de Ω au terme en a^{-2} dépend d'un ansatz plus riche pour Ω_{ext} ; elle n'est pas nécessaire pour le rebond minimal et n'est donc pas activée dans (9.5).

9.5 Pression effective et équation d'état w_{eff} près du rebond. Pour une composante effective qui se comporte comme $\rho \propto a^{-n}$, la conservation covariante dans FLRW implique

$$(9.24) \quad w = \frac{n}{3} - 1.$$

Ainsi, un terme en a^{-2} correspond à $w_{(2)} = -1/3$ et un terme en a^{-4} correspond à $w_{(4)} = +1/3$. En utilisant (9.12), on obtient donc pour la pression effective

$$(9.25) \quad p_{\text{eff}}(a) = -\frac{1}{3} \frac{\alpha}{a^2} + \frac{1}{3} \left(-\frac{\beta}{a^4} \right) = -\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}.$$

Le paramètre d'équation d'état effectif vaut alors

$$(9.26) \quad w_{\text{eff}}(a) = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -\frac{\alpha a^2 + \beta}{3(\alpha a^2 - \beta)}.$$

Au voisinage du rebond $a_{\text{min}}^2 = \beta/\alpha$, le dénominateur tend vers zéro (avec $\alpha a^2 - \beta \rightarrow 0^+$ juste après le rebond), ce qui conduit à $w_{\text{eff}} \ll -1$ *effectivement* près de a_{min} . En particulier, la condition d'accélération $w_{\text{eff}} < -1/3$ est satisfaite dans une plage autour du rebond, ce qui assure $\dot{H}(t_b) > 0$ dans la description effective.

9.6 Estimation d'ordres de grandeur et falsifiabilité.

Exemple numérique jouet et contrainte sur T_{\max}

On considère

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

On fixe un exemple *jouet* :

$$\alpha_W = 0.1, \quad \alpha = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2 = \alpha_W \rho_{\text{crit},0},$$

où $\rho_{\text{crit},0} = 3H_0^2/(8\pi G)$. Pour la contribution interne, on paramètre

$$\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} \mathcal{Q}^2, \quad C_A \sim \mathcal{O}(1),$$

et on choisit des valeurs illustratives (λ, \mathcal{Q}) . Le rebond se produit à

$$a_{\min} = \sqrt{\beta/\alpha}.$$

Une estimation simple de la température maximale atteinte au rebond est

$$T_{\max} \simeq \frac{T_0}{a_{\min}}, \quad T_0 \simeq 2.725 \text{ K}.$$

La falsifiabilité consiste à contraindre $(\alpha_W, \lambda, \mathcal{Q})$ de sorte que T_{\max} reste compatible (i) avec la borne supérieure de l'échelle de Planck et (ii) avec la nécessité d'une cosmologie standard avant la nucléosynthèse primordiale (BBN), tout en reproduisant les observables (CMB/BAO/SNe) via CLASS+Cobaya.

L'expression fermée du minimum

$$(9.27) \quad a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

rend le scénario falsifiable dès que α et β sont reliés à des paramètres physiques mesurables.

Estimation de α à partir de α_W . En combinant (9.17) avec $H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, on obtient une densité caractéristique de l'ordre

$$(9.28) \quad \alpha \sim \alpha_W \rho_{\text{crit},0}, \quad \rho_{\text{crit},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Autrement dit, α_W calibre directement la fraction de densité effective associée à la composante tardive (à $a = 1$).

Estimation de β à partir du secteur interne. L'identification (9.20) montre que β dépend d'une amplitude comobile \mathcal{Q} et du couplage λ . Dans un scénario "théorie des champs", \mathcal{Q} est fixé par des conditions initiales (ou par une quantification effective), et λ est contraint par l'absence d'écarts observables dans les tests locaux/perturbatifs. La combinaison β/α est donc testable via (9.27).

Interprétation physique de a_{\min} . Une fois α et β fixés, a_{\min} détermine l'échelle minimale atteinte par l'Univers dans le scénario de rebond. En unités physiques, cela fixe le maximum de redshift et la température maximale atteinte avant le rebond, ce qui peut être confronté : (i) aux contraintes BBN, (ii) aux contraintes sur le spectre primordial, (iii) aux contraintes CMB/LSS via l'implémentation numérique (CLASS modifié).

Comparaison observationnelle (feuille de route). La falsifiabilité se formule alors en trois étapes :

- (1) relier α à α_W via (9.17) et contraindre α_W par CMB+BAO+SNe,
- (2) relier β à (λ, \mathcal{Q}) via (9.20) en contrôlant l'impact sur les perturbations,

- (3) prédire a_{\min} via (9.27) et vérifier la compatibilité avec BBN et l'absence d'anomalies observables.

10 PERSPECTIVES DE QUANTIFICATION

Le cadre de la RGH est actuellement formulé comme une théorie géométrique classique. Néanmoins, sa structure interne admet naturellement un programme de quantification bien défini. En particulier, la formulation symplectique introduite dans ce travail dote le secteur interne d'une deux-forme fermée et non dégénérée ω , qui définit une algèbre de Poisson des observables sur la fibre interne.

Cette structure fournit un point de départ naturel pour une quantification géométrique ou par déformation, dans laquelle les parenthèses de Poisson classiques associées à ω sont promues en commutateurs quantiques. Dans cette interprétation, la non-commutativité interne apparaissant dans le cadre de la RGH n'est pas postulée de manière fondamentale, mais émerge comme la limite quantifiée d'une géométrie symplectique sous-jacente.

Au stade actuel, le secteur gravitationnel est traité classiquement au niveau du fond, tandis que les effets quantiques sont introduits de manière cohérente par le biais de perturbations autour de fonds cosmologiques. Cette stratégie permet d'inscrire le modèle RGH dans le cadre d'une théorie effective des champs, au sein de laquelle les fluctuations quantiques de la métrique et des champs internes peuvent être calculées et confrontées aux observations cosmologiques.

Une quantification complète et non perturbative de la théorie, incluant l'ensemble des degrés de liberté gravitationnels, demeure un problème ouvert et est laissée à des travaux ultérieurs. Toutefois, la formulation présente définit d'ores et déjà un régime semi-quantique contrôlé et testable, adapté à des applications phénoménologiques et cosmologiques.

ANNEXE A DICTIONNAIRE ENTRE LA FORMULATION RGH HISTORIQUE ET LA REFORMULATION SYMPLECTIQUE

Cette annexe établit une correspondance explicite entre les objets de la Relativité Générale Hypercomplexe (formulation historique) et ceux de la reformulation symplectique moderne.

RGH historique (hypercomplexe)	Formulation symplectique
Coordonnées hypercomplexes $x^{\mu i} h_i$	Coordonnées (x^μ, q^a) sur $\mathcal{M} = M^4 \times \mathcal{F}$
Base quaternionique h_i	Base de la fibre interne $\mathcal{F} \simeq \mathbb{H}$
Non-commutativité $[h_i, h_j] \neq 0$	Courbure de la connexion interne \mathcal{A}
Quadri-vecteur $X = x^\alpha \varphi^i h_i e_\alpha$	Section du fibré tangent total $T\mathcal{M}$
$\partial_\mu h_i = H_{\mu i}^j h_j$	$\nabla_\mu u_i = H_{\mu i}^j u_j$ (connexion interne)
$\partial_\mu \varphi^i = \Phi_{\mu j}^i \varphi^j$	Connexion de Weyl / jauge d'échelle ϕ_μ
Symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$	Connexion affine sur M^4
Transport $\nabla_\mu X$	Dérivée covariante sur la fibration $\mathcal{M} \rightarrow M^4$
Commutateur $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$	Courbure totale de la connexion fibrée
Tenseur $R_{\sigma\mu\nu}^{(\Gamma)\rho}$	Courbure riemannienne effective
Tenseur $F_{j\mu\nu}^i(\Phi)$	Champ de Weyl $F^{(\phi)} = d\phi$
Tenseur $T_{n\mu\nu}^m(H)$	Courbure interne $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ (type Yang–Mills quaternionique)
Termes croisés $C_{\mu\nu}$	Couplages base–fibre (mixité symplectique)
Métrique fondamentale $g_{\mu\nu}$	Métrique émergente $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$
Jauge d'échelle de Weyl postulée	Compatibilité conforme $\nabla g = \phi \otimes g$
Lagrangien $R + F^2 + T^2 + \dots$	Action symplectique $\int \Omega \wedge \Omega + \int \mathcal{F} \wedge \star \mathcal{F}$

Interprétation. Cette correspondance montre que la reformulation symplectique ne modifie pas le contenu physique de la RGH mais en change la structure géométrique fondamentale.

QUANTIFICATION

ANNEXE B QUANTIFICATION CANONIQUE DU SECTEUR INTERNE RGH

B.1 Action interne. On considère le secteur Yang–Mills interne :

$$(B.1) \quad S_A = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{4g_A^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}),$$

avec

$$(B.2) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

B.2 Décomposition 3+1. Les variables canoniques sont A_i^a et

$$(B.3) \quad E_a^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i^a} = \frac{\sqrt{h}}{g_A^2} F_a^{0i}.$$

B.3 Hamiltonien. La densité Hamiltonienne s'écrit :

$$(B.4) \quad \mathcal{H}_A = \frac{g_A^2}{2\sqrt{h}} E_a^i E_i^a + \frac{\sqrt{h}}{4g_A^2} F_{ij}^a F_a^{ij} + A_0^a \mathcal{G}_a,$$

où la contrainte de Gauss est

$$(B.5) \quad \mathcal{G}_a = D_i E_a^i.$$

Fermeture des contraintes (secteur interne). On introduit la contrainte lissée

$$G[\lambda] \equiv \int_\Sigma d^3x \lambda^a(x) G_a(x), \quad G_a = D_i E_a^i.$$

En utilisant les crochets canoniques, on vérifie que $G[\lambda]$ engendre la jauge interne :

$$\delta_\lambda A_i^a = \{A_i^a, G[\lambda]\} = -D_i \lambda^a, \quad \delta_\lambda E_a^i = \{E_a^i, G[\lambda]\} = f_{ab}^c \lambda^b E_c^i.$$

On en déduit la fermeture de l'algèbre de Gauss :

$$\{G[\lambda], G[\mu]\} = G[[\lambda, \mu]], \quad [\lambda, \mu]^c \equiv f_{ab}^c \lambda^a \mu^b,$$

ainsi que l'invariance de jauge de l'Hamiltonien interne construit à partir d'invariants (E^2, F^2) :

$$\{G[\lambda], H_A\} \approx 0,$$

où \approx désigne l'égalité au sens faible (sur la surface des contraintes).

B.4 Quantification. Les crochets de Poisson deviennent :

$$(B.6) \quad [A_i^a(x), E_b^j(y)] = i\hbar \delta_i^j \delta_b^a \delta^{(3)}(x - y).$$

Les états physiques satisfont :

$$(B.7) \quad \hat{\mathcal{G}}_a(x) |\Psi\rangle = 0.$$

ANNEXE C CONSTRUCTION D'UN OBSERVABLE INTERNE X ET PROMOTION QUANTIQUE

C.1 Invariants de jauge et décomposition 3+1. On considère une connexion interne $A_\mu = A_\mu^a T_a$ et sa courbure

$$(C.1) \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c.$$

Les invariants de jauge usuels sont

$$(C.2) \quad \mathcal{I}_1 = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad \mathcal{I}_2 = \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}),$$

où $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

Sur une tranche spatiale Σ , on définit les champs “électrique” et “magnétique” internes :

$$(C.3) \quad E_i^a \equiv F_{0i}^a, \quad B^{ia} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}^a.$$

On introduit les scalaires (jauge-invariants)

$$(C.4) \quad \omega^2 \equiv E_i^a E_a^i, \quad J^2 \equiv B_i^a B_a^i.$$

C.2 Définition de l'observable interne X . On définit l'observable interne RGH-compatible :

$$(C.5) \quad \boxed{X(x) \equiv \alpha \left(E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i \right)^p.}$$

Cette quantité est locale, scalaire et invariante sous la jauge interne.

C.3 Promotion quantique. En représentation “connexion”, on pose

$$(C.6) \quad \hat{E}_a^i(x) = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_i^a(x)}, \quad \hat{B}_a^i(x) = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \hat{F}_{jk}^a[A](x),$$

et l'opérateur

$$(C.7) \quad \boxed{\hat{X}(x) = \alpha \left(\hat{E}_i^a \hat{E}_a^i + \hat{B}_i^a \hat{B}_a^i \right)^p.}$$

Une prescription d'ordre (p.ex. symétrisation de Weyl) peut être adoptée afin de définir sans ambiguïté \hat{X}^2 .

Comme \hat{E} et $\hat{B}(\hat{A})$ ne commutent pas, la définition de \hat{X}^2 requiert une prescription d'ordre. On adopte par défaut l'ordre de Weyl (symétrisation), garantissant l'hermiticité et l'absence de biais entre contributions électriques et magnétiques, tout en reproduisant la limite classique lorsque $\hbar \rightarrow 0$.

C.4 Seuil effectif Weyl. On promeut le seuil de déclenchement en quantité état-dépendante :

$$(C.8) \quad \boxed{W_\star^{\text{eff}}(x) \equiv \kappa_X \langle \Psi | \hat{X}^2(x) | \Psi \rangle.}$$

La condition de déclenchement d'un rebond local peut alors s'exprimer sous la forme

$$(C.9) \quad W(x) \geq W_\star^{\text{eff}}(x).$$

Condition de rebond (formulation minimale). Dans l'approche domainée, les corrections RGH s'activent localement lorsque l'invariant de courbure W franchit un seuil effectif W_\star^{eff} . Dans la version quantifiée du secteur interne, ce seuil devient état-dépendant :

$$W_\star^{\text{eff}} \equiv \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle,$$

où \hat{X} est construit à partir d'invariants internes (et éventuellement saturé au niveau effectif), garantissant une réponse bornée.

Un *rebond* correspond alors, au niveau effectif, à l'existence d'un instant t_b tel que : (i) $H(t_b) = 0$ (arrêt de la contraction), et (ii) $\dot{H}(t_b) > 0$ (reprise en expansion), dans une région où l'activation est satisfaite, i.e. $W(t_b) \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$. Autrement dit, la condition physique minimale pour un rebond local est l'activation du terme RGH avec un signe effectif conduisant à $\dot{H}(t_b) > 0$. La saturation de X assure que W_\star^{eff} reste fini, évitant une activation incontrôlée en régime ultra-courbe.

Raychaudhuri effective et critère de signe. Au niveau effectif (métrique classique, secteur interne quantifié), on peut écrire l'équation d'évolution de H sous la forme minimale

$$\dot{H} = \dot{H}_{\text{GR}} + \Delta_{\text{RGH}}(W; W_\star^{\text{eff}}),$$

où \dot{H}_{GR} regroupe le contenu standard (matière + Λ) et où Δ_{RGH} est une correction qui s'active localement lorsque $W \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$. Dans une formulation seuil/domaines, on peut modéliser cette activation par une fonction d'interpolation $\mathcal{A}(W/W_\star^{\text{eff}})$ nulle sous-seuil et proche de l'unité au-dessus du seuil, de sorte que

$$\Delta_{\text{RGH}}(W; W_\star^{\text{eff}}) \equiv \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Xi_{\text{RGH}},$$

où Ξ_{RGH} encode le *signe effectif* (et l'amplitude) de la correction.

Au temps de rebond t_b on a $H(t_b) = 0$ et la condition dynamique est

$$\dot{H}(t_b) = \dot{H}_{\text{GR}}(t_b) + \mathcal{A}\left(\frac{W(t_b)}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Xi_{\text{RGH}} > 0.$$

Ainsi, dans un domaine activé ($W(t_b) \gtrsim W_\star^{\text{eff}}$), un rebond se produit si la contribution RGH domine localement la tendance GR à la focalisation, i.e. si Ξ_{RGH} est suffisamment positive. La saturation interne intervient uniquement via $W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle$ et garantit que l'activation reste contrôlée en régime ultra-courbe.

ANNEXE D PRESCRIPTION D'ORDRE ET APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DE $\langle \hat{X}^2 \rangle$

On rappelle la définition

$$(D.1) \quad X(x) = \alpha Q(x)^p, \quad Q(x) \equiv E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i,$$

d'où

$$(D.2) \quad X^2 = \alpha^2 Q^{2p}.$$

Après quantification, \hat{E} et $\hat{B}(A)$ ne commutent pas, et une prescription d'ordre est requise pour définir $\hat{X}^2 = \alpha^2 \widehat{Q^{2p}}$.

D.1 Prescription d'ordre (choix minimal). On adopte par défaut l'ordre de Weyl (symétrisation) pour $\widehat{Q^{2p}}$, ce qui évite un biais entre les contributions électriques et magnétiques.

D.2 Approximation semi-classique. Dans un état semi-classique $|\Psi\rangle$ tel que

$$(D.3) \quad \langle \hat{Q} \rangle = Q_{\text{cl}}, \quad (\Delta Q)^2 \equiv \langle \hat{Q}^2 \rangle - \langle \hat{Q} \rangle^2, \quad \Delta Q \ll Q_{\text{cl}},$$

on obtient (développement en cumulants à l'ordre dominant)

$$(D.4) \quad \langle \hat{X}^2 \rangle = \alpha^2 \langle \widehat{Q^{2p}} \rangle \approx \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p} \left[1 + \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2} \right].$$

Ainsi,

$$(D.5) \quad \langle \hat{X}^2 \rangle \approx X_{\text{cl}}^2 + \Delta X^2$$

avec

$$(D.6) \quad X_{\text{cl}}^2 = \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p}, \quad \Delta X^2 \simeq \alpha^2 Q_{\text{cl}}^{2p} \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2}.$$

D.3 Seuil effectif et interprétation statistique. Le seuil Weyl devient état-dépendant :

$$(D.7) \quad W_{\star}^{\text{eff}}(x) = \kappa_X \langle \hat{X}^2(x) \rangle.$$

En posant le seuil équivalent en Q ,

$$(D.8) \quad Q_{\star} \equiv \left(\frac{W}{\kappa_X \alpha^2} \right)^{\frac{1}{2p}},$$

la probabilité de déclenchement dans une approche “domaines” s’écrit

$$(D.9) \quad P_{\text{bounce}} = \mathbb{P}(Q \geq Q_{\star}),$$

et, si $\ln Q$ est approximativement gaussien,

$$(D.10) \quad P_{\text{bounce}} \simeq \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\ln Q_{\star} - \mu_Q}{\sqrt{2} \sigma_Q} \right).$$

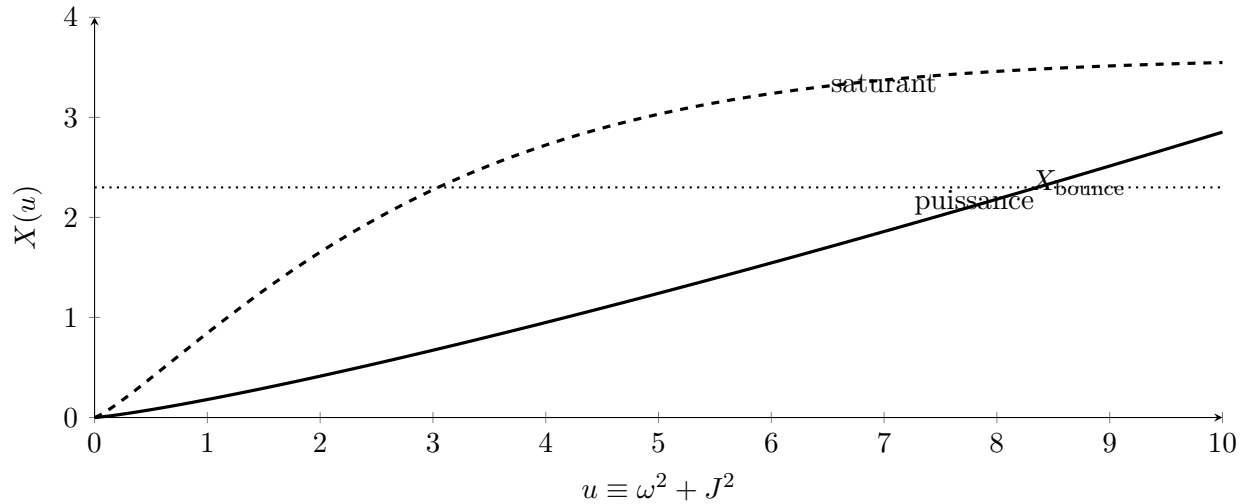


FIGURE D.1. Saturation interne (schéma). $u = \omega^2 + J^2$. La loi puissance $X = \alpha u^p$ diverge, tandis qu’une loi saturante $X = X_{\text{max}} \left(1 - e^{-(u/\Lambda^2)^p} \right)$ tend vers X_{max} . La ligne pointillée indique un seuil X_{bounce} (rebond).

ANNEXE E GALAXIES DOMINÉES PAR MATIÈRE NOIRE ET HALOS HYPERCOMPLEXES DANS LA RGH

E.1 Contexte observationnel. Certaines galaxies récemment observées présentent une fraction baryonique extrêmement faible. Ces objets sont souvent désignés comme :

- *dark galaxies*,
- *ultra-diffuse galaxies* (UDG),
- halos dominés par matière noire.

Les indices observationnels sont essentiellement gravitationnels :

- amas globulaires orbitant autour d'un centre gravitationnel,
- dispersion de vitesse mesurée,
- parfois lentille gravitationnelle faible,
- estimation dynamique de la masse du halo.

Ces observations impliquent généralement

$$(E.1) \quad M_{\text{halo}} \gg M_{\text{baryon}}$$

Dans certains systèmes extrêmes :

$$(E.2) \quad \frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$$

alors que la fraction baryonique cosmologique attendue est

$$(E.3) \quad \frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \approx 0.15.$$

Ces estimations proviennent d'analyses dynamiques (dispersion de vitesse, dynamique des amas globulaires) et non d'une mesure directe de la masse invisible.

E.2 Interprétation standard dans le modèle Λ CDM. Dans le cadre cosmologique standard, la formation des galaxies suit le scénario hiérarchique

$$(E.4) \quad \text{halo de matière noire} \rightarrow \text{capture du gaz baryonique} \rightarrow \text{formation stellaire.}$$

Dans les galaxies extrêmement diffuses, ce processus baryonique semble avoir échoué.

Trois mécanismes principaux sont généralement invoqués.

Feedback stellaire violent. Les premières générations d'étoiles peuvent expulser le gaz par :

- vents stellaires
- explosions de supernova
- rayonnement ultraviolet intense.

Stripping gravitationnel. Dans un environnement d'amas de galaxies :

$$(E.5) \quad \text{pression dynamique} + \text{forces de marée}$$

peuvent arracher le gaz baryonique au halo.

Suppression par réionisation. Lors de l'époque de réionisation cosmique, le gaz chauffé peut rester trop énergétique pour être capturé par certains halos.

E.3 Limites conceptuelles. Ces objets extrêmes sont souvent interprétés comme un argument en faveur d'une composante matérielle réelle (matière noire) plutôt qu'une modification universelle de la gravité.

Cependant la variabilité observée des fractions baryoniques suggère également que la structure gravitationnelle peut exister indépendamment de la matière visible.

Cela ouvre la possibilité d'interprétations géométriques plus fondamentales.

E.4 Cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe. Dans la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), la gravité effective peut contenir une contribution provenant d'un champ hypercomplexe.

La métrique effective peut être écrite sous la forme

$$(E.6) \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(R)} + g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})}$$

où $g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})}$ représente la contribution hypercomplexe.

Le tenseur énergie-impulsion effectif devient alors

$$(E.7) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}}.$$

Dans certains régimes :

$$(E.8) \quad T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}} \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}.$$

Un halo gravitationnel peut donc exister même en absence quasi complète de matière baryonique.

E.5 Hypothèse : halos hypercomplexes. Hypothèse H1.

Il peut exister des domaines astrophysiques où la densité d'énergie hypercomplexe domine la contribution baryonique :

$$(E.9) \quad \rho_{\mathbb{H}} \gg \rho_{\text{baryon}}.$$

Dans ce cas, la structure gravitationnelle observable correspondrait à un condensat du champ hypercomplexe.

E.6 Structure possible. Une galaxie dominée par le champ hypercomplexe pourrait suivre le schéma :

$$(E.10) \quad \text{condensation du champ hypercomplexe} \rightarrow \text{puits gravitationnel} \rightarrow \text{capture partielle de baryons.}$$

Si la capture baryonique est inefficace, l'objet apparaîtrait presque invisible.

E.7 Défaut de couplage baryonique. Il est également possible que le couplage

$$(E.11) \quad \mathbb{H} \leftrightarrow T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}$$

soit faible dans certains domaines.

La structure gravitationnelle peut alors se former sans accumulation significative de matière ordinaire.

E.8 Domaines topologiques. Dans certaines extensions géométriques, ces structures pourraient correspondre à :

- défauts topologiques,
- solitons gravitationnels,
- domaines de Weyl ou de torsion.

Ces structures produisent une perturbation métrique

$$(E.12) \quad \Delta g_{\mu\nu}$$

générant une gravité effective similaire à celle d'un halo de matière noire.

E.9 Prédiction observationnelles. Si cette interprétation est correcte, plusieurs signatures observables pourraient apparaître :

- (1) dispersion dynamique atypique,
- (2) relation masse–amas globulaires anormale,
- (3) profil de masse non compatible avec un halo NFW standard,
- (4) signatures de lentille gravitationnelle modifiées.

E.10 Intérêt pour la RGH. Ces galaxies représentent des laboratoires astrophysiques particulièrement intéressants car elles minimisent les effets baryoniques et isolent la structure gravitationnelle pure.

Elles constituent donc des systèmes privilégiés pour tester des extensions géométriques de la relativité générale.

E.11 Analogie conceptuelle. Une analogie simple consiste à comparer une galaxie à un sapin de Noël :

- dans le modèle Λ CDM, l'arbre correspond au halo de matière noire et les guirlandes à la matière baryonique ;
- dans MOND, la gravité modifiée affecte la luminosité apparente des guirlandes ;
- dans la RGH, la structure même de l'arbre pourrait provenir d'une géométrie hypercomplexe du champ gravitationnel.

ANNEXE F FLUX BARYONIQUE GALACTIQUE ET ÉJECTION PAR FEEDBACK STELLAIRE

F.1 Motivation. Les processus de formation stellaire produisent des mécanismes de rétroaction (*stellar feedback*) capables d'expulser une fraction importante du gaz baryonique d'une galaxie.

Les principaux mécanismes sont :

- vents stellaires,
- explosions de supernova,
- rayonnement ultraviolet intense.

Ces mécanismes peuvent produire des vents galactiques capables de transporter du gaz au-delà du disque galactique.

La question physique fondamentale est alors :

Quelle quantité de matière baryonique peut être expulsée et jusqu'à quelle distance ?

F.2 Énergie de liaison gravitationnelle. Pour une galaxie de masse totale M et de rayon caractéristique R , l'énergie gravitationnelle de liaison est approximativement

$$(F.1) \quad E_{\text{bind}} \sim \frac{GM^2}{R}.$$

Pour une galaxie typique :

$$M \sim 10^{11} M_{\odot}, \quad R \sim 50 \text{ kpc}.$$

On obtient un ordre de grandeur

$$(F.2) \quad E_{\text{bind}} \sim 10^{59} \text{ J}.$$

L'énergie libérée par une supernova est typiquement

$$(F.3) \quad E_{\text{SN}} \sim 10^{44} \text{ J}.$$

Le nombre de supernovae nécessaires pour expulser entièrement le gaz serait donc

$$(F.4) \quad N_{\text{SN}} \sim \frac{E_{\text{bind}}}{E_{\text{SN}}} \sim 10^{15}.$$

Cela montre que l'expulsion complète de la matière baryonique est difficile pour les galaxies massives.

F.3 Vitesse d'éjection. Les vents galactiques présentent typiquement des vitesses

$$(F.5) \quad v_{\text{wind}} \sim 300 - 1000 \text{ km s}^{-1}.$$

La distance maximale atteinte par le gaz peut être estimée en comparant cette vitesse à la vitesse d'échappement du halo.

Pour un halo galactique typique :

$$(F.6) \quad v_{\text{esc}} \sim 500 \text{ km s}^{-1}.$$

Ainsi, une partie du gaz expulsé reste gravitationnellement liée au halo.

F.4 Milieu circumgalactique. Le gaz expulsé forme généralement un halo diffus appelé Circumgalactic Medium (CGM)

caractérisé par :

$$(F.7) \quad T \sim 10^5 - 10^6 \text{ K},$$

$$(F.8) \quad R \sim 100 - 500 \text{ kpc},$$

$$(F.9) \quad M_{\text{gas}} \sim 10^9 - 10^{10} M_{\odot}.$$

Ce gaz peut ensuite retomber vers la galaxie dans un cycle appelé *galactic fountain*.

F.5 Éjection dans le milieu intergalactique. Dans certains cas extrêmes (galaxies naines ou interactions gravitationnelles), une fraction du gaz peut être expulsée dans le milieu intergalactique.

Le gaz se distribue alors dans le

Warm-Hot Intergalactic Medium (WHIM)

caractérisé par :

$$(F.10) \quad T \sim 10^5 - 10^7 \text{ K}.$$

Ce milieu pourrait contenir une grande fraction des baryons manquants de l'univers.

F.6 Flux baryonique. On peut estimer le flux de masse éjectée par un vent galactique :

$$(F.11) \quad \dot{M}_{\text{out}} \sim \eta \dot{M}_{\star},$$

où

- \dot{M}_{\star} est le taux de formation stellaire,
- η est le facteur de chargement du vent.

Les observations donnent typiquement

$$(F.12) \quad \eta \sim 1 - 10$$

pour les galaxies à forte formation stellaire.

F.7 Limites de l'expulsion. Pour atteindre une distance de plusieurs mégaparsecs, la vitesse d'éjection devrait être

$$(F.13) \quad v \gtrsim 3000 \text{ km s}^{-1}.$$

Ces vitesses ne sont généralement pas atteintes par les vents galactiques standards.

Ainsi, la plupart du gaz expulsé reste confiné dans le halo circumgalactique ou le voisinage intergalactique immédiat.

F.8 Interprétation possible dans la RGH. Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), une autre interprétation peut être envisagée.

La gravité effective peut contenir une contribution provenant du champ hypercomplexe :

$$(F.14) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H.$$

Dans certains régimes :

$$(F.15) \quad T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}.$$

Dans ce cas, un halo gravitationnel peut exister même en présence d'une quantité très faible de matière baryonique.

Ces structures pourraient correspondre à des halos hypercomplexes dans lesquels la matière ordinaire n'a jamais été capturée efficacement ou a été expulsée lors des premières phases d'évolution galactique.

F.9 Conséquences observationnelles. De tels systèmes pourraient apparaître comme :

- galaxies ultra-diffuses,
- halos gravitationnels détectés par dynamique des amas globulaires,
- structures dominées par une composante gravitationnelle invisible.

Ces objets constituent donc des laboratoires astrophysiques intéressants pour tester les modèles de formation galactique et les extensions géométriques de la gravitation.

ANNEXE G HALOS HYPERCOMPLEXES ET COURBES DE ROTATION GALACTIQUES

G.1 Motivation. Une propriété observationnelle majeure des galaxies spirales est la présence de courbes de rotation approximativement plates à grande distance du centre. Dans le cadre standard, cette propriété est généralement interprétée comme la signature d'un halo de matière noire.

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), on peut envisager qu'une partie de cette gravitation effective provienne d'une contribution géométrique hypercomplexe, sans postuler nécessairement une nouvelle composante particulaire.

G.2 Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique. Considérons un halo effectif statique, sphériquement symétrique, décrit par une densité d'énergie hypercomplexe effective $\rho_H(r)$.

On suppose qu'à grande distance la densité suit la loi asymptotique

$$(G.1) \quad \rho_H(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2},$$

où ρ_0 et r_0 sont des constantes caractéristiques du halo.

Cette loi est particulièrement intéressante car elle conduit naturellement à une croissance linéaire de la masse enfermée.

G.3 Masse effective intérieure. La masse effective contenue à l'intérieur d'un rayon r est

$$(G.2) \quad M_H(r) = 4\pi \int_0^r \rho_H(r') r'^2 dr'.$$

En utilisant (G.1), on obtient

$$(G.3) \quad M_H(r) = 4\pi \rho_0 r_0^2 \int_0^r dr' = 4\pi \rho_0 r_0^2 r.$$

Ainsi,

$$(G.4) \quad M_H(r) \propto r.$$

G.4 Courbe de rotation. Dans l'approximation newtonienne, la vitesse circulaire vérifie

$$(G.5) \quad v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}.$$

Si la contribution dominante à grande distance est $M_H(r)$ donnée par (G.3), alors

$$(G.6) \quad v_c^2(r) = \frac{G}{r} (4\pi \rho_0 r_0^2 r) = 4\pi G \rho_0 r_0^2.$$

Donc

$$(G.7) \quad v_c(r) \approx \text{constante}.$$

On retrouve ainsi naturellement une courbe de rotation plate.

G.5 Interprétation RGH. Dans la RGH, cette densité effective peut être interprétée comme provenant du secteur hypercomplexe du tenseur énergie–impulsion :

$$(G.8) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H.$$

Dans le régime de halo externe, on peut supposer que

$$(G.9) \quad T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}},$$

de sorte que la dynamique orbitale est dominée par la contribution hypercomplexe.

Le profil $\rho_H(r) \propto r^{-2}$ peut alors être vu comme une solution effective stationnaire du secteur géométrique interne.

G.6 Origine possible du profil en $1/r^2$. Un tel profil peut émerger si le champ hypercomplexe forme un halo auto-gravitant quasi-statique dont l'énergie se distribue selon une loi d'échelle.

Par exemple, si un invariant scalaire du champ interne $X(r)$ vérifie asymptotiquement

$$(G.10) \quad X(r) \propto \frac{1}{r},$$

et si la densité effective est quadratique en cet invariant,

$$(G.11) \quad \rho_H(r) \propto X(r)^2,$$

alors on obtient immédiatement

$$(G.12) \quad \rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}.$$

Cette possibilité est cohérente avec une lecture où le secteur interne RGH agit comme une structure de halo géométrique plutôt que comme une matière particulaire ordinaire.

G.7 Modèle minimal effectif. On peut paramétrer le potentiel gravitationnel total par

$$(G.13) \quad \Phi(r) = \Phi_b(r) + \Phi_H(r),$$

où Φ_b est la contribution baryonique et Φ_H la contribution hypercomplexe.

La contribution hypercomplexe vérifie alors

$$(G.14) \quad \nabla^2 \Phi_H = 4\pi G \rho_H(r).$$

Avec $\rho_H(r) = \rho_0 r_0^2 / r^2$, on obtient un champ radial

$$(G.15) \quad \frac{d\Phi_H}{dr} = \frac{GM_H(r)}{r^2} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{r},$$

ce qui donne après intégration

$$(G.16) \quad \Phi_H(r) \sim 4\pi G \rho_0 r_0^2 \ln r + \text{const.}$$

Le potentiel logarithmique est précisément le comportement classique associé à des vitesses orbitales asymptotiquement constantes.

G.8 Conséquences observationnelles. Si les halos hypercomplexes reproduisent effectivement les courbes de rotation, on s'attend à observer :

- (1) des vitesses orbitales asymptotiquement plates,
- (2) une transition baryons \rightarrow halo hypercomplexe à grand rayon,
- (3) des profils de masse effective compatibles avec $M(r) \propto r$,
- (4) des écarts possibles au profil NFW standard dans les régions intermédiaires.

G.9 Conclusion. Le cadre RGH permet donc, au moins au niveau effectif, d'envisager une explication géométrique des courbes de rotation galactiques.

Une densité hypercomplexe asymptotique de type

$$(G.17) \quad \rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

implique

$$(G.18) \quad M_H(r) \propto r, \quad v_c(r) \approx \text{constante},$$

ce qui reproduit directement le comportement observé des halos galactiques.

Cette possibilité fait des halos hypercomplexes des candidats naturels pour l'interprétation RGH de la dynamique galactique à grande échelle.

G.10 Définition minimale du modèle RGHCl. On considère une variété lorentzienne (M, g) de dimension 4, munie d'une structure spin.

L'extension RGHCl repose sur une structure algébrique interne fondée sur le produit tensoriel

$$\mathcal{A}_{RGHCl} = Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

où $Cl(1, 3)$ désigne l'algèbre de Clifford associée à la métrique lorentzienne et \mathbb{H} l'algèbre des quaternions.

À chaque point $x \in M$ est associée une fibre algébrique

$$\mathcal{F}_x \simeq Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}.$$

La dérivation covariante étendue est définie par

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} + W_\mu + g_H A_\mu^I \tau_I,$$

où ω_μ^{ab} est la connexion de spin, W_μ un champ conforme de type Weyl, et A_μ^I une connexion quaternionique interne.

La courbure totale est définie par

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu].$$

L'action effective minimale s'écrit

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(W)} F_{(W)}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F_I^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_m \right].$$

ANNEXE H — ANNEXE — ESQUISSE D'UNE EXTENSION HYPERCOMPLEXE CLIFFORD–QUATERNIONIQUE (RGHCLi)

H.1 Motivation. Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), il est naturel d'envisager une extension où la structure géométrique sous-jacente ne se limite plus à une métrique lorentzienne réelle munie de sa connexion de Levi-Civita, mais inclut également un secteur interne hypercomplexe dynamique. L'idée directrice de cette extension, que nous noterons RGHCLi, est que l'espace-temps observable pourrait n'être que la projection réelle d'une structure géométrique plus riche, combinant une algèbre de Clifford relativiste et une fibre quaternionique interne.

L'objectif de cette annexe n'est pas de proposer une théorie complète, mais de fixer une architecture mathématique minimale cohérente, susceptible de servir de base à des développements ultérieurs.

H.2 Structure algébrique étendue. Nous introduisons l'algèbre effective

$$(H.1) \quad \mathcal{A}_{\text{RGHCLi}} = Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

où :

- $Cl(1, 3)$ désigne l'algèbre de Clifford de signature lorentzienne, adaptée à la structure locale de l'espace-temps relativiste ;
- \mathbb{H} désigne l'algèbre des quaternions, interprétée ici comme secteur interne de type rotation/jauge.

Le secteur $Cl(1, 3)$ porte naturellement :

- les vecteurs de l'espace-temps ;
- les bivecteurs associés aux rotations et boosts ;
- les structures spinorielles locales.

Le secteur quaternionique \mathbb{H} porte quant à lui :

- une structure interne triplet ;
- une dynamique de type $SU(2)$;
- des degrés de liberté géométriques supplémentaires non directement observables.

H.3 Variété de base et fibre interne. On conserve une variété lorentzienne classique M de dimension 4, munie d'une métrique réelle observable $g_{\mu\nu}$. À chaque point $x \in M$, on associe une fibre algébrique

$$(H.2) \quad \mathcal{F}_x \simeq Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}.$$

Ainsi, la structure totale peut être vue comme un fibré algébrique étendu

$$(H.3) \quad \mathcal{F} \longrightarrow M.$$

Dans cette perspective, les quantités mesurées expérimentalement ne sont pas nécessairement les objets fondamentaux, mais des projections effectives de la structure complète.

H.4 Principe de projection observable. L'une des hypothèses conceptuelles de RGHCLi est que la géométrie observable correspond à une projection réelle d'une structure plus riche. Formellement, on peut introduire une application de projection

$$(H.4) \quad \Pi_{\text{obs}} : Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \Pi_{\text{obs}} : Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H} \longrightarrow TM.$$

Dans une première version conservatrice du modèle, on maintient la métrique réelle $g_{\mu\nu}$ comme objet fondamental observable, et l'extension hypercomplexe est portée non par la métrique elle-même mais par les connexions et les courbures associées.

H.5 Connexion totale étendue. Nous introduisons une dérivation covariante étendue

$$(H.5) \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} + W_\mu \mathbf{1} + g_H A_\mu^I \tau_I,$$

où :

- ω_μ^{ab} est la connexion de spin associée au secteur relativiste ;
- γ_{ab} sont les générateurs bivectoriels de $Cl(1, 3)$;
- W_μ est un champ de type Weyl associé à une structure conforme/dilatation ;
- A_μ^I est une connexion quaternionique interne ;
- τ_I désignent les générateurs internes associés au secteur quaternionique ;
- g_H est une constante de couplage du secteur hypercomplexe.

Cette écriture sépare naturellement trois composantes :

- (1) la géométrie relativiste standard ;
- (2) le secteur conforme de type Weyl ;
- (3) la géométrie interne quaternionique.

H.6 Courbure totale. La courbure associée à la connexion totale est définie par

$$(H.6) \quad [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \mathcal{F}_{\mu\nu}.$$

Elle peut se décomposer schématiquement sous la forme

$$(H.7) \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}^{ab} \gamma_{ab} + F_{\mu\nu}^{(W)} \mathbf{1} + g_H F_{\mu\nu}^I \tau_I + \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\text{mix})},$$

où :

- $R_{\mu\nu}^{ab}$ est la courbure du secteur spin/gravitation ;
- $F_{\mu\nu}^{(W)} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ est la courbure du secteur de Weyl ;
-

$$(H.8) \quad F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + g_H \epsilon^I_{JK} A_\mu^J A_\nu^K$$

est la courbure du secteur quaternionique ;

- $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\text{mix})}$ regroupe les termes de couplage entre les différents secteurs.

Ces termes mixtes constituent le coeur spécifique de l'extension RGHCli.

H.7 Action effective minimale. Une action effective minimale compatible avec cette structure peut être écrite sous la forme

$$(H.9) \quad S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(W)} F^{\mu\nu}_{(W)} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^I F^{\mu\nu}_I + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_m \right].$$

Le terme \mathcal{L}_{mix} encode les interactions entre la courbure relativiste, le secteur de Weyl et le secteur hypercomplexe interne. À titre indicatif, on peut envisager des contributions de la forme

$$(H.10) \quad \mathcal{L}_{\text{mix}} = \xi R A_\mu^I A_I^\mu + \eta W_\mu J_H^\mu + \zeta F_{\mu\nu}^{(W)} F^{\mu\nu}_I \Phi^I,$$

où ξ, η, ζ sont des constantes de couplage et où Φ^I et J_H^μ représentent des variables effectives issues du secteur hypercomplexe.

H.8 Équations de champ effectives. La variation de l'action par rapport à la métrique conduit schématiquement à des équations d'Einstein modifiées :

$$(H.11) \quad G_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})} \right).$$

Le tenseur d'énergie-impulsion effectif peut donc être défini par

$$(H.12) \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})}.$$

Dans cette lecture, la gravitation observée n'est plus exclusivement due à la matière ordinaire, mais reçoit également des contributions géométriques issues :

- de la structure conforme ;
- de la courbure quaternionique interne ;
- des termes de couplage entre secteurs.

H.9 Interprétation physique. Dans une telle extension, il devient possible d'interpréter certaines composantes gravitationnelles effectives comme provenant d'une structure interne géométrique plutôt que d'une matière particulière additionnelle. En particulier, on peut envisager des configurations pour lesquelles

$$(H.13) \quad T_{\mu\nu}^{(m)} \ll T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})},$$

ce qui ouvre la possibilité de halos gravitationnels à faible contenu baryonique apparent.

Dans un contexte cosmologique homogène, les équations de Friedmann seraient alors modifiées par des densités et pressions effectives supplémentaires,

$$(H.14) \quad \rho_{\text{eff}} = \rho_m + \rho_W + \rho_H + \rho_{\text{mix}}, \quad p_{\text{eff}} = p_m + p_W + p_H + p_{\text{mix}},$$

permettant en principe l'émergence de régimes de rebond, de saturation ou d'accélération effective.

H.10 Position méthodologique. Il convient de souligner que la présente annexe ne constitue qu'une première esquisse structurale. Dans une première phase, l'option méthodologiquement la plus robuste consiste à :

- conserver une métrique réelle observable $g_{\mu\nu}$;
- porter l'extension sur les connexions, courbures et secteurs internes ;
- n'introduire une métrique hypercomplexe complète qu'à un stade ultérieur, une fois les conditions de cohérence causale, variationnelle et énergétique clarifiées.

H.11 Résumé. L'extension RGHCli proposée ici repose sur l'idée qu'une structure mixte

$$(H.15) \quad Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}$$

peut servir de support naturel à une géométrie gravitationnelle étendue combinant :

- la géométrie relativiste locale ;
- une structure conforme de type Weyl ;
- une dynamique interne quaternionique ;
- des termes de couplage susceptibles de générer une gravitation effective additionnelle.

Cette architecture offre ainsi un cadre conceptuel pour explorer une généralisation de la RGH dans laquelle les contributions géométriques internes participent directement à la dynamique gravitationnelle observable.

H.12 Ansatz affine minimale du secteur hypercomplexe. Dans le cadre de la RGH, la structure quaternionique interne peut être interprétée non seulement comme un secteur de jauge contribuant au tenseur d'énergie-impulsion effectif, mais également comme une structure géométrique susceptible de modifier le transport parallèle dans l'espace-temps observable.

Afin de capturer cette possibilité au niveau le plus simple, nous introduisons ici une ansatz affine minimale dans laquelle la connexion effective de l'espace-temps reçoit une contribution supplémentaire provenant du secteur hypercomplexe interne.

Dans une version forte de la RGH, on peut postuler que le secteur quaternionique ne contribue pas seulement au tenseur d'énergie-impulsion effectif, mais également à la connexion affine observable. On introduit alors une connexion effective de la forme

La géométrie observable est alors décrite par une connexion effective $\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho$ obtenue en complétant la connexion de Levi-Civita par une correction dépendant du champ hypercomplexe interne.

$$(H.16) \quad \Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H),$$

où la contribution hypercomplexe est prise, au niveau minimal, sous la forme

$$(H.17) \quad \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right).$$

Cette écriture peut être interprétée géométriquement comme la projection sur l'espace-temps observable d'une connexion définie sur l'espace total fibré $M_4 \times F$, où F désigne la fibre interne hypercomplexe.

Ici, A_μ^I désigne la connexion quaternionique interne, $\Sigma_{\nu I}^\rho$ un tenseur de projection base-fibre, et λ une constante de couplage géométrique. Cette écriture traduit l'idée que la structure hypercomplexe interne modifie directement le transport parallèle et les géodésiques de l'espace-temps observable.

ANNEXE I ANNEXE — ÉQUATION DE FRIEDMANN EFFECTIVE EN CADRE RGH–WEYL
ET COMPARAISON STRUCTURELLE AVEC LA BIGRAVITÉ DE
DAMOUR–KOGAN–PAPAZOGLU

I.1 Équation de Friedmann effective en cadre RGH–Weyl et comparaison structurale avec la bigravité de Damour–Kogan–Papazoglou. Cette annexe explicite la forme effective de l'équation de Friedmann dans le cadre RGH–Weyl et précise en quel sens son terme géométrique additionnel joue un rôle structurellement analogue, sans identité de contenu, au terme d'interaction bimétrique étudié par Damour, Kogan et Papazoglou.

On considère un espace-temps homogène et isotrope de type FLRW,

$$(I.1) \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\Sigma_k^2, \quad H := \frac{\dot{a}}{a},$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle, $k \in \{-1, 0, +1\}$ la courbure spatiale normalisée, et H le paramètre de Hubble.

Dans le cadre standard, l'équation de Friedmann s'écrit

$$(I.2) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}.$$

Dans le cadre RGH enrichi par une structure interne hypercomplexe et par une contribution de type Weyl, on postule que la dynamique cosmologique effective reçoit une correction géométrique supplémentaire. On écrit alors

$$(I.3) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})}$$

avec

$$(I.4) \quad \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})} = \Phi(I_{\text{HC}}) + \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H)$$

où :

- I_{HC} désigne un invariant effectif du secteur hypercomplexe interne ;
- $\varphi(t)$ désigne la composante homogène du champ de Weyl, via

$$(I.5) \quad W_\mu = (\varphi(t), 0, 0, 0).$$

Au premier ordre non trivial, on peut paramétrer ces contributions sous la forme

$$(I.6) \quad \Phi(I_{\text{HC}}) \simeq \alpha \omega_J^2 + \beta \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J,$$

où ω_J représente un mode effectif associé à la structure hypercomplexe, et

$$(I.7) \quad \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H) \simeq A \varphi^2 + B H \varphi + C \dot{\varphi}.$$

On obtient ainsi l'équation effective explicite

$$(I.8) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha \omega_J^2 + \beta \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J + A \varphi^2 + B H \varphi + C \dot{\varphi}$$

L'équation d'accélération correspondante s'écrit de manière générale

$$(I.9) \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} + \tilde{\Phi}(I_{\text{HC}}) + \tilde{\Psi}(\varphi, \dot{\varphi}, H)$$

où les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Psi}$ dépendent du détail du couplage effectif choisi.

Un rebond cosmologique en $t = t_b$ est alors caractérisé par les conditions

$$(I.10) \quad H(t_b) = 0, \quad \ddot{a}(t_b) > 0.$$

En utilisant (I.3), cela impose

$$(I.11) \quad 0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a_b^2} + \rho_{\text{eff},b}^{(\text{RGH-W})},$$

tandis que (I.9) requiert

$$(I.12) \quad \tilde{\Phi}(I_{\text{HC},b}) + \tilde{\Psi}(\varphi_b, \dot{\varphi}_b, H_b) > \frac{4\pi G}{3}(\rho_b + 3p_b) - \frac{\Lambda}{3}.$$

Cette écriture admet une analogie structurelle claire avec la bigravité non linéaire étudiée par Damour, Kogan et Papazoglou : dans leur cas, l'accélération cosmique effective provient d'un potentiel d'interaction entre deux métriques dynamiques ; dans le cadre présent, elle provient d'une densité géométrique effective issue du secteur hypercomplexe et/ou du champ de Weyl. Le parallèle pertinent n'est donc pas une identification des deux théories, mais une correspondance de rôle dans l'équation cosmologique effective :

$$(I.13) \quad \text{bigravité de Damour-Kogan-Papazoglou : } H^2 \sim \frac{\Lambda}{3} + \rho_{\text{int}},$$

à comparer avec

$$(I.14) \quad \text{cadre RGH-Weyl : } H^2 \sim \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \rho_{\text{eff}}^{(\text{RGH-W})}.$$

Ainsi, dans les deux cas, un terme géométrique additionnel occupe la même position structurelle dans la dynamique de Friedmann, bien que son origine microscopique soit différente :

$$(I.15) \quad \rho_{\text{DE}}^{\text{eff}} \sim \begin{cases} \rho_{\text{interaction bimétrique}}, & \text{chez Damour-Kogan-Papazoglou,} \\ \Phi(I_{\text{HC}}) + \Psi(\varphi, \dot{\varphi}, H), & \text{dans le cadre RGH-Weyl.} \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

- [1] A. Einstein, *Les théories d'Einstein : nouvelle figure du monde*, Paris (1921). Disponible sur Archive.org : <https://archive.org/details/unenouvellefigur00fabruoft>
- [2] A. Einstein, *The General Theory of Relativity — Manuscript*, facsimilé du manuscrit original.
- [3] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Dover Publications (1952). (édition originale 1918)
- [4] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions*, Cambridge University Press (1866).
- [5] P. Eecke, *Géométrie des espaces de Riemann*, Dunod, UER Sciences.
- [6] E. Elbaz, *De l'électromagnétisme à l'électrofaible — Monopoles magnétiques*, Ellipses.
- [7] J.-M. Bauduin, *Problèmes corrigés de physique — Options M, P, TA*, Ellipses.
- [8] J.-M. Bauduin, *Problèmes corrigés de physique et chimie — Options T et TA*, Ellipses.
- [9] C. Ngô et H. Ngô, *Physique quantique — Introduction avec exercices*, Dunod, Paris. ISBN : 978-2225825823.
- [10] É. Cartan, *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 174 (1922).

Application numérique : rebond par invariant **hypercomplexe** X (commutateur / non-commutativité géométrique – *le plus* RGH)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On formalise une option “très RGH ” : le rebond est déclenché non par un invariant de courbure standard (K, R, W), ni par une composante effective, mais par un **invariant hypercomplexe de commutateur** mesurant la non-commutativité d’opérateurs de transport/covariance (au sens RGH symplectique/hypercomplexe). On définit un scalaire positif $X \geq 0$, on postule un seuil X_* , puis on construit une application numérique comparative (radiation vs stiff, et option domaines). C’est un *gabarit* : l’objectif est de rendre le déclencheur chiffrable.

1 Idée : un déclencheur par *commutateur*

En RGH , on peut associer au transport (connexion hypercomplexe / symplectique interne) des opérateurs D_μ . L’objet “pur RGH ” n’est pas seulement la courbure spacetime, mais la **non-commutativité** :

$$[D_\mu, D_\nu] \neq 0.$$

On construit alors un scalaire positif en contractant le “carré” du commutateur (analogue à une norme de courbure) :

$$X \equiv \text{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{\mu\nu}) \geq 0, \quad \mathcal{C}_{\mu\nu} \equiv [D_\mu, D_\nu]$$

où Tr désigne une trace/invariant interne (sur l’algèbre hypercomplexe, ou sur un espace interne).

Interprétation : X mesure une *intensité de non-commutativité/holonomie* due au secteur RGH (et pas seulement à la métrique).

2 Hypothèse (déclencheur)

On postule :

$$X(a) \rightarrow X_* \Rightarrow \text{rebond}.$$

L’idée physique : quand la non-commutativité devient trop forte (saturation géométrique interne), l’évolution bascule sur une branche rebondissante, et la contraction cesse ($H \rightarrow 0$).

3 Modèle heuristique pour obtenir une loi d’échelle

Pour une application numérique, il faut relier X à une quantité cosmologique simple. On adopte un **ansatz de scaling** minimal, dans l’esprit de nos tests Weyl/Kretschmann :

$$X \approx \chi H^4 \quad (\chi > 0 \text{ coefficient effectif})$$

où χ encode : couplages hypercomplexes, amplitudes internes (ω, J), normalisation de trace, etc.

Pourquoi H^4 ? H a dimension $[H] = s^{-1}$; H^4 correspond à une échelle “quadratique en courbure” (comme K ou W en m^{-4}) après conversion d’unités. Ici, on *calibre* pour que X_* puisse être comparé aux seuils K_* et W_* (ordre de grandeur). C’est un choix de *gabarit*, pas une dérivation.

4 Densité critique équivalente

En reprenant la relation d'échelle (comparatif) :

$$H^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho,$$

on obtient au seuil $X = X_\star$:

$$X_\star \approx \chi \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^2 \rho_\star^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_\star(X) \approx \sqrt{\frac{X_\star}{\chi}} \frac{3}{8\pi G}}.$$

5 Échelle du rebond : radiation vs stiff

Avec $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$, la condition $\rho(a_b) = \rho_\star$ donne :

$$\boxed{\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star(X)} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0}}.$$

Normalisation de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

6 Choix de seuils X_\star (calibrage)

On choisit deux valeurs illustratives, dans le même esprit que nos seuils sur K :

$$X_\star = 10^{-5} \text{ (unité effective)} \quad (\text{“stellaire”}), \quad X_\star = 10^{19} \text{ (unité effective)} \quad (\text{“nucléaire”}).$$

Note : l'unité exacte de X dépend de la normalisation de D_μ et de la trace interne ; on utilise ici un *calibrage* pour produire des ordres de grandeur comparables.

7 Résultats numériques (pour $\chi = 1$)

TABLE 1 – Rebond au seuil hypercomplexe X_\star (ansatz $X \simeq \chi H^4$), avec $\chi = 1$. On donne R_b en années-lumière (a.l.) pour radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$).

Seuil X_\star	R_b (a.l.) radiation	R_b (a.l.) stiff
10^{-5}	~ 80	$\sim 9.1 \times 10^4$
10^{19}	$\sim 8.0 \times 10^{-2}$	$\sim 9.1 \times 10^2$

Lecture. Avec ce gabarit, X se comporte numériquement comme un “seuil à la Weyl/Kretschmann” (quadratique en ρ), et on retrouve les mêmes ordres de grandeur : ~ 80 a.l. (radiation, seuil stellaire) ou $\sim \text{kly}$ (stiff). **La nouveauté n'est pas l'échelle** : c'est la *signification* du seuil (non-commutativité interne RGH).

8 Option : domaines/inhomogénéités

Si un domaine a une surdensité δ (modèle jouet) :

$$\rho_{\text{dom}}(a) = (1 + \delta) \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

Alors le facteur de décalage est identique à nos autres scénarios “domaines” :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b^{\text{fond}}} = (1 + \delta)^{\frac{1}{3(1+w)}}}.$$

Donc, typiquement :

$$\text{radiation : } (1 + \delta)^{1/4}, \quad \text{stiff : } (1 + \delta)^{1/6}.$$

Interprétation : si X est bien un invariant local, les îlots denses peuvent rebondir à des échelles plus larges.

Ce que χ représente (le vrai bouton RGH)

Le paramètre effectif χ absorbe :

- normalisation du commutateur (définition exacte de D_μ),
- couplage au secteur interne (ω, J) ,
- contributions Weyl / non-métricité si elles entrent dans D_μ ,
- choix de trace/invariant interne.

Si tu veux “un univers très isotrope mais rebond large”, c’est ici que ça se joue :

$$\rho_\star \propto \chi^{-1/2}, \quad R_b \propto \chi^{+\frac{1}{6(1+w)}}.$$

Limites (honnêteté)

- Le lien $X \simeq \chi H^4$ est un **ansatz** de test. Une dérivation RGH fixera la dépendance exacte (H^4 , $H^2\sigma^2$, gradients, etc.).
- La dimension de X est **conventionnelle** tant que D_μ n’est pas fixé : d’où le statut “calibrage” de X_\star .
- Ce document sert à rendre l’idée *opérationnelle* : un seul seuil X_\star , un seul bouton χ , et des comparaisons immédiates.

Note humour : là, l’univers rebondit quand il devient trop *non-commutatif* – même les opérateurs se disputent, alors on repart en expansion. ;

Application numérique du rebond X (commutateur hypercomplexe)

Contrainte de conservation d'une galaxie de type Voie Lactée

Lolo & HAL9000

[2026-02-06]

Résumé

On résume l'application numérique d'un scénario de rebond déclenché par un invariant X construit à partir d'un commutateur de dérivées covariantes incluant une connexion interne (hypercomplexe). On dérive la dépendance de l'échelle au rebond R_b en fonction du seuil X_\star et d'un paramètre χ_X via l'ansatz $X \simeq \chi_X H^4$. On impose ensuite la contrainte phénoménologique minimale : préserver une galaxie de type Voie Lactée, ce qui se traduit par $R_b \gtrsim 10^5$ a.l.. Un réglage simple dans un régime *stiff* ($w = 1$) suffit et fournit des valeurs explicites pour χ_X ou X_\star .

1 Hypothèses, modèle, et invariant de commutateur

1.1 Dérivée covariante totale et commutateur

On considère une dérivée covariante agissant sur un champ test $V^{\rho a}$ portant un indice spacetime ρ et un indice interne a (représentation de dimension finie). Une forme pratique est

$$(\nabla_\mu V)^{\rho a} = \partial_\mu V^{\rho a} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} V^{\sigma a} + w \Phi_\mu V^{\rho a} + (A_\mu)^a_b V^{\rho b}, \quad (1)$$

où $\Gamma^\rho_{\mu\sigma}$ est la connexion (Levi-Civita si l'on veut), Φ_μ est un champ scalaire de type Weyl (ou un terme de poids conforme), et A_μ une connexion interne (hypercomplexe).

Le commutateur se décompose classiquement en

$$([\nabla_\mu, \nabla_\nu] V)^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma + w F_{\mu\nu}^{(W)} V^\rho + (F_{\mu\nu}^{(\text{int})}) V^\rho, \quad (2)$$

avec les courbures correspondantes. Dans l'option “rebond X ”, on retient un scalaire positif (construit uniquement sur le secteur interne) :

$$X \equiv X_{\text{int}} = \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(\text{int})} F^{(\text{int})\mu\nu} \right) \geq 0. \quad (3)$$

1.2 Déclenchement du rebond

On postule l'existence d'un seuil $X_\star > 0$ tel que

$$\boxed{X(a) \rightarrow X_\star \implies \text{rebond}} \quad (4)$$

au sens où la dynamique effective s'organise de manière à éviter une singularité (par exemple via un changement de branche, un terme répulsif effectif, ou une transition contrôlée par la structure interne).

2 Application numérique : ansatz $X \simeq \chi_X H^4$

2.1 Ansatz dimensionnel

Pour obtenir un ordre de grandeur chiffrable, on adopte l'ansatz

$$\boxed{X \simeq \chi_X H^4} \quad (5)$$

où χ_X est un paramètre (sans dimension dans ce gabarit) encapsulant les détails microphysiques du secteur interne.

2.2 Lien avec la densité d'énergie

Dans un fond FLRW dominé par un fluide parfait $p = w\rho$, on utilise $H^2 \propto \rho$ (au niveau d'ordre de grandeur du gabarit), d'où

$$X \sim \chi_X H^4 \propto \chi_X \rho^2. \quad (6)$$

Au seuil $X = X_\star$, on obtient une densité critique

$$\rho_\star \propto \sqrt{\frac{X_\star}{\chi_X}}. \quad (7)$$

2.3 Échelle de rebond R_b

Avec l'évolution standard d'un fluide constant w ,

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (8)$$

on déduit

$$a_\star \propto \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star}\right)^{1/[3(1+w)]} \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star}\right)^{1/[6(1+w)]}. \quad (9)$$

En définissant R_b comme un rayon physique caractéristique au rebond (par exemple proportionnel à a_\star fois une échelle comobile fixée), on obtient la loi d'échelle fondamentale de l'application numérique :

$$\boxed{R_b \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star}\right)^{\frac{1}{6(1+w)}}} \quad (10)$$

3 Conservation d'une galaxie de type Voie Lactée (MW)

3.1 Critère phénoménologique minimal

On impose que l'échelle au rebond ne soit pas inférieure à l'ordre de grandeur d'une grande galaxie spirale. On prend comme repère conservateur

$$\boxed{R_b \gtrsim R_{\text{MW}} \sim 10^5 \text{ a.l.}}. \quad (11)$$

3.2 Choix du régime proche du rebond

Dans l'application numérique initiale, on obtient (pour $\chi_X = 1$ et $X_\star = 10^{-5}$) :

$$w = \frac{1}{3} \text{ (radiation)} : \quad R_b \sim 80 \text{ a.l.} \quad (\text{trop petit pour MW}), \quad (12)$$

$$w = 1 \text{ (stiff)} : \quad R_b \sim 9.1 \times 10^4 \text{ a.l.} \quad (\text{quasi MW}). \quad (13)$$

Ainsi, la conservation MW privilégie un régime *stiff* proche du rebond :

$$\boxed{w = 1 \quad \Rightarrow \quad R_b \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star} \right)^{1/12}}. \quad (14)$$

3.3 Réglage minimal pour atteindre $R_b \simeq 10^5$ a.l.

On part du point de référence

$$(\chi_{X0}, X_{\star0}, w) = (1, 10^{-5}, 1), \quad R_{b0} \simeq 9.1 \times 10^4 \text{ a.l.} \quad (15)$$

En stiff ($w = 1$), la relation (10) donne

$$\frac{R_b}{R_{b0}} = \left(\frac{(\chi_X/X_\star)}{(\chi_{X0}/X_{\star0})} \right)^{1/12}. \quad (16)$$

Pour $R_b = 10^5$ a.l., le facteur requis sur le ratio χ_X/X_\star est

$$f \equiv \frac{\chi_X/X_\star}{\chi_{X0}/X_{\star0}} = \left(\frac{10^5}{9.1 \times 10^4} \right)^{12} \approx 3.1. \quad (17)$$

On en déduit deux paramétrisations équivalentes et “douces” :

Option A (garder $X_\star = 10^{-5}$).

$$\boxed{X_\star = 10^{-5}, \quad w = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi_X \simeq 3.1}. \quad (18)$$

Option B (garder $\chi_X = 1$).

$$\boxed{\chi_X = 1, w = 1 \Rightarrow X_\star \simeq 3.2 \times 10^{-6}}. \quad (19)$$

3.4 Remarque de cohérence notationnelle

Attention à ne pas confondre le paramètre χ_X (ansatz $X \simeq \chi_X H^4$) avec un éventuel $\chi(t)$ apparaissant ailleurs (par ex. dans un mélange Ω_{mix}). Il est recommandé de réserver χ_X (ou κ_X) exclusivement au secteur X .

4 Résumé (à copier-coller)

- Modèle : rebond lorsque $X \rightarrow X_\star$, avec $X = \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{(\text{int})} F^{(\text{int})\mu\nu})$.
- Gabarit numérique : $X \simeq \chi_X H^4 \Rightarrow R_b \propto (\chi_X/X_\star)^{1/[6(1+w)]}$.
- Critère MW : $R_b \gtrsim 10^5$ a.l..
- Conclusion : la branche **stiff** ($w = 1$) est naturellement MW-compatible.
- Réglage minimal : multiplier χ_X/X_\star par ~ 3.1 (ex. : $\chi_X \simeq 3.1$ à $X_\star = 10^{-5}$).

Note d'humeur : quand les opérateurs internes arrêtent de commuter, l'Univers fait une pirouette et évite la singularité. La singularité, elle, n'a pas signé le formulaire.

Application numérique : rebond au seuil de Ricci scalaire R_\star (déclencheur “matière/expansion” – comparatif radiation vs stiff)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On teste un déclencheur alternatif au Kretschmann K et au Weyl conforme $W = C^2$: le rebond est supposé se produire lorsque le **scalaire de courbure de Ricci** R atteint un seuil R_\star . Ce déclencheur est plus “matière/expansion” (il suit la trace de l’équation d’Einstein) et reste non nul en FLRW. On traduit R_\star en une densité critique équivalente $\rho_\star(R)$ puis on calcule a_b/a_0 et R_b dans les deux cas usuels : radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$).

1 Qu’est-ce que R (Ricci scalaire) ?

R est la contraction du tenseur de Ricci :

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

En relativité générale, il est directement lié à la *trace* du tenseur énergie-impulsion :

$$R = -8\pi G T \quad (\text{unités } c = 1), \quad T \equiv T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p.$$

Pour un fluide parfait $p = w\rho$:

$$T = \rho(3w - 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 8\pi G \rho(1 - 3w)} \quad (c = 1).$$

Point important : en **radiation pure** ($w = \frac{1}{3}$), on a $T = 0$ donc $R = 0$ en FLRW. Donc un seuil sur R ne peut pas déclencher un rebond si l’univers est strictement dominé par radiation parfaite. Il faut alors : (i) un contenu non radiatif, (ii) un $w_{\text{eff}} \neq 1/3$ (même légèrement), ou (iii) une modification de l’équation (RGH).

2 Hypothèse de déclencheur

On postule :

$$\boxed{|R| \rightarrow R_\star \Rightarrow \text{rebond}}.$$

Pour obtenir une application numérique, on utilise la relation FLRW (calibrage) :

$$|R| \approx 8\pi G |1 - 3w| \rho \quad (c = 1),$$

d’où une densité critique équivalente :

$$\boxed{\rho_\star(R) \approx \frac{R_\star}{8\pi G |1 - 3w|}}.$$

En SI, si on veut expliciter c , on aurait $R \sim (8\pi G/c^2)(\rho - 3p/c^2)$; ici on reste en convention $c = 1$ car tout le reste de nos applications est comparatif.

3 Échelle au rebond

Avec $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$, la condition $\rho(a_b) = \rho_\star$ donne :

$$\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star(R)} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0}.$$

Normalisation comparatif :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

4 Choix de seuils R_\star (calibrage)

R a la dimension m^{-2} . Pour rester cohérent avec nos seuils sur K et W (en m^{-4}), on peut penser à

$$R_\star \sim \sqrt{K_\star} \quad (\text{ordre de grandeur}).$$

Donc, si $K_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$ (“stellaire”), on aurait $R_\star \sim 3.16 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}$. Si $K_\star = 10^{19} \text{ m}^{-4}$ (“nucléaire”), $R_\star \sim 3.16 \times 10^9 \text{ m}^{-2}$. Ce n’est **pas** une identité : juste une manière de choisir des seuils comparables.

5 Résultats numériques (attention radiation)

Comme expliqué, en radiation parfaite $R = 0$ en FLRW ; donc ce déclencheur est **inopérant** en $w = \frac{1}{3}$ dans la GR standard. On fournit donc :

- le cas **stiff** ($w = 1$), où $|1 - 3w| = 2$,
- et un cas **quasi-radiatif** $w_{\text{eff}} = 0.32$ (juste pour illustrer l’effet d’un petit écart à $1/3$).

Paramètres numériques

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad \rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

TABLE 1 – Rebond au seuil $|R| = R_\star$: densité critique équivalente $\rho_\star(R)$ et échelle R_b . Deux seuils illustratifs : $R_\star = 3.16 \times 10^{-3}$ et 3.16×10^9 (en m^{-2}). Cas stiff ($w = 1$) et quasi-radiatif ($w = 0.32$).

Cas	R_\star (m^{-2})	$\rho_\star(R)$ (kg m^{-3})	R_b (a.l.)
stiff $w = 1$	3.16×10^{-3}	9.43×10^5	9.2×10^4
stiff $w = 1$	3.16×10^9	9.43×10^{17}	9.2×10^2
quasi-rad $w = 0.32$	3.16×10^{-3}	1.70×10^7	1.8×10^2
quasi-rad $w = 0.32$	3.16×10^9	1.70×10^{19}	1.8

Lecture.

- Pour $w = 1$ (stiff), un seuil Ricci “stellaire” donne un rebond très large (kly), car la loi a^{-6} rend la contraction à densité seuil plus “douce” en taille.
- Un léger écart à $w = 1/3$ rend R non nul et permet un rebond Ricci, mais le résultat dépend fortement de $|1 - 3w|$: si w est trop proche de $1/3$, il faut une densité énorme pour atteindre un même R_\star .

Ce que ça signifie pour RGH (et pourquoi c'est intéressant)

- Si dans RGH l'équation effective liant R à la trace T est modifiée (ou si T inclut des contributions internes), alors R peut devenir un vrai déclencheur *même en régime quasi-radiatif*.
- Le déclencheur Ricci est conceptuellement “plus FRW” que Weyl : il suit la partie Ricci (matière/expansion) plutôt que les marées.
- Donc il est utile comme **test de contrôle** : si ton scénario repose sur des marées/structures, Ricci doit jouer un rôle secondaire.

Note humour : Ricci, c'est le compteur EDF de l'univers : il mesure la conso moyenne, pas les turbulences. ;

Application numérique : rebond déclenché par un seuil de Kretschmann K_\star (RGH – version hypothétique)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On remplace la condition de rebond “densité critique” par une condition purement géométrique : *le rebond est déclenché quand l’invariant de Kretschmann $K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ atteint un seuil K_\star* . On en déduit une densité critique *équivalente* $\rho_\star(K)$ (ordre de grandeur) et des échelles associées au rebond.

1 Hypothèses (annoncées)

1. Fond FLRW plat pour le *fond* cosmologique.
2. Le rebond est défini par un plafond de courbure totale :

$$K \leq K_\star, \quad \text{et rebond lorsque } K \rightarrow K_\star.$$

3. Pour traduire K_\star en une “densité critique” équivalente, on utilise la relation GR d’ordre de grandeur pour un fluide parfait $p = w\rho$ (utile comme *calibrage*, même si le mécanisme fondamental est géométrique).
4. Normalisation numérique (comparatif d’échelle) :

$$\rho_0 \equiv 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly.}$$

Note : pour un contenu stiff ($w = 1$), si sa densité actuelle réelle n’est pas ρ_0 , il faut remplacer ρ_0 par $\rho_{w=1,0}$.

2 Traduction $K_\star \Rightarrow \rho_\star(K)$

Pour un fluide $p = w\rho$, une estimation standard en FLRW donne :

$$K \approx \frac{64}{3} \pi^2 G^2 \rho^2 (9w^2 + 12w + 7).$$

On définit donc une densité critique *équivalente* :

$$\rho_\star(K) \approx \sqrt{\frac{3K_\star}{64\pi^2 G^2 (9w^2 + 12w + 7)}}.$$

3 Échelles au rebond

Avec la loi d’échelle $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$, le rebond $\rho(a_b) = \rho_\star$ donne :

$$\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star(K)} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0}.$$

4 Résultats numériques (radiation vs stiff)

TABLE 1 – Résultats pour deux seuils K_\star (“stellaire” et “nucléaire”) et deux contenus dominants : radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$). Référence : $\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$, $R_0 = 96 \text{ Gly}$.

Seuil	Contenu	$K_\star \text{ (m}^{-4}\text{)}$	$\rho_\star(K) \text{ (kg m}^{-3}\text{)}$	a_b/a_0	$R_b \text{ (a.l.)}$
Stellaire	Radiation ($w = \frac{1}{3}$)	10^{-5}	9.43×10^5	8.36×10^{-10}	8.02×10^1
Stellaire	Stiff ($w = 1$)	10^{-5}	6.17×10^5	9.52×10^{-7}	9.14×10^4
Nucléaire	Radiation ($w = \frac{1}{3}$)	10^{19}	9.43×10^{17}	8.36×10^{-13}	8.02×10^{-2}
Nucléaire	Stiff ($w = 1$)	10^{19}	6.17×10^{17}	9.52×10^{-9}	9.14×10^2

Lecture rapide. À K_\star fixé, le cas stiff ($w = 1$) rebondit à une échelle beaucoup plus grande que le cas radiation, car la densité stiff varie comme a^{-6} (contre a^{-4} pour radiation). Cela peut aider à construire des rebonds “doux” à grande échelle *si* un secteur effectif $w \simeq 1$ est présent avant le rebond (et si les anisotropies/cisaillements sont contrôlés).

Remarques (RGH / prudence)

- Ce document ne prouve pas une dynamique complète : il *calibre* numériquement un scénario “plafond de courbure”.
- Dans une RGH Weyl+symplectique, on peut interpréter K_\star comme une borne imposée par la structure interne (ω, J) (régularisation/saturation) tandis que Φ pilote l’échelle.
- Les échelles R_b sont associées à un choix de normalisation comobile (ici R_0) : ce n’est pas une “bille” matérielle.

Application numérique : rebond au seuil de Kretschmann

Variante avec anisotropies (cisaillement) – test d’ordre de grandeur

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

Dans un fond FLRW strict, fixer un seuil de Kretschmann K_* revient presque à fixer une densité critique équivalente ρ_* , donc les échelles obtenues ressemblent à celles d’un rebond “à densité critique”. La différence conceptuelle devient nette dès qu’on quitte FLRW et qu’on autorise des anisotropies (cisaillement) : l’invariant de Kretschmann est sensible aux *marées* et au *cisaillement*, donc un plafond K_* peut déclencher le rebond plus tôt (quand ρ est plus faible) si le cisaillement augmente K . Ce document fait un *test d’ordre de grandeur* illustratif.

1 Hypothèses et cadre de test

1. On garde l’idée : **rebond quand** $K \rightarrow K_*$ (plafond de courbure totale).
2. On relâche FLRW strict : on autorise un **cisaillement** (type Bianchi I) caractérisé par un scalaire σ .
3. On ne cherche **pas** ici une expression exacte de K en Bianchi I (qui dépend des directions) : on modélise l’effet du cisaillement par un facteur multiplicatif *heuristique* sur K .
4. On illustre numériquement le cas **radiation** ($w = \frac{1}{3}$) pour rester comparable aux documents précédents.

Paramètre de cisaillement (adimensionné). On introduit un paramètre Σ (sans dimension) mesurant “combien de cisaillement” on a relativement au fond :

$$\Sigma \sim \frac{\sigma^2}{H^2} \quad (\text{idée : cisaillement faible } \Sigma \ll 1, \text{ fort } \Sigma \gtrsim 1).$$

En contraction, Σ tend à croître (instabilité BKL) si aucun mécanisme ne la coupe : c’est *précisément* ce qui rend un plafond sur K intéressant.

2 Pourquoi K_* devient différent de ρ_* hors FLRW

En FLRW, on a typiquement $K \propto G^2 \rho^2$ (à facteur dépendant de w), d’où une correspondance quasi automatique $K_* \leftrightarrow \rho_*$.

Hors FLRW, K reçoit des contributions supplémentaires en cisaillement (termes du type $H^2 \sigma^2$, σ^4 , etc.). Donc, à *densité égale*, un cisaillement non nul augmente K et peut faire atteindre K_* **plus tôt**, c’est-à-dire pour une densité plus faible.

3 Modèle heuristique (illustration)

On encode l’effet du cisaillement par un facteur :

$$K \approx K_{\text{FLRW}} (1 + \alpha \Sigma + \beta \Sigma^2),$$

avec des coefficients α, β d'ordre 1 (ici **choix illustratif** : $\alpha = 2, \beta = 1$). Alors, pour un même plafond K_\star , la densité critique équivalente est réduite :

$$\rho_\star^{\text{eff}}(K, \Sigma) \approx \frac{\rho_\star^{\text{FLRW}}(K)}{\sqrt{1 + \alpha\Sigma + \beta\Sigma^2}}.$$

Lecture : plus Σ est grand, plus on déclenche le rebond à densité moyenne plus faible.

4 Normalisation numérique

On conserve les mêmes références que précédemment :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

Pour radiation ($w = \frac{1}{3}$), on utilise :

$$\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star^{\text{eff}}} \right)^{1/4}, \quad R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0}.$$

5 Résultats (ordre de grandeur)

TABLE 1 – Effet illustratif du cisaillement sur l'échelle du rebond, à plafond K_\star fixé. Cas radiation $w = \frac{1}{3}$. Les valeurs $\Sigma = 1$ et 10 sont des scénarios “cisaillement modéré” et “fort” (illustratifs).

Seuil K_\star	Σ	ρ_\star^{eff} (kg m ⁻³)	a_b/a_0	R_b (a.l.)
10^{-5} m^{-4} (“stellaire”)	0	9.43×10^5	8.36×10^{-10}	80
10^{-5} m^{-4} (“stellaire”)	1	4.71×10^5	9.94×10^{-10}	95
10^{-5} m^{-4} (“stellaire”)	10	8.57×10^4	1.52×10^{-9}	146
10^{19} m^{-4} (“nucléaire”)	0	9.43×10^{17}	8.36×10^{-13}	8.0×10^{-2}
10^{19} m^{-4} (“nucléaire”)	1	4.71×10^{17}	9.94×10^{-13}	9.5×10^{-2}
10^{19} m^{-4} (“nucléaire”)	10	8.57×10^{16}	1.52×10^{-12}	1.46×10^{-1}

Interprétation. Dans ce test, le cisaillement rend le plafond K_\star **plus contraignant** que la simple densité moyenne : le rebond se déclenche *plus tôt* (densité plus faible) lorsque Σ augmente. C’est exactement la raison pour laquelle un seuil sur K est conceptuellement intéressant : il “voit” les marées/anisotropies.

Limites (honnêteté scientifique)

- Les coefficients α, β sont **illustratifs** : une dérivation exacte en Bianchi I donnerait une forme précise.
- Le but ici est de montrer *le mécanisme* : hors FLRW, K dépend d’autre chose que ρ .
- Dans une RGH Weyl+symplectique, on peut interpréter l’effet “coupe-cisaillement” comme provenant du secteur interne (ω, J) (régularisation/saturation), tout en gardant Φ comme variable d’échelle.

Application numérique : rebond à seuil unique

Invariant maître mixte $\mathcal{I} = \alpha \Phi^2 + \beta \mathcal{S}(\omega, J)$

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On applique numériquement l'hypothèse “seuil unique” sur un invariant maître mixte combinant le secteur Weyl (via Φ) et un secteur interne symplectique (ω, J) . Pour obtenir une application chiffrée minimale, on modélise \mathcal{I} comme la somme de deux contributions ayant des lois d'échelle différentes en facteur d'échelle a : une partie “radiation-like” (liée à Φ) et une partie “stiff-like” (liée à \mathcal{S}). On en déduit l'échelle du rebond a_b/a_0 et la “taille comobile normalisée” R_b .

1 Hypothèses (annoncées, minimalistes)

1. Fond FLRW plat (pour le fond).
2. On postule un **seuil unique** : le rebond a lieu lorsque

$$\mathcal{I}(a) \rightarrow \mathcal{I}_\star.$$

3. Pour une application numérique simple, on **identifie** l'invariant maître à une densité effective (au sens “budget énergétique”) :

$$\mathcal{I}(a) \leftrightarrow \rho_{\text{eff}}(a).$$

Ce n'est pas une dérivation d'action : c'est un *calibrage* pour obtenir des ordres de grandeur.

2 Modèle effectif : deux contributions et un seul seuil

On prend :

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \rho_\Phi(a) + \rho_\mathcal{S}(a), \quad \text{rebond quand } \rho_{\text{eff}}(a_b) = \rho_\star.$$

et on suppose des lois d'échelle distinctes :

— **Partie Weyl (“radiation-like”)** :

$$\rho_\Phi(a) = \rho_{\Phi,0} a^{-4}.$$

— **Partie interne symplectique (“stiff-like”)** :

$$\rho_\mathcal{S}(a) = \rho_{\mathcal{S},0} a^{-6}.$$

On introduit le ratio (très utile) :

$$r_0 \equiv \frac{\rho_{\mathcal{S},0}}{\rho_{\Phi,0}}.$$

Même si r_0 est minuscule aujourd'hui, la contribution stiff-like peut dominer à petit a (car a^{-6} gagne contre a^{-4}).

3 Équation du rebond

Avec $x \equiv a_b/a_0$ (et $a_0 = 1$), la condition de rebond devient :

$$\rho_{\Phi,0}x^{-4} + \rho_{S,0}x^{-6} = \rho_\star \iff \rho_\star y^3 - \rho_{\Phi,0}y - \rho_{S,0} = 0,$$

où $y \equiv x^2$. On résout ce polynôme (racine réelle positive), puis on calcule :

$$R_b = R_0 x.$$

4 Normalisation numérique (comparatif)

Pour être cohérent avec nos documents précédents, on fixe :

$$\rho_{\Phi,0} \equiv \rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

Note : si le secteur Weyl réel aujourd’hui n’a pas cette densité, il faut remplacer ρ_0 par $\rho_{\Phi,0}$. Ici, c’est un *comparatif d’échelle*.

5 Résultats : effet du ratio r_0

On donne R_b en années-lumière (a.l.). Deux seuils ρ_\star :

- “stellaire” : $\rho_\star = 10^6 \text{ kg m}^{-3}$,
- “nucléaire” : $\rho_\star = 10^{18} \text{ kg m}^{-3}$.

Et plusieurs valeurs illustratives de r_0 .

TABLE 1 – Rebond à seuil unique sur $\rho_{\text{eff}} = \rho_\Phi + \rho_S$, avec $\rho_\Phi \propto a^{-4}$ et $\rho_S \propto a^{-6}$. On montre comment un r_0 très petit aujourd’hui peut gonfler l’échelle du rebond.

Seuil ρ_\star	$r_0 = \rho_{S,0}/\rho_{\Phi,0}$	a_b/a_0	R_b (a.l.)
10^6 (stellaire)	0	8.235×10^{-10}	7.91×10^1
10^6 (stellaire)	10^{-22}	8.236×10^{-10}	7.91×10^1
10^6 (stellaire)	10^{-20}	8.265×10^{-10}	7.93×10^1
10^6 (stellaire)	10^{-18}	9.835×10^{-10}	9.44×10^1
10^6 (stellaire)	10^{-16}	1.904×10^{-9}	1.83×10^2
10^{18} (nucléaire)	0	8.235×10^{-13}	7.91×10^{-2}
10^{18} (nucléaire)	10^{-22}	1.904×10^{-12}	1.83×10^{-1}
10^{18} (nucléaire)	10^{-20}	4.079×10^{-12}	3.92×10^{-1}
10^{18} (nucléaire)	10^{-18}	8.786×10^{-12}	8.43×10^{-1}
10^{18} (nucléaire)	10^{-16}	1.893×10^{-11}	1.82

Lecture.

- Si $r_0 = 0$, on retombe sur le cas “pur radiation” (nos 80 a.l. pour le seuil stellaire).
- Dès que r_0 devient non négligeable *au moment du rebond* (même s’il est minuscule aujourd’hui), la composante stiff-like augmente a_b et donc R_b : le rebond devient plus “large”.
- C’est une façon concrète de réaliser “ Φ déclenche / (ω, J) régularise” tout en n’ayant qu’un seul seuil ρ_\star : le secteur interne peut être quasi invisible aujourd’hui mais dominant près du rebond.

Honnêteté scientifique

- Cette application numérise un **modèle effectif** (deux lois d'échelle) ; une action RGH complète fixerait les coefficients et la dynamique.
- Les choix a^{-4} et a^{-6} sont des **analogies** (radiation vs stiff). Ils sont justifiés comme premier test car ils capturent des comportements typiques.

Application numérique : rebond **interne pur** (ω, J) (déclencheur symplectique, Weyl suit l'échelle)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On teste l'hypothèse “interne pur” : le rebond est déclenché non pas par un invariant de courbure spacetime (K, W, R) , mais par un **invariant interne symplectique** construit à partir de (ω, J) . L'idée RGH : (ω, J) joue le rôle de régularisateur/structure interne, et atteint un seuil (ou une saturation type Born–Infeld) qui force $H \rightarrow 0$ puis le changement de branche. On propose un modèle jouet minimal, avec un *seul* seuil interne, et on en déduit a_b/a_0 et R_b (ordres de grandeur).

1 Hypothèse (déclencheur) : seuil interne

On postule l'existence d'un scalaire positif construit sur la structure interne :

$$\boxed{\mathcal{S}(\omega, J) \geq 0}$$

(exemples : $\omega_{ab}\omega^{ab}$, $\|\nabla\omega\|^2$, un invariant Born–Infeld interne, etc.) et on suppose que le rebond se produit quand

$$\boxed{\mathcal{S}(a) \rightarrow \mathcal{S}_* \Rightarrow \text{rebond}}.$$

Ici, \mathcal{S}_* est le seul paramètre seuil.

2 Loi d'échelle (modèle jouet)

Pour une application numérique sans action complète, on suppose que \mathcal{S} croît en contraction selon une puissance :

$$\boxed{\mathcal{S}(a) = \mathcal{S}_0 a^{-n}}, \quad n > 0.$$

Intuition :

- $n = 6$: comportement “stiff-like” (souvent associé à des termes de cisaillement / invariants quadratiques).
- $n = 4$: comportement “radiation-like” (moins naturel pour un invariant interne, mais utile en contrôle).
- $n \geq 8$: invariants à gradients plus durs (croissance plus rapide en contraction).

3 Échelle du rebond

La condition $\mathcal{S}(a_b) = \mathcal{S}_*$ donne directement :

$$\boxed{\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\mathcal{S}_0}{\mathcal{S}_*}\right)^{1/n}} \equiv s_0^{1/n}, \quad s_0 \equiv \frac{\mathcal{S}_0}{\mathcal{S}_*}.$$

Et la taille comobile normalisée :

$$\boxed{R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0} = R_0 s_0^{1/n}}.$$

Normalisation de comparaison (comme nos autres docs) :

$$R_0 = 96 \text{ Gly} = 96 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

Lecture.

- s_0 mesure “à quel point on est proche du seuil aujourd’hui” (ou à l’époque de normalisation).
- Plus n est grand, plus la croissance est raide, et plus il faut pousser a petit pour atteindre le seuil.

4 Numérique (ordres de grandeur)

On donne R_b (a.l.) pour différents s_0 (très petit) et trois valeurs de n .

$$R_b = (96 \times 10^9) s_0^{1/n} \text{ a.l.}$$

TABLE 1 – Rebond interne pur (ω, J) : $R_b = R_0 s_0^{1/n}$. On explore $s_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{S}_\star$ et $n \in \{6, 8, 10\}$.

s_0	R_b (a.l.) $n = 6$	R_b (a.l.) $n = 8$	R_b (a.l.) $n = 10$
10^{-30}	9.6×10^4	1.7×10^6	9.6×10^6
10^{-36}	9.6×10^3	3.0×10^5	2.4×10^6
10^{-42}	9.6×10^2	5.3×10^4	6.0×10^5
10^{-48}	9.6×10^1	9.6×10^3	1.5×10^5
10^{-54}	9.6	1.7×10^3	3.8×10^4

Point intéressant. Avec $n = 6$ (stiff-like interne), obtenir un rebond à ~ 100 a.l. correspond à $s_0 \sim 10^{-48}$. C’est l’analogie “interne pur” de nos résultats où un rapport d’amplitudes extrêmement petit aujourd’hui devient dominant en contraction.

Interprétation RGH

- Ici, le rebond est déclenché par la **saturation interne** : pas besoin d’exiger une anisotropie homogène énorme du spacetime.
- Weyl (Φ) peut alors être traité comme *suiveur* (il règle l’échelle et la compatibilité PPN) plutôt que déclencheur principal.
- Le paramètre n encode la **dureté** de l’invariant : plus il est grand, plus la transition est brusque en contraction.

Limites (honnêteté)

- \mathcal{S} et n sont ici **effectifs**. Une action RGH fixera la forme (quadratique ? gradients ? Born–Infeld ?).
- Le lien exact entre “seuil interne” et $H \rightarrow 0$ (équations de Friedmann modifiées) n’est pas dérivé ici : c’est un *gabarit*.

Note humour : là, le rebond est déclenché par le *cœur symplectique* de l’univers : quand ω dit stop, même H obéit. ;

Application numérique : rebond **par domaines** + déclencheur

Weyl conforme $W = C^2$
(combo “îlots survivants” – modèle jouet)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On combine deux idées déjà testées séparément : (i) un rebond *domainé* (inhomogène) via une surdensité locale δ , et (ii) un déclencheur géométrique via un plafond sur l’invariant de Weyl conforme $W \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$. Comme $W = 0$ en FLRW strict, ce déclencheur “voit” naturellement les marées/anisotropies. On en déduit une loi simple pour l’échelle de rebond locale a_b^{dom} et on donne un tableau (radiation vs stiff).

1 Hypothèses (minimalistes)

1. Fond “moyen” quasi-FLRW, mais domaines locaux avec surdensité δ :

$$\rho_{\text{dom}}(a) = (1 + \delta) \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

2. Le déclencheur est local : le domaine rebondit quand $W_{\text{dom}} \rightarrow W_\star$.
3. Modèle heuristique pour l’invariant conforme dans le domaine :

$$W_{\text{dom}} \approx \kappa \Sigma_{\text{dom}}^2 H_{\text{dom}}^4, \quad H_{\text{dom}}^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{dom}}.$$

Σ_{dom} mesure l’intensité des anisotropies/marées (adimensionné), $\kappa \sim 1$ est un coefficient effectif.

4. Normalisation de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

2 Densité critique équivalente induite par W_\star

En combinant les hypothèses, on obtient (ordre de grandeur) :

$$W_{\text{dom}} \approx \kappa \Sigma_{\text{dom}}^2 \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^2 \rho_{\text{dom}}^2.$$

Donc le seuil $W_{\text{dom}} = W_\star$ correspond à une densité critique équivalente :

$$\boxed{\rho_\star(W, \Sigma) \approx \sqrt{\frac{W_\star}{\kappa \Sigma_{\text{dom}}^2}} \frac{3}{8\pi G}}.$$

3 Rebond local : effet combiné δ & Σ_{dom}

Le domaine rebondit quand $\rho_{\text{dom}}(a_b^{\text{dom}}) = \rho_{\star}(W, \Sigma)$, donc :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0} = \left(\frac{(1 + \delta)\rho_0}{\rho_{\star}(W, \Sigma)} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}.}$$

Et la taille comobile normalisée :

$$\boxed{R_b^{\text{dom}} = R_0 \frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0}.}$$

Lecture : à W_{\star} fixé, augmenter Σ_{dom} (plus de marées) *facilite* d’atteindre le seuil et rend le rebond plus large ; augmenter δ (surdensité) rend aussi le rebond plus large (seuil atteint à densité moyenne plus faible du fond).

4 Table numérique (exemple) : $W_{\star} = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$

On fixe $\kappa = 1$ et on compare :

$$\Sigma_{\text{dom}} \in \{0.1, 1, 10\}, \quad \delta \in \{0, 10^2, 10^6\}, \quad w = \frac{1}{3} \text{ (radiation) ou } w = 1 \text{ (stiff)}.$$

TABLE 1 – Rebond domainé déclenché par $W = C^2$. On donne R_b^{dom} en années-lumière (a.l.). Seuil : $W_{\star} = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$, $\kappa = 1$, $R_0 = 96 \text{ Gly}$, $\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$.

Σ_{dom}	δ	R_b (a.l.) radiation	R_b (a.l.) stiff
0.1	0	29	4.31×10^4
0.1	10^2	91	9.29×10^4
0.1	10^6	912	4.31×10^5
1	0	51	6.31×10^4
1	10^2	163	1.36×10^5
1	10^6	1621	6.31×10^5
10	0	91	9.26×10^4
10	10^2	289	2.00×10^5
10	10^6	2883	9.26×10^5

Message physique (qualitatif). Ce combo offre une voie naturelle vers ton intuition “îlots survivants” :

- l’univers peut rester *globalement* quasi-FLRW,
- mais des domaines (surdensités) et des marées locales (Σ_{dom}) peuvent rendre le rebond *localement* plus large (moins violent),
- sans exiger une anisotropie homogène énorme à l’échelle globale.

Limites (honnêteté)

- Σ_{dom} et κ sont des **paramètres effectifs** : une modélisation plus réaliste relierait δ , la géométrie locale (Weyl), et la dynamique RGH (via Φ et/ou (ω, J)).
- Le choix $W_{\star} = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$ est un **calibrage** d’ordre de grandeur.

Note humour : c’est le rebond *en patchwork* : chacun rebondit à son rythme, mais personne ne rate le bus cosmique. ;

Application numérique : rebond **par domaines** + **Weyl conforme** + **cisaillement local**

(trio “îlots + marées + anisotropies” – modèle jouet)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On pousse le scénario “îlots survivants” d’un cran : un rebond *domainé* (inhomogène) est déclenché par un plafond sur l’invariant conforme de Weyl $W = C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$, et on explicite l’effet du cisaillement/aniso local. C’est un modèle jouet (ordre de grandeur) qui combine :

1. surdensité locale δ (domaines),
2. anisotropie/marées locales via un paramètre Σ_{dom} (cisaillement effectif),
3. un plafond W_\star (déclencheur géométrique).

1 Hypothèses

1. Densité locale dans un domaine (paramètre δ) :

$$\rho_{\text{dom}}(a) = (1 + \delta) \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

2. L’invariant conforme local est modélisé par (heuristique) :

$$W_{\text{dom}} \approx \kappa \Sigma_{\text{dom}}^2 H_{\text{dom}}^4, \quad H_{\text{dom}}^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{dom}}.$$

3. Le rebond local est déclenché lorsque $W_{\text{dom}} \rightarrow W_\star$.
4. Normalisation de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

Dans les tableaux : $W_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$ et $\kappa = 1$ (calibrage).

2 Densité critique équivalente

Le seuil $W_{\text{dom}} = W_\star$ correspond à :

$$\rho_\star(W, \Sigma_{\text{dom}}) \approx \sqrt{\frac{W_\star}{\kappa \Sigma_{\text{dom}}^2}} \frac{3}{8\pi G}.$$

Puis le rebond local (domainé) suit de $\rho_{\text{dom}}(a_b^{\text{dom}}) = \rho_\star$:

$$\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0} = \left(\frac{(1 + \delta)\rho_0}{\rho_\star(W, \Sigma_{\text{dom}})} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad R_b^{\text{dom}} = R_0 \frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0}.$$

3 Deux façons d’utiliser Σ_{dom}

A) Σ_{dom} indépendant de δ . On choisit des valeurs typiques (0.1, 1, 10) et on voit l’effet.

B) Σ_{dom} corrél     la surdensité. Pour avoir un jouet plus “physique”, on peut postuler une loi simple :

$$\Sigma_{\text{dom}} = \Sigma_0 (1 + \delta)^q.$$

Lecture : $q > 0$ signifie que plus un domaine est dense, plus il développe de marées/cisaillement (raisonnable en contraction). $q = 0 =$ cas non corrélé (retour au A).

4 Table A : Σ_{dom} indépendant (exemple)

Seuil : $W_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$; $\delta \in \{0, 10^2, 10^6\}$. On donne R_b en années-lumière (a.l.).

TABLE 1 – Rebond domain     Weyl conforme + cisaillement local : cas A (paramètres indépendants).

Σ_{dom}	δ	R_b (a.l.) radiation	R_b (a.l.) stiff
0.1	0	29	4.31×10^4
0.1	10^2	91	9.29×10^4
0.1	10^6	912	4.31×10^5
1	0	51	6.31×10^4
1	10^2	163	1.36×10^5
1	10^6	1621	6.31×10^5
10	0	91	9.26×10^4
10	10^2	289	2.00×10^5
10	10^6	2883	9.26×10^5

5 Table B : $\Sigma_{\text{dom}} = \Sigma_0(1 + \delta)^q$ (exemple)

On fixe $\Sigma_0 = 0.1$ et on compare $q = 0, 1/2, 1$. Même seuil $W_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4}$.

TABLE 2 – Cas B (corr  l    ). $\Sigma_0 = 0.1$, $\Sigma_{\text{dom}} = \Sigma_0(1 + \delta)^q$.

q	δ	Σ_{dom}	R_b (a.l.) rad	R_b (a.l.) stiff
0	0	0.1	29	4.31×10^4
0	10^2	0.1	91	9.29×10^4
0	10^6	0.1	912	4.31×10^5
1/2	0	0.1	29	4.31×10^4
1/2	10^2	1.0	163	1.36×10^5
1/2	10^6	100	9120	2.00×10^6
1	0	0.1	29	4.31×10^4
1	10^2	10.1	289	2.01×10^5
1	10^6	10^5	2.88×10^5	9.26×10^6

Message physique. Ce trio te donne une grande souplesse *sans* imposer une anisotropie homogène globale :

- δ rend le rebond plus large dans les domaines (  lots),
- Σ_{dom} règle l’intensité des marées qui déclenchent W ,
- une corrélation ($q > 0$) amplifie fortement l’effet dans les zones denses.

C’est donc un bon “terrain de jeu” pour tester l’idée d’objets survivants dans des régions particulières.

Limites (honnêteté)

- Σ_{dom} , κ et la loi $\Sigma(\delta)$ sont **effectifs**. Une dérivation RGH fixerait ces dépendances.
- En vraie inhomogénéité, H_{dom} et W_{dom} dépendent de gradients et de géométrie locale, pas seulement de ρ .
- Les énormes Σ_{dom} de la table B (si q grand et δ énorme) signalent juste que ce jouet pousse fort : c'est à interpréter comme “marées très intenses” et non comme un paramètre réaliste garanti.

Note humour : là, le bus cosmique fait des arrêts *et* il y a des dos d'âne gravitationnels. ;

Application numérique : rebond **par domaines** + seuil de Kretschmann K_\star (version “robuste” : courbure totale, avec surdensités locales)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On combine (i) l'idée d'un rebond *domainé* (inhomogène) via une surdensité locale δ et (ii) un déclencheur géométrique robuste : un plafond sur l'invariant de Kretschmann $K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Contrairement à l'invariant conforme de Weyl ($W = C^2$), K est non nul déjà en FLRW et “voit” la courbure totale ; en présence de domaines, il permet d'estimer comment les surdensités décalent l'échelle locale du rebond. C'est un *test d'ordre de grandeur* comparable aux autres `Application_numerique_rebond_*`.

1 Hypothèses (minimalistes)

1. Fond FLRW plat pour le *fond* (comparatif), mais domaines locaux avec surdensité δ :

$$\rho_{\text{dom}}(a) = (1 + \delta) \rho_0 a^{-3(1+w)}.$$

2. Déclencheur local : rebond quand $K_{\text{dom}} \rightarrow K_\star$.
3. Pour traduire K_\star en densité critique équivalente (calibrage), on utilise l'expression FLRW (fluide $p = w\rho$) :

$$K \approx \frac{64}{3} \pi^2 G^2 \rho^2 (9w^2 + 12w + 7) \quad \Rightarrow \quad \rho_\star(K) \approx \sqrt{\frac{3K_\star}{64\pi^2 G^2 (9w^2 + 12w + 7)}}.$$

4. Normalisation numérique de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

2 Échelle locale du rebond dans un domaine

La condition locale est $\rho_{\text{dom}}(a_b^{\text{dom}}) = \rho_\star(K)$, donc :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0} = \left(\frac{(1 + \delta)\rho_0}{\rho_\star(K)} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}}, \quad \boxed{R_b^{\text{dom}} = R_0 \frac{a_b^{\text{dom}}}{a_0}}.$$

Et le *facteur* dû à la surdensité seule (à K_\star fixé) est :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b^{\text{fond}}} = (1 + \delta)^{\frac{1}{3(1+w)}}}.$$

3 Table numérique

On utilise deux seuils (mêmes que précédemment) :

$$K_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4} \text{ (“stellaire”)}, \quad K_\star = 10^{19} \text{ m}^{-4} \text{ (“nucléaire”)},$$

et trois surdensités : $\delta \in \{0, 10^2, 10^6\}$. On donne R_b^{dom} en années-lumière (a.l.).

TABLE 1 – Rebond domainé déclenché par un plafond K_\star (Kretschmann). Valeurs en a.l. pour radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$).

K_\star	δ	R_b (a.l.) radiation	R_b (a.l.) stiff
10^{-5}	0	8.0×10^1	9.14×10^4
10^{-5}	10^2	2.54×10^2	1.97×10^5
10^{-5}	10^6	2.54×10^3	9.14×10^5
10^{19}	0	8.0×10^{-2}	9.14×10^2
10^{19}	10^2	2.54×10^{-1}	1.97×10^3
10^{19}	10^6	2.54	9.14×10^3

Lecture.

- **Domaines = rebond plus large localement.** Une surdensité δ augmente R_b d’un facteur $(1 + \delta)^{1/4}$ (radiation) ou $(1 + \delta)^{1/6}$ (stiff).
- **Pourquoi K est “robuste”.** Même sans anisotropie explicite, K est déjà non nul et fixe une échelle de courbure totale.
- **Lien avec ton intuition “îlots survivants”.** Les surdensités rebondissent à plus grande échelle (moins violent), ce qui aide la survie locale.

Limites (honnêteté)

- Ici on n’a pas ajouté explicitement le cisaillement Σ : c’est le rôle du document `Kretschmann_cisaillement`
- Une modélisation plus réaliste relierait δ , cisaillement, et contributions Weyl (marées) : c’est le *vrai* pont vers une physique d’îlots.

Note humour : en version domainée, K est le contrôleur technique : si la courbure dépasse, il coupe le courant. ;

Application numérique : rebond par domaines / inhomogénéités (scénario “îlots survivants” – déclencheurs Weyl & cisaillement, modèle jouet RGH)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

12 février 2026

Résumé

On explore l'idée suivante : le rebond ne se produit pas de façon parfaitement homogène, mais via des **domaines** où des corrections RGH deviennent dominantes à des instants légèrement différents. On remplace le critère jouet “seuil de densité” par deux déclencheurs plus naturels : (i) un seuil sur l'invariant de Weyl $W = C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}$, et (ii) un seuil sur un **cisaillement** sans dimension $s \equiv \Sigma/H$. Comme $W = 0$ et $\Sigma = 0$ en FLRW parfait, ces déclencheurs sélectionnent automatiquement les régions anisotropes (marées/cisaillement) sans perturber le fond global (CMB/BBN). On en déduit une prédiction statistique testable pour la fraction d'objets “trop mûrs” à grand redshift (JWST).

1 Idée en une phrase

Au lieu de supposer un rebond global parfaitement FLRW, on suppose :

chaque région (domaine) rebondit quand un critère local atteint un seuil, et ce critère est lié à l'inhomogénéité : Weyl (marées) et/ou cisaillement.

Donc les proto-amas / régions de fort cisaillement peuvent rebondir plus tôt (ou plus “doucement”), et la question devient : **est-ce qu'une structure liée peut traverser la phase sans être détruite par les marées/anisotropies ?**

2 Hypothèses minimales (modèle jouet)

1. Fond “moyen” (global) quasi-FLRW avec facteur d'échelle $a(t)$. Les piliers thermodynamiques (CMB, BBN) restent inchangés au premier ordre.
2. Domaines locaux \mathcal{D}_i caractérisés par un contraste de densité (sur une échelle de lissage R) :

$$\rho_{\text{dom}}(t) = (1 + \delta) \rho_{\text{fond}}(t).$$

3. Deux contenus dominants possibles (comme d'habitude) : radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$), avec $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.
4. Normalisation de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly.}$$

5. **Déclencheurs locaux (RGH-domaines)**. On remplace le seuil jouet en densité par deux critères équivalents (au choix, ou combinés) :

$$(\text{Weyl}) \quad W_{\text{dom}}(t_b^{\text{dom}}) = W_{\star}, \quad W \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta}C^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (1)$$

$$(\text{cisaillement}) \quad s_{\text{dom}}(t_b^{\text{dom}}) \equiv \frac{\Sigma}{H} \geq s_{\star}, \quad \Sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}. \quad (2)$$

6. **Lien qualitatif (RGH)**. Le seuil W_{\star} sera relié à une amplitude de commutateur hyper-complexe X_{\star} , elle-même reliée à un invariant interne (ω, J) (voir plus bas).

3 Rebond local : effet de la surdensité (rappel du modèle jouet densité)

Pour fixer les idées, on garde le résultat jouet (déclencheur densité) : si le fond rebondit à a_b lorsque $\rho_{\text{fond}}(a_b) = \rho_\star$, alors un domaine plus dense vérifie

$$(1 + \delta) \rho_{\text{fond}}(a_b^{\text{dom}}) = \rho_\star \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{fond}}(a_b^{\text{dom}}) = \frac{\rho_\star}{1 + \delta}.$$

Donc le domaine rebondit à une échelle plus grande :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b} = (1 + \delta)^{\frac{1}{3(1+w)}}}.$$

Interprétation : une région plus dense atteint le seuil *plus tôt en contraction*, donc à un a moins petit, ce qui tend à rendre le rebond *moins violent* localement.

Remarque. Les sections suivantes remplacent le déclencheur densité par Weyl/cisaillement, plus naturels car

$$W = 0, \Sigma = 0 \quad \text{en FLRW parfait.}$$

4 Numérique : exemple à $z \simeq 10$ et prédiction de fraction JWST

(A) Densité moyenne à $z \simeq 10$

On utilise

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0(1 + z)^3.$$

À $z = 10$:

$$\bar{\rho}(10) \simeq 4.6 \times 10^{-31} \times 11^3 \approx 6.1 \times 10^{-28} \text{ kg m}^{-3}.$$

(B) Déclencheur Weyl : lien effectif $W \leftrightarrow \delta$

En ordre de grandeur (régime quasi-newtonien), le champ de marée est lié au potentiel par

$$E_{ij} \sim \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \Phi, \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta.$$

On paramètre l'anisotropie (forme/cisaillement) par un facteur S (sans dimension), de sorte que

$$W \sim (4\pi G \bar{\rho})^2 \delta^2 S^2.$$

Le seuil $W = W_\star$ donne alors un seuil effectif en densité :

$$\boxed{\delta_\star(z) \simeq \frac{1}{S} \frac{\sqrt{W_\star}}{4\pi G \bar{\rho}(z)}}.$$

Lecture : à anisotropie fixée, δ_\star décroît quand $\bar{\rho}$ augmente (haut redshift), et à densité fixée, les régions plus anisotropes (grand S) franchissent plus facilement le seuil.

(C) Déclencheur cisaillement : Zel'dovich et $s(z) = \Sigma/H$

Approximation de Zel'dovich (effondrement ellipsoïdal). Une particule initiale \mathbf{q} évolue comme

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{q} - D(t) \nabla_{\mathbf{q}} \Phi(\mathbf{q}),$$

où $D(t)$ est le facteur de croissance. Dans la base des axes principaux du Hessien $\partial_i \partial_j \Phi$, de valeurs propres λ_i , les facteurs directionnels s'écrivent (modèle jouet) :

$$a_i(t) \propto a(t) (1 - D(t)\lambda_i).$$

Les taux d'expansion directionnels sont

$$H_i \equiv \frac{\dot{a}_i}{a_i} = H + \frac{d}{dt} \ln(1 - D\lambda_i), \quad \bar{H} \equiv \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3}.$$

Le cisaillement (scalaire) se mesure par

$$\Sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (H_i - \bar{H})^2, \quad s \equiv \frac{\Sigma}{\bar{H}}.$$

Interprétation : une proto-structure s'effondre plus vite sur un axe (pancake), moins vite sur un autre, donc H_i se séparent et s croît ; en FLRW parfait, $H_i = \bar{H}$ donc $\Sigma = 0$.

Lien pratique $S \leftrightarrow s$. Au niveau “ordre de grandeur”, on identifie :

$$S \sim s \equiv \frac{\Sigma}{\bar{H}}$$

ce qui remplace le facteur de forme S par un objet physique mesurable (anisotropie cinématique).

(D) Prédiction : fraction d'objets “trop mûrs”

On définit un critère jouet de “maturité” via un boost minimal \mathcal{A}_\star sur l'échelle de rebond :

$$\mathcal{A} \equiv \frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b} \geq \mathcal{A}_\star.$$

Avec le rappel densité (section précédente), cela donne

$$\delta \geq \delta_\star^{(\mathcal{A})} \equiv \mathcal{A}_\star^{3(1+w)} - 1.$$

On adopte alors le seuil effectif final

$$\delta_\star \equiv \max\left(\delta_\star^{(\mathcal{A})}, \delta_\star(W_\star, s)\right),$$

où $\delta_\star(W_\star, s)$ provient du déclencheur Weyl (et $S \sim s$).

Statistique gaussienne (modèle jouet). Si la distribution de δ lissée sur l'échelle R est gaussienne de variance $\sigma_R^2(z)$, alors

$$F_{\text{out}}(z) = f_{\text{dom}}(z) \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_\star}{\sqrt{2} \sigma_R(z)}\right).$$

Lecture : même un petit f_{dom} produit une queue rare d'objets mûrs, sans rendre l'univers globalement vieux.

5 Condition grossière de “survie des structures” (marées)

Pour qu’un objet lié (taille L) survive, une condition d’ordre de grandeur est :

l’accélération de marée à travers l’objet ne doit pas dépasser son accélération interne de liaison.

En notation simple :

$$a_{\text{marée}} \sim \mathcal{E} L \lesssim a_{\text{liaison}}.$$

Dans le scénario Weyl/cisaillement, \mathcal{E} est directement liée à E_{ij} (marées) et donc à W . Si le domaine rebondit plus tôt (à a_b^{dom} plus grand) et/ou s’active dès que $s = \Sigma/H$ dépasse s_* , l’objet est moins exposé à une phase d’extrême courbure.

Corrélation environnementale (prédiction). Si l’activation est gouvernée par W ou s , alors les objets “trop mûrs” doivent être statistiquement corrélés à des environnements de fort cisaillement (proto-amas) : clustering renforcé, voisinage dense, et éventuellement alignements avec le champ de marée.

Moralité (qualitative).

- Un rebond **domainé** favorise des “îlots” : les régions anisotropes (fort W ou fort s) s’activent plus tôt.
- Cela peut rendre compatible : univers global quasi-FLRW *et* rebond local “plus doux” pour certaines structures.
- Dans RGH, le seuil peut être relié à un opérateur interne (commutateur hypercomplexe) plutôt qu’à un seuil ad hoc.

À faire ensuite (si tu veux pousser)

1. Fixer une échelle de lissage R (ou une masse M) pertinente pour JWST, et estimer $\sigma_R(z)$ via CLASS/CDM (ou via une croissance modifiée si RGH la change).
2. Calibrer (\mathcal{A}_*, s_*) pour obtenir la fraction d’outliers observée.
3. Remplacer le mapping jouet $S \sim s$ par une relation issue d’un modèle ellipsoïdal plus précis (avec λ_i).

Addendum : lien $W_* \leftrightarrow X_* \leftrightarrow (\omega, J)$ (ansatz minimal RGH)

On adopte un couplage minimal (testable) :

$$\boxed{W_* = \kappa_X X_*^2}$$

où X mesure l’amplitude du commutateur hypercomplexe effectif. On relie ensuite X à un invariant interne (ω, J) via

$$\boxed{\mathcal{I}_{\text{int}} \equiv \omega^2 + J^2, \quad X = \alpha \mathcal{I}_{\text{int}}^p} \quad (\alpha > 0, p > 0).$$

Ainsi :

$$W_* = \kappa_X \alpha^2 (\omega^2 + J^2)^{2p}.$$

Lecture : l’activation “Weyl” peut être vue comme l’activation d’une saturation interne qui pilote X et donc le seuil effectif.

Note humour : en version domainée, l’univers fait du rebond *en mosaïque* – pas besoin de synchroniser tout le monde. ;))

Application numérique : rebond par domaines / inhomogénéités (scénario “îlots survivants” – modèle jouet RGH)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On explore l'idée suivante (intuitive, mais testable) : le rebond ne se produit pas de façon parfaitement homogène, mais via des **domaines** où des corrections RGH (Weyl/symplectique) deviennent dominantes à des instants légèrement différents. Cela permet d'imaginer des **îlots** (structures liées) qui restent cohérents à travers la phase de rebond, même si le fond cosmologique passe par une contraction/expansion. Le présent document est un *modèle jouet* (ordre de grandeur), conçu pour être comparable aux autres `Application_numerique_rebond_*`.

1 Idée en une phrase

Au lieu de supposer un rebond global parfaitement FLRW, on suppose :

chaque région (domaine) rebondit quand un critère local atteint un seuil (densité, invariant de courbure, invariant Weyl, etc.).

Donc des régions plus denses / plus marées peuvent rebondir plus tôt (ou plus tard), et la question devient : **est-ce qu'une structure liée peut traverser la phase sans être détruite par les marées/anisotropies ?**

2 Hypothèses minimales (modèle jouet)

1. On considère un fond “moyen” (global) avec facteur d'échelle $a(t)$, et des domaines locaux avec surdensité δ :

$$\rho_{\text{dom}}(t) = (1 + \delta) \rho_{\text{fond}}(t).$$

2. Le rebond est déclenché par un critère **local** de type densité (ou densité effective), pour fixer les idées :

$$\rho_{\text{dom}}(t_b^{\text{dom}}) = \rho_{\star}.$$

3. On compare deux contenus dominants (comme d'habitude) : radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$), avec $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.
4. Normalisation de comparaison :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

3 Rebond local : effet de la surdensité

Si le fond rebondit à a_b lorsque $\rho_{\text{fond}}(a_b) = \rho_{\star}$, alors un domaine plus dense vérifie

$$(1 + \delta) \rho_{\text{fond}}(a_b^{\text{dom}}) = \rho_{\star} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{fond}}(a_b^{\text{dom}}) = \frac{\rho_{\star}}{1 + \delta}.$$

Donc le domaine rebondit à une échelle plus grande :

$$\boxed{\frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b} = (1 + \delta)^{\frac{1}{3(1+w)}}}.$$

Interprétation : une région plus dense atteint le seuil *plus tôt en contraction*, donc à un a moins petit, ce qui tend à rendre le rebond *moins violent* localement.

4 Numérique : combien ça décale R_b ?

On reprend deux seuils typiques (ceux qu'on a déjà utilisés) :

$$\rho_\star = 10^6 \text{ kg m}^{-3} \text{ (“stellaire”)}, \quad \rho_\star = 10^{18} \text{ kg m}^{-3} \text{ (“nucléaire”).}$$

On définit $R_b^{\text{fond}} = R_0(a_b/a_0)$, et $R_b^{\text{dom}} = R_b^{\text{fond}}(a_b^{\text{dom}}/a_b)$.

Facteur multiplicatif dû à δ .

$$\text{radiation } (w = \tfrac{1}{3}) : (1 + \delta)^{1/4}, \quad \text{stiff } (w = 1) : (1 + \delta)^{1/6}.$$

Donc à *surdensité égale*, le décalage est plus fort en radiation qu'en stiff.

TABLE 1 – Facteur a_b^{dom}/a_b (donc $R_b^{\text{dom}}/R_b^{\text{fond}}$) induit par la surdensité δ .

δ	$(1 + \delta)^{1/4}$ (radiation)	$(1 + \delta)^{1/6}$ (stiff)
10^2	3.16	2.15
10^6	31.6	10.0
10^{12}	1000	100

Lecture. Si le rebond du fond donne par exemple $R_b^{\text{fond}} \sim 80$ a.l. (cas stellaire radiation de nos docs), alors une région de surdensité $\delta = 10^6$ rebondirait à $R_b^{\text{dom}} \sim 2.5 \times 10^3$ a.l. (radiation) ou $\sim 8 \times 10^2$ a.l. (stiff). **C'est une voie simple** pour obtenir des rebonds “plus larges” localement *sans* rendre tout l'univers globalement anisotrope.

5 Condition grossière de “survie des structures” (marées)

Pour qu'un objet lié (taille L) survive, une condition d'ordre de grandeur est :

l'accélération de marée à travers l'objet ne doit pas dépasser son accélération interne de liaison.

En notation simple :

$$a_{\text{marée}} \sim \mathcal{E} L \lesssim a_{\text{liaison}},$$

où \mathcal{E} est une échelle de courbure (“marées”). Dans un déclencheur basé sur Weyl/Kretschmann, \mathcal{E} peut devenir grande ; mais si le domaine rebondit plus tôt (à a_b^{dom} plus grand), l'objet est moins exposé à une phase d'extrême courbure.

Moralité (qualitative).

- Un rebond **domainé** favorise des “îlots” : les surdensités rebondissent plus tôt.
- Cela peut rendre compatible : univers global quasi-FLRW *et* rebond “doucement” traversable pour certaines structures, sans exiger une anisotropie homogène gigantesque.
- Dans RGH, on peut associer le déclencheur local à : (i) un seuil Weyl (Φ), (ii) un seuil de courbure (K ou $W = C^2$), (iii) une saturation interne (ω, J), ou (iv) un invariant mixte \mathcal{I} .

À faire ensuite (si tu veux pousser)

1. Remplacer le critère “densité” par un critère **Weyl conforme** $W = C^2$: c’est naturel pour des domaines/structures.
2. Ajouter un paramètre de cisaillement local Σ_{dom} et relier $\delta \leftrightarrow \Sigma$ (même heuristique).
3. Donner un exemple “galaxie” (taille L , densité moyenne, vitesse de dispersion) pour expliciter a_{liaison} et l’effet des marées.

Note humour : en version domainée, l’univers fait du rebond *en mosaïque* – pas besoin de synchroniser tout le monde. ;)

Application numérique : rebond **par domaines** + **CEN/NEC effective contrôlée**

(mosaïque de rebonds par violation effective locale)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On combine l'idée de rebond *domainé* (inhomogène) avec une phase de **violation effective contrôlée** de la Condition d'Énergie Nulle (CEN, NEC en anglais), c'est-à-dire une période où $(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}}) < 0$. Dans ce modèle jouet, chaque domaine possède un paramètre local qui règle l'intensité de la composante "régularisante" (associée en RGH au secteur interne, par ex. (ω, J)) et déclenche le rebond localement. On obtient des expressions fermées pour a_b^{dom} et R_b^{dom} , puis un tableau d'ordres de grandeur.

1 Rappel : CEN/NEC (forme fluide)

Pour un fluide parfait isotrope, la CEN (NEC) s'écrit :

$$\rho + p \geq 0.$$

Une **violation effective contrôlée** signifie qu'une description effective (due à corrections géométriques / secteur interne) peut rendre temporairement

$$(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}}) < 0,$$

ce qui permet un rebond (H peut remonter à travers zéro) si la théorie reste stable.

2 Hypothèses (modèle jouet domainé)

1. On découpe l'univers en domaines indexés par i .
2. Chaque domaine a une composante "positive" de type radiation (fond) :

$$\rho_{r,i}(a) = (1 + \delta_i) \rho_{r,0} a^{-4}, \quad p_{r,i} = \rho_{r,i}/3,$$

où δ_i est une surdensité locale (domaines).

3. Chaque domaine a une composante effective **négative** (régularisante) de type stiff :

$$\rho_{s,i}(a) = -\rho_{s,0} r_i a^{-6}, \quad p_{s,i} = \rho_{s,i},$$

où $r_i > 0$ encode l'intensité locale de la correction (RGH interne).

4. Normalisation de comparaison : $\rho_{r,0} \equiv \rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$ et $R_0 = 96 \text{ Gly}$.

Remarque (sens physique de r_i). Dans une théorie fondamentale, r_i serait calculé à partir d'un invariant interne (fonction de (ω, J) , gradients, etc.). Ici c'est un paramètre effectif : il permet de représenter une mosaïque de rebonds plus/moins "forts" selon les régions.

3 Condition de rebond locale

Dans ce modèle, la densité effective du domaine est :

$$\rho_{\text{eff},i}(a) = \rho_{r,i}(a) + \rho_{s,i}(a) = (1 + \delta_i)\rho_0 a^{-4} - \rho_{s,0} r_i a^{-6}.$$

Le rebond local se produit quand $H_i^2 \propto \rho_{\text{eff},i}$ s'annule :

$$(1 + \delta_i)\rho_0 a_b^{-4} - \rho_{s,0} r_i a_b^{-6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a_{b,i}}{a_0} = \sqrt{\frac{\rho_{s,0}}{\rho_0} \frac{r_i}{1 + \delta_i}}}.$$

On définit le ratio global (analogue au doc CEN précédent) :

$$r_0 \equiv \frac{\rho_{s,0}}{\rho_0}.$$

Alors

$$\boxed{\frac{a_{b,i}}{a_0} = \sqrt{\frac{r_0 r_i}{1 + \delta_i}}}, \quad \boxed{R_{b,i} = R_0 \sqrt{\frac{r_0 r_i}{1 + \delta_i}}}.$$

4 CEN/NEC violée au rebond (dans chaque domaine)

On a :

$$(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}})_i = (\rho_{r,i} + p_{r,i}) + (\rho_{s,i} + p_{s,i}) = \frac{4}{3}\rho_{r,i} + 2\rho_{s,i}.$$

Au rebond local, $\rho_{s,i} = -\rho_{r,i}$, donc :

$$(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}})_i|_b = \left(\frac{4}{3} - 2\right)\rho_{r,i} = -\frac{2}{3}\rho_{r,i} < 0.$$

Donc la CEN est violée *effectivement* et localement au rebond dans ce modèle.

5 Numérique (ordres de grandeur)

On fixe une valeur de référence **globale** r_0 (amplitude moyenne aujourd'hui), et on explore des variations locales r_i et δ_i . On donne $R_{b,i}$ en années-lumière (a.l.).

Choix de référence

Comme précédemment, viser $R_b \sim 100$ a.l. avec $R_0 = 96$ Gly correspond typiquement à $r_0 \sim 10^{-18}$. On adopte donc :

$$r_0 = 10^{-18}.$$

Lecture.

- À r_0 fixé, **augmenter** r_i (régularisation plus forte localement) *augmente* $R_{b,i}$: rebond plus large / moins violent.
- **Augmenter** δ_i (domaine plus dense) *réduit* $R_{b,i}$ dans ce modèle précis, car la composante positive grandit comme $(1 + \delta_i)$ alors que la correction négative n'a pas été prise proportionnelle à $(1 + \delta_i)$.
- Interprétation RGH possible : si la correction interne est *activée par la densité/marées*, alors r_i pourrait croître avec δ_i , et l'effet pourrait s'inverser (rebond plus large dans les surdensités).

TABLE 1 – Rebond domainé + CEN contrôlée : $R_{b,i} = R_0 \sqrt{\frac{r_0 r_i}{1+\delta_i}}$ avec $r_0 = 10^{-18}$ et $R_0 = 96$ Gly. On explore $r_i \in \{0.1, 1, 10\}$ et $\delta_i \in \{0, 10^2, 10^6\}$.

r_i	δ_i	$a_{b,i}/a_0$	$R_{b,i}$ (a.l.)
0.1	0	3.16×10^{-10}	30.4
1	0	1.00×10^{-9}	96.0
10	0	3.16×10^{-9}	303
0.1	10^2	3.14×10^{-11}	3.02
1	10^2	9.95×10^{-11}	9.55
10	10^2	3.14×10^{-10}	30.2
0.1	10^6	3.16×10^{-13}	3.04×10^{-2}
1	10^6	1.00×10^{-12}	9.60×10^{-2}
10	10^6	3.16×10^{-12}	0.303

Option “plus RGH” (sans refaire les calculs)

Pour coller à l’intuition “îlots survivants”, on peut postuler un couplage local :

$$r_i = (1 + \delta_i)^q \quad (q > 0),$$

ce qui compense la dépendance en $(1 + \delta_i)$ et peut rendre les surdensités *plus protégées*. C’est la prochaine variante naturelle si tu veux.

Note humour : ici, chaque quartier a sa propre pédale de frein cosmique. ;

Application numérique du rebond X (commutateur hypercomplexe)

Variante : équation d'état intermédiaire $w = 0.65$

Contrainte de conservation d'une galaxie de type Voie Lactée

Lolo & HAL9000

[2026-02-06]

Résumé

On résume l'application numérique d'un scénario de rebond déclenché par un invariant X construit à partir d'un commutateur de dérivées covariantes incluant une connexion interne (hypercomplexe). On dérive la dépendance de l'échelle au rebond R_b en fonction du seuil X_\star et d'un paramètre χ_X via l'ansatz $X \simeq \chi_X H^4$. On impose ensuite la contrainte phénoménologique minimale : préserver une galaxie de type Voie Lactée, ce qui se traduit par $R_b \gtrsim 10^5$ a.l.. Un réglage simple dans un régime *stiff* ($w = 1$) suffit et fournit des valeurs explicites pour χ_X ou X_\star .

1 Hypothèses, modèle, et invariant de commutateur

1.1 Dérivée covariante totale et commutateur

On considère une dérivée covariante agissant sur un champ test $V^{\rho a}$ portant un indice spacetime ρ et un indice interne a (représentation de dimension finie). Une forme pratique est

$$(\nabla_\mu V)^{\rho a} = \partial_\mu V^{\rho a} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} V^{\sigma a} + w \Phi_\mu V^{\rho a} + (A_\mu)^a_b V^{\rho b}, \quad (1)$$

où $\Gamma^\rho_{\mu\sigma}$ est la connexion (Levi-Civita si l'on veut), Φ_μ est un champ scalaire de type Weyl (ou un terme de poids conforme), et A_μ une connexion interne (hypercomplexe).

Le commutateur se décompose classiquement en

$$([\nabla_\mu, \nabla_\nu] V)^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma + w F_{\mu\nu}^{(W)} V^\rho + (F_{\mu\nu}^{(\text{int})}) V^\rho, \quad (2)$$

avec les courbures correspondantes. Dans l'option "rebond X ", on retient un scalaire positif (construit uniquement sur le secteur interne) :

$$X \equiv X_{\text{int}} = \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(\text{int})} F^{(\text{int})\mu\nu} \right) \geq 0. \quad (3)$$

1.2 Déclenchement du rebond

On postule l'existence d'un seuil $X_\star > 0$ tel que

$$\boxed{X(a) \rightarrow X_\star \implies \text{rebond}} \quad (4)$$

au sens où la dynamique effective s'organise de manière à éviter une singularité (par exemple via un changement de branche, un terme répulsif effectif, ou une transition contrôlée par la structure interne).

2 Application numérique : ansatz $X \simeq \chi_X H^4$

2.1 Ansatz dimensionnel

Pour obtenir un ordre de grandeur chiffrable, on adopte l'ansatz

$$\boxed{X \simeq \chi_X H^4} \quad (5)$$

où χ_X est un paramètre (sans dimension dans ce gabarit) encapsulant les détails microphysiques du secteur interne.

2.2 Lien avec la densité d'énergie

Dans un fond FLRW dominé par un fluide parfait $p = w\rho$, on utilise $H^2 \propto \rho$ (au niveau d'ordre de grandeur du gabarit), d'où

$$X \sim \chi_X H^4 \propto \chi_X \rho^2. \quad (6)$$

Au seuil $X = X_\star$, on obtient une densité critique

$$\rho_\star \propto \sqrt{\frac{X_\star}{\chi_X}}. \quad (7)$$

2.3 Échelle de rebond R_b

Avec l'évolution standard d'un fluide constant w ,

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (8)$$

on déduit

$$a_\star \propto \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star}\right)^{1/[3(1+w)]} \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star}\right)^{1/[6(1+w)]}. \quad (9)$$

En définissant R_b comme un rayon physique caractéristique au rebond (par exemple proportionnel à a_\star fois une échelle comobile fixée), on obtient la loi d'échelle fondamentale de l'application numérique :

$$\boxed{R_b \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star}\right)^{\frac{1}{6(1+w)}}} \quad (10)$$

3 Conservation d'une galaxie de type Voie Lactée (MW)

3.1 Critère phénoménologique minimal

On impose que l'échelle au rebond ne soit pas inférieure à l'ordre de grandeur d'une grande galaxie spirale. On prend comme repère conservateur

$$\boxed{R_b \gtrsim R_{\text{MW}} \sim 10^5 \text{ a.l.}}. \quad (11)$$

3.2 Choix du régime proche du rebond

Dans l'application numérique initiale, on obtient (pour $\chi_X = 1$ et $X_\star = 10^{-5}$) :

$$w = \frac{1}{3} \text{ (radiation)} : \quad R_b \sim 80 \text{ a.l.} \quad (\text{trop petit pour MW}), \quad (12)$$

$$w = 1 \text{ (stiff)} : \quad R_b \sim 9.1 \times 10^4 \text{ a.l.} \quad (\text{quasi MW}). \quad (13)$$

Seuil X_\star	R_b (a.l.) $w = 0.33333$ (rad)	R_b (a.l.) $w = 0.65$	R_b (a.l.) $w = 1$ (stiff)
10^{-5}	~ 80	$\sim 1.12 \times 10^5$	$\sim 9.1 \times 10^4$
10^{19}	$\sim 8.0 \times 10^{-2}$	$\sim 4.2 \times 10^2$	$\sim 9.1 \times 10^2$

TABLE 1 – Tableau comparatif (même point de référence $\chi_X = 1$) pour trois équations d'état : radiation ($w \simeq 1/3$), intermédiaire ($w = 0.65$) et stiff ($w = 1$).

Variante : $w = 0.65$ (intermédiaire rad \rightarrow stiff). On garde le même point numérique de référence $(\chi_X, X_\star) = (1, 10^{-5})$, soit

$$\frac{\chi_X}{X_\star} = 10^5.$$

En ancrant la normalisation sur le cas stiff ($w_0 = 1$) du point de référence $R_{b0} \simeq 9.1 \times 10^4$ a.l., et en utilisant la loi d'échelle (10) (avec même constante de proportionnalité), on obtient pour $w = 0.65$:

$$R_b(w) = R_{b0} \left(\frac{\chi_X}{X_\star} \right)^{\frac{1}{6(1+w)} - \frac{1}{6(1+w_0)}} \Rightarrow \boxed{R_b(w=0.65) \simeq 1.12 \times 10^5 \text{ a.l.}}.$$

Conclusion pratique : ce w intermédiaire est *déjà* compatible avec le critère MW (11) (sans réglage supplémentaire). Pour obtenir exactement $R_b = 10^5$ a.l. en gardant $w = 0.65$, il suffirait de réduire le ratio χ_X/X_\star d'un facteur

$$f = \left(\frac{10^5}{R_b(w=0.65)} \right)^{6(1+w)} \approx 0.339.$$

Par exemple (au choix) :

Option A : $X_\star = 10^{-5} \Rightarrow \chi_X \simeq 0.339$ ou Option B : $\chi_X = 1 \Rightarrow X_\star \simeq 0.339^{-1} \times 10^{-5}$.

Ainsi, la conservation MW privilégie un régime *stiff* proche du rebond :

$$\boxed{w = 1 \quad \Rightarrow \quad R_b \propto \left(\frac{\chi_X}{X_\star} \right)^{1/12}}. \quad (14)$$

3.3 Réglage minimal pour atteindre $R_b \simeq 10^5$ a.l.

On part du point de référence

$$(\chi_{X0}, X_{\star0}, w) = (1, 10^{-5}, 1), \quad R_{b0} \simeq 9.1 \times 10^4 \text{ a.l.} \quad (15)$$

En stiff ($w = 1$), la relation (10) donne

$$\frac{R_b}{R_{b0}} = \left(\frac{(\chi_X/X_\star)}{(\chi_{X0}/X_{\star0})} \right)^{1/12}. \quad (16)$$

Pour $R_b = 10^5$ a.l., le facteur requis sur le ratio χ_X/X_\star est

$$f \equiv \frac{\chi_X/X_\star}{\chi_{X0}/X_{\star0}} = \left(\frac{10^5}{9.1 \times 10^4} \right)^{12} \approx 3.1. \quad (17)$$

On en déduit deux paramétrisations équivalentes et “douces” :

Option A (garder $X_\star = 10^{-5}$).

$$\boxed{X_\star = 10^{-5}, w = 1 \Rightarrow \chi_X \simeq 3.1}. \quad (18)$$

Option B (garder $\chi_X = 1$).

$$\boxed{\chi_X = 1, w = 1 \Rightarrow X_\star \simeq 3.2 \times 10^{-6}}. \quad (19)$$

3.4 Remarque de cohérence notationnelle

Attention à ne pas confondre le paramètre χ_X (ansatz $X \simeq \chi_X H^4$) avec un éventuel $\chi(t)$ apparaissant ailleurs (par ex. dans un mélange Ω_{mix}). Il est recommandé de réserver χ_X (ou κ_X) exclusivement au secteur X .

4 Résumé (à copier-coller)

- Modèle : rebond lorsque $X \rightarrow X_*$, avec $X = \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{(\text{int})} F^{(\text{int})\mu\nu})$.
- Gabarit numérique : $X \simeq \chi_X H^4 \Rightarrow R_b \propto (\chi_X/X_*)^{1/[6(1+w)]}$.
- Critère MW : $R_b \gtrsim 10^5$ a.l..
- Conclusion : $w = 0.65$ est déjà MW-compatible (à $(\chi_X, X_*) = (1, 10^{-5})$) et $w = 1$ reste la branche la plus “naturelle” proche du rebond.
- Réglage minimal : multiplier χ_X/X_* par ~ 3.1 (ex. : $\chi_X \simeq 3.1$ à $X_* = 10^{-5}$).

Note d'humeur : quand les opérateurs internes arrêtent de commuter, l'Univers fait une pirouette et évite la singularité. La singularité, elle, n'a pas signé le formulaire.

Application numérique hypothétique : rebond Weyl (RGH)

Comparaison $w = \frac{1}{3}$ (radiation) vs $w = 1$ (stiff)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

Variante du document “rebond stellaire” : on compare, à densité critique fixée ρ_* , les échelles associées au rebond pour deux choix d’équation d’état : radiation ($w = \frac{1}{3}$) et “stiff” ($w = 1$). Le rebond est interprété comme déclenché par un seuil Weyl (champ d’échelle Φ_μ) et régularisé par un secteur interne symplectique (ω, J) , mais l’application numérique repose uniquement sur les lois d’échelle en a .

1 Hypothèses (rappel court)

— Fond FLRW plat ; rebond effectif de type

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*}\right),$$

issu d’une lecture “seuil Weyl” (Option II) : $\Phi_0^2/\Phi_*^2 = \rho/\rho_*$.

— Conservation standard : $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$.

— Échelle actuelle de référence : $R_0 = 96$ Gly (facteur multiplicatif ; pas un “ballon”).

2 Formules générales

Le rebond est défini par $\rho(a_b) = \rho_*$, donc

$$\boxed{\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)^{\frac{1}{3(1+w)}}}, \quad \boxed{R_b = R_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_*}\right)^{\frac{1}{3(1+w)}}}. \quad (1)$$

Exposants.

$$w = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3(1+w)} = \frac{1}{4}, \quad w = 1 \Rightarrow \frac{1}{3(1+w)} = \frac{1}{6}.$$

Donc, à ρ_* **fixé**, le cas $w = 1$ donne un rebond à une *échelle plus grande* (car l’exposant $1/6$ est plus petit que $1/4$: la densité croît plus vite en contraction pour $w = 1$).

3 Choix numérique de référence

Pour comparer *côte à côte*, on prend la même densité de normalisation aujourd’hui pour les deux cas :

$$\rho_0 \equiv \rho_{\text{ref},0} \simeq 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$$

(valeur indicative du contenu radiatif actuel : photons + neutrinos). **Attention** : si un fluide $w = 1$ n’est pas présent aujourd’hui à ce niveau, il faut remplacer $\rho_{\text{ref},0}$ par sa densité actuelle réelle $\rho_{w=1,0}$.

TABLE 1 – Comparaison des échelles au rebond pour $w = \frac{1}{3}$ (radiation) et $w = 1$ (stiff), à densité critique ρ_\star fixée. Référence : $R_0 = 96$ Gly, $\rho_0 = \rho_{\text{ref},0} \simeq 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$.

Scénario	$\rho_\star \text{ (kg m}^{-3}\text{)}$	$R_b \text{ (m) } w = \frac{1}{3}$	$R_b \text{ (a.l.) } w = \frac{1}{3}$	$R_b \text{ (a.l.) } w = 1$
Stellaire	10^6	7.48×10^{17}	$\approx 7.9 \times 10^1$	$\approx 8.4 \times 10^4$
Nucléaire	10^{18}	7.48×10^{14}	$\approx 7.9 \times 10^{-2}$	$\approx 8.4 \times 10^2$
Très élevé	10^{30}	7.48×10^{11}	$\approx 7.9 \times 10^{-5}$	≈ 8.4
Planck	5.15×10^{96}	1.57×10^{-5}	$\approx 1.7 \times 10^{-21}$	$\approx 6.4 \times 10^{-11}$

4 Résultats : $w = \frac{1}{3}$ vs $w = 1$

Lecture rapide. À densité critique identique ρ_\star , passer de $w = \frac{1}{3}$ à $w = 1$ augmente fortement l'échelle associée au rebond (car le facteur $(\rho_0/\rho_\star)^{1/6}$ est beaucoup moins petit que $(\rho_0/\rho_\star)^{1/4}$). Ceci peut rendre plus crédible l'idée d'un rebond “doux” à grande échelle *si* un secteur effectif $w \simeq 1$ est présent avant le rebond.

5 Notes physiques (bref)

- Le cas $w = 1$ (“stiff”) correspond à une énergie cinétique dominante (ex. champ scalaire sans potentiel) et est souvent invoqué dans des scénarios de contraction.
- La présence d'un secteur $w = 1$ modifie aussi la durée de la phase contractante et la dynamique des anisotropies ; un contrôle du cisaillement reste crucial.
- Dans notre lecture RGH, le déclencheur fondamental reste Weyl (Φ), tandis que (ω, J) sert de régularisation/stabilisation : le choix de w décrit le *contenu effectif* dominant au voisinage du rebond.

Application numérique : rebond Weyl *non intégrable*

Modèle Weyl–Maxwell + saturation Born–Infeld (régularisée par (ω, J))

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On explore un scénario hypothétique où le rebond cosmologique est déclenché non pas par une densité moyenne, mais par un *seuil sur l’invariant* d’un champ de Weyl *non intégrable* : $F = d\Phi \neq 0$. Le champ se comporte comme un champ “Maxwell” (de jauge d’échelle) mais sa croissance est *saturée* par un terme de type Born–Infeld, supposé régularisé/stabilisé par la structure interne symplectique (ω, J) (principe : bornes finies, pas d’explosion, pas de pathologies). On donne un calibrage numérique simple en unités SI pour relier un seuil d’énergie au champ critique.

1 Hypothèses (assumées)

1. Fond FLRW plat (au moins pour le *fond*).
2. Weyl **non intégrable** : Φ_μ n’est pas un simple gradient global, et $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu \neq 0$.
3. Le secteur Weyl est de type “Maxwell” (propagation de $F_{\mu\nu}$) mais **saturé** : l’amplitude effective de $F^2 \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ne peut pas diverger (Born–Infeld).
4. La structure (ω, J) sert de **régularisation/stabilisation** : elle impose une borne finie (échelle BI) et prévient les instabilités.

2 Idée du déclencheur

Déclencheur géométrique. Le rebond est supposé se produire lorsque l’invariant F^2 atteint une valeur critique fixée par l’échelle Born–Infeld (BI), ce qui revient à imposer un plafond d’énergie dans ce secteur. Dans l’approximation “Maxwell” (hors saturation), l’énergie du champ se comporte comme un contenu relativiste.

Effet cosmologique qualitatif. Le champ Weyl–Maxwell se comporte en première approximation comme un contenu de type radiation ($w \simeq 1/3$), mais la saturation BI fournit une *barrière* qui empêche la montée infinie et peut forcer un rebond (quand la dynamique du fond tente de pousser au-delà de la borne).

3 Calibrage SI : densité critique $\rho_\star \leftrightarrow$ champ critique

On ne prétend pas ici dériver les unités exactes de Φ_μ dans la RGH : on fait un *calibrage d’ordre de grandeur* en identifiant l’énergie du secteur Weyl à une énergie de type Maxwell.

3.1 Énergie de champ et densité massique équivalente

En unités SI, pour un champ “électromagnétique” standard, la densité d’énergie est

$$u \simeq \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2, \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1.$$

On définit une densité *massique* équivalente $\rho \equiv u/c^2$. Si l’on prend une configuration “magnétique dominante” (même ordre de grandeur), on obtient la correspondance pratique :

$$\boxed{B_\star \simeq \sqrt{2\mu_0 c^2 \rho_\star}}, \quad \boxed{E_\star \simeq c B_\star}.$$

Ici, ρ_\star joue le rôle d’une *densité critique effective* associée à la saturation BI.

4 Échelles au rebond (comparatif d’échelle)

Pour comparer aux documents précédents, on illustre le cas où le contenu dominant près du rebond a une loi d’échelle type radiation (ce qui est cohérent avec un champ Maxwellien non saturé). On prend comme normalisation de référence :

$$\rho_0 \equiv 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

Alors, si $\rho(a_b) = \rho_\star$ (au moment où la saturation impose le rebond),

$$\frac{a_b}{a_0} \sim \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star} \right)^{1/4}, \quad R_b \sim R_0 \frac{a_b}{a_0}.$$

Note critique : si la densité actuelle réelle du secteur Weyl est différente de ρ_0 , remplacer ρ_0 par $\rho_{\text{Weyl},0}$.

5 Résultats numériques (exemples)

TABLE 1 – Exemples : si l’on fixe une densité critique ρ_\star (interprétée comme borne BI du secteur Weyl), on obtient un champ critique B_\star (et E_\star) et une échelle R_b (hypothèse radiation pour l’échelle en a). Les valeurs de champs sont des calibrages SI (ordre de grandeur).

Scénario	ρ_\star (kg m ⁻³)	B_\star (T)	E_\star (V/m)	R_b (a.l.)
Stellaire	10^6	4.75×10^8	1.42×10^{17}	7.9×10^1
Nucléaire	10^{18}	4.75×10^{14}	1.42×10^{23}	7.9×10^{-2}
Planck	5.15×10^{96}	1.08×10^{54}	3.24×10^{62}	1.7×10^{-21}

Remarques (honnêteté scientifique)

- Le but est **comparatif** : montrer comment un seuil sur F^2 (saturé BI) peut être traduit en une densité critique effective et donc en une échelle R_b .
- Les champs E_\star, B_\star sont des **ordres de grandeur** obtenus par analogie Maxwell. Dans la RGH, les unités exactes peuvent différer suivant la définition de Φ_μ et son couplage.
- La nouveauté par rapport au cas Weyl intégrable ($F = 0$) est que ce déclencheur “voit” une *dynamique de jauge* et pas seulement un taux d’échelle.
- La régularisation par (ω, J) est ici encapsulée dans l’existence de la borne BI (pas d’explosion de F^2).

Application numérique : rebond par NEC effective contrôlée (modèle jouet : composante “négative stiff” régularisée)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On construit une application numérique minimale d’un rebond obtenu par *violation NEC effective contrôlée* ($\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}} < 0$ dans une fenêtre autour du rebond), sans imposer directement un seuil de courbure. Le but est comparatif : produire des échelles a_b/a_0 et R_b très simplement, et identifier où la NEC est violée. Ce document sert de “gabarit” avant une implémentation RGH plus spécifique.

1 Idée (humaine)

Le rebond demande $H = 0$ au minimum puis une reprise en expansion. Dans un cadre FLRW standard, l’accélération \dot{H} est reliée à $\rho + p$: si $\rho + p$ devient négatif, on peut rendre $\dot{H} > 0$ et déclencher un rebond. Ici, on modélise cela par une *composante effective* qui devient importante en contraction et qui contribue *négativement* à l’énergie.

2 Hypothèses (modèle jouet)

On prend deux contributions :

- une composante “positive” de type radiation : $\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}$, $p_r = \rho_r/3$,
- une composante “effective négative” de type stiff : $\rho_s(a) = -\rho_{s,0} a^{-6}$, $p_s = \rho_s$.

Le signe “−” n’est pas de la matière exotique ordinaire : c’est un *effet* (régularisation / correction) censé être contrôlé par le secteur interne RGH (par ex. (ω, J)) afin d’éviter instabilités et divergences.

On définit le ratio :

$$r_0 \equiv \frac{\rho_{s,0}}{\rho_{r,0}} \quad (\text{avec } 0 < r_0 < 1 \text{ pour que l’énergie soit positive aujourd’hui}).$$

3 Condition de rebond

La densité effective vaut

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \rho_r(a) + \rho_s(a) = \rho_{r,0} a^{-4} - \rho_{s,0} a^{-6}.$$

Le rebond (dans ce modèle) survient quand $H^2 \propto \rho_{\text{eff}}$ s’annule :

$$\rho_{r,0} a_b^{-4} - \rho_{s,0} a_b^{-6} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{a_b}{a_0} = \sqrt{r_0}}.$$

Donc la “taille comobile normalisée” :

$$\boxed{R_b = R_0 \sqrt{r_0}}.$$

Avantage : une application numérique est immédiate : pas besoin de résoudre une équation non-linéaire.

4 NEC effective au rebond

On a :

$$\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}} = (\rho_r + p_r) + (\rho_s + p_s) = \frac{4}{3}\rho_r + 2\rho_s.$$

Au rebond, $\rho_s = -\rho_r$, donc :

$$(\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}})|_b = \left(\frac{4}{3} - 2\right)\rho_r = -\frac{2}{3}\rho_r < 0.$$

Conclusion : la NEC est bien violée (localement autour du rebond) dans ce modèle jouet, de manière contrôlée.

5 Normalisation numérique (comparatif)

Pour rester cohérent avec les autres docs :

$$\rho_{r,0} \equiv \rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly} = 96 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

Note : ρ_0 est une normalisation de comparaison ; si le secteur RGH “radiation-like” a une densité actuelle différente, remplacer ρ_0 par la valeur physique.

6 Résultats numériques : R_b en fonction de r_0

TABLE 1 – Dans ce modèle, $R_b = R_0\sqrt{r_0}$. On donne des ordres de grandeur utiles.

r_0	$a_b/a_0 = \sqrt{r_0}$	R_b (a.l.)
10^{-22}	10^{-11}	0.96
10^{-20}	10^{-10}	9.6
10^{-18}	10^{-9}	96
10^{-17}	3.16×10^{-9}	303
10^{-16}	10^{-8}	960

Lecture (et ton intuition “~100 a.l.”). Pour viser $R_b \sim 100$ a.l. avec $R_0 = 96$ Gly, il faut typiquement $r_0 \sim 10^{-18}$. Donc une composante stiff-like *aujourd’hui* dix-huit ordres de grandeur sous la composante radiation-like, mais qui domine automatiquement en contraction car elle croît comme a^{-6} .

Remarques (honnêteté & lien RGH)

- Ce modèle est un **gabarit** : il capture *le mécanisme* NEC contrôlée, mais pas une action microscopique.
- En RGH, on peut interpréter $\rho_s < 0$ comme une correction géométrique/symplectique (régularisation par (ω, J) , Born–Infeld interne, terme hypercomplexe saturant, etc.).
- Le point dur (à traiter ensuite) : **stabilité** (pas de ghost/gradient) et compatibilité PPN/observables.
- Bonus humour : ici, l’univers fait un “frein à main” cosmique. ;))

Application numérique : rebond au seuil d'invariant de Weyl conforme (hors FLRW strict) – test d'ordre de grandeur

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

On explore un déclencheur “géométrie pure” alternatif au seuil de densité ρ_* et au seuil de Kretschmann K_* : le rebond est supposé se produire lorsque l'invariant de Weyl conforme $W \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ atteint un plafond W_* . Comme $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ en FLRW strict, ce déclencheur est *par nature* sensible aux anisotropies/inhomogénéités (marées, cisaillement), ce qui colle bien à l'intuition “îlots / structures”. Le présent document est un *test d'ordre de grandeur* (pas une dérivation complète).

1 Point clé : en FLRW strict, $W = 0$

En métrique FLRW homogène/isotrope, le tenseur de Weyl est nul :

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad W = 0.$$

Donc un critère “rebond quand $W \rightarrow W_*$ ” ne peut pas s'activer dans FLRW exact. Il faut au minimum relâcher l'hypothèse et autoriser :

- anisotropies (type Bianchi, cisaillement),
- ou inhomogénéités (domaines),
- ou une dynamique qui génère des marées (Weyl) avant le rebond.

C'est précisément l'intérêt de ce déclencheur : il “voit” les marées (Weyl), pas seulement la densité moyenne.

2 Hypothèses du test (heuristique)

On paramètre l'écart à FLRW par un **cisaillement** (ou “marée effective”) via un paramètre adimensionné Σ , avec l'idée :

$$\Sigma \ll 1 \text{ (quasi-FLRW)}, \quad \Sigma \gtrsim 1 \text{ (anisotropies significatives)}.$$

On modélise ensuite l'invariant conforme par une loi d'échelle simple :

$$\boxed{W \approx \kappa \Sigma^2 H^4} \quad (\kappa \sim 1 \text{ coeff. d'ordre 1})$$

et, en phase dominée par un fluide effectif où $H^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho$,

$$\boxed{W \approx \kappa \Sigma^2 \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^2 \rho^2}.$$

Ainsi, un plafond W_* définit une densité critique *équivalente* :

$$\boxed{\rho_*(W, \Sigma) \approx \sqrt{\frac{W_*}{\kappa \Sigma^2}} \frac{3}{8\pi G}}.$$

Dans les calculs numériques ci-dessous, on prend $\kappa = 1$ (choix illustratif).

3 Échelles au rebond (comparatif radiation vs stiff)

On utilise la loi d'échelle standard $\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}$:

$$\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}, \quad R_b = R_0 \frac{a_b}{a_0}.$$

Références numériques (comparatif d'échelle) :

$$\rho_0 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly}.$$

Avertissement : si le fluide $w = 1$ (stiff) n'existe pas aujourd'hui à ce niveau, remplacer ρ_0 par sa densité actuelle réelle.

4 Résultats numériques (ordre de grandeur)

On teste deux plafonds typiques (mêmes dimensions que $K : \text{m}^{-4}$) :

$$W_\star = 10^{-5} \text{ m}^{-4} \quad (\text{“doux”}), \quad W_\star = 10^{19} \text{ m}^{-4} \quad (\text{“fort”}).$$

Et trois niveaux d'anisotropie : $\Sigma = 0.1$ (faible), 1 (modéré), 10 (fort).

TABLE 1 – Rebond déclenché par un plafond W_\star sur l'invariant conforme $W = C^2$. On donne la densité critique équivalente $\rho_\star(W, \Sigma)$ (avec $\kappa = 1$) et l'échelle R_b pour radiation ($w = \frac{1}{3}$) et stiff ($w = 1$).

Seuil	Anisotropie	$\rho_\star(W, \Sigma)$ (kg m ⁻³)	R_b (a.l.) radiation	R_b (a.l.) stiff
$W_\star = 10^{-5}$	$\Sigma = 0.1$	5.66×10^7	2.9×10^1	4.3×10^4
$W_\star = 10^{-5}$	$\Sigma = 1$	5.66×10^6	5.1×10^1	6.3×10^4
$W_\star = 10^{-5}$	$\Sigma = 10$	5.66×10^5	9.1×10^1	9.3×10^4
$W_\star = 10^{19}$	$\Sigma = 0.1$	5.66×10^{19}	2.9×10^{-2}	4.3×10^2
$W_\star = 10^{19}$	$\Sigma = 1$	5.66×10^{18}	5.1×10^{-2}	6.3×10^2
$W_\star = 10^{19}$	$\Sigma = 10$	5.66×10^{17}	9.1×10^{-2}	9.3×10^2

Lecture (et pourquoi c'est intéressant).

- En quasi-FLRW ($\Sigma \ll 1$), W est petit : il faut une densité plus grande pour atteindre W_\star .
- Si les anisotropies/marées croissent en contraction (Σ augmente), le plafond W_\star peut déclencher le rebond *plus tôt* (densité moyenne plus faible) : c'est une version “marées d'abord”.
- Ce déclencheur est conceptuellement proche de ton intuition “les structures comptent” : ce n'est pas la densité moyenne seule qui décide, mais la courbure conforme (marées).

Limites (honnêteté scientifique)

- Le modèle $W \approx \kappa \Sigma^2 H^4$ est **heuristique**. Une dérivation exacte (Bianchi I ou inhomogène) fixerait la forme et le κ .
- L'échelle R_b dépend d'une normalisation comobile (R_0) et de la densité actuelle choisie.
- Dans une RGH Weyl+symplectique, un plafond W_\star pourrait être *imposé* par la régularisation interne (ω, J), tandis que Φ pilote l'échelle et la transition de branche.
- Bonus humour : si W déclenche le rebond, c'est littéralement *la marée qui fait demi-tour*. ;)

Application numérique : rebond par domaines / inhomogénéités (scénario “îlots survivants” – déclencheur Weyl, modèle jouet RGH)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

12 février 2026

Résumé

On explore une variante plus naturelle du scénario domainé : le rebond local n’est plus déclenché par un simple seuil de densité, mais par un seuil sur un invariant de courbure conforme (Weyl). Cela permet de sélectionner les régions réellement anisotropes (marées, cisaillement), tout en laissant le fond FLRW inchangé (Weyl nul). On obtient alors une prédiction statistique testable pour la fraction d’objets “trop mûrs” à grand redshift (JWST).

1 Idée en une phrase

Au lieu d’un déclencheur purement densité, on suppose :

un domaine rebondit lorsque son invariant de Weyl atteint un seuil critique.

Comme $W = 0$ en FLRW parfait, seuls les domaines inhomogènes / anisotropes sont concernés.

2 Hypothèses minimales (modèle jouet Weyl)

1. Fond global quasi-FLRW : le CMB et la BBN ne sont pas modifiés au premier ordre.
2. Déclencheur local :

$$W_{\text{dom}}(t_b^{\text{dom}}) = W_{\star}, \quad W \equiv C_{\alpha\beta\gamma\delta} C^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

3. Approximation quasi-newtonienne (ordre de grandeur) : le tenseur électrique de Weyl est relié aux marées gravitationnelles :

$$E_{ij} \sim \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \Phi.$$

4. Équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta.$$

3 Lien Weyl – surdensité

Sur une échelle caractéristique R , on obtient (en ordre de grandeur) :

$$E \sim 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta.$$

Le scalaire de Weyl se comporte alors comme :

$$W \sim \frac{E_{ij} E^{ij}}{a^4} \sim (4\pi G \bar{\rho})^2 \delta^2 S^2,$$

où S encode l’anisotropie (facteur de forme / cisaillement).

Seuil effectif en densité. Le critère $W = W_\star$ induit :

$$\delta_\star(z) = \frac{1}{S} \frac{\sqrt{W_\star}}{4\pi G \bar{\rho}(z)}$$

Donc plus l’environnement est anisotrope (S grand), plus le seuil en δ est faible.

4 Exemple numérique à $z \simeq 10$

La densité moyenne évolue comme :

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0(1+z)^3.$$

À $z = 10$:

$$\bar{\rho}(10) \simeq 4.6 \times 10^{-31} \times 11^3 \approx 6.1 \times 10^{-28} \text{ kg m}^{-3}.$$

On peut alors évaluer δ_\star pour un seuil W_\star donné.

Exemple jouet. Si l’on exige un “boost” local correspondant à

$$\mathcal{A}_\star = \frac{a_b^{\text{dom}}}{a_b} = 1.5,$$

alors (cas radiation $w = 1/3$) :

$$\delta_\star = \mathcal{A}_\star^4 - 1 \simeq 4.06.$$

Ce seuil peut être obtenu pour un choix approprié de W_\star et S .

5 Fraction d’objets “trop mûrs”

Si la distribution des δ lissée sur l’échelle R est approximativement gaussienne de variance $\sigma_R^2(z)$, alors la fraction de domaines satisfaisant $\delta \geq \delta_\star$ vaut :

$$F_{\text{out}}(z) = f_{\text{dom}}(z) \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\delta_\star}{\sqrt{2} \sigma_R(z)}\right)$$

où $f_{\text{dom}}(z)$ est la fraction volumique RGH-active.

Sensibilité. À titre indicatif :

- $\sigma_R = 1 \Rightarrow$ fraction très faible,
- $\sigma_R = 2 \Rightarrow$ quelques pourcents,
- $\sigma_R = 3 \Rightarrow \mathcal{O}(10\%)$.

Donc un petit f_{dom} suffit pour produire une queue d’objets précoces, sans rendre l’univers globalement “vieux”.

6 Interprétation physique

- Le fond FLRW conserve $W = 0$: CMB et BBN préservés.
- Les proto-amas / régions anisotropes activent plus tôt la dynamique RGH.
- Les objets précoces doivent corrélér avec environnement dense et fort cisaillement.

Ce scénario transforme un problème global (en contradiction avec la thermodynamique primordiale) en une dispersion statistique testable.

Conclusion : le rebond domainé déclenché par Weyl fournit une voie cohérente pour expliquer des galaxies anormalement mûres à grand redshift, tout en conservant les piliers cosmologiques standards.

Addendum – Domaines + CEN contrôlée

Couplage local $r_i = (1 + \delta_i)^q$ (protection des surdensités)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

But

Dans le modèle “domaines + CEN contrôlée”, on avait

$$R_{b,i} = R_0 \sqrt{\frac{r_0 r_i}{1 + \delta_i}},$$

avec r_0 une amplitude globale (aujourd’hui) et r_i une intensité locale de la correction (RGH interne). Pour coller à l’intuition “îlots survivants”, on teste un **couplage activé par la densité** :

$$r_i = (1 + \delta_i)^q.$$

L’idée : les régions plus denses activent plus fortement la correction régularisante.

Formule simplifiée

En injectant $r_i = (1 + \delta_i)^q$:

$$R_{b,i} = R_0 \sqrt{r_0} (1 + \delta_i)^{\frac{q-1}{2}}.$$

Donc :

- si $q < 1$, les surdensités *réduisent* $R_{b,i}$ (rebond plus petit/plus violent) ;
- si $q = 1$, $R_{b,i}$ est *indépendant* de δ_i (compensation parfaite) ;
- si $q > 1$, les surdensités *augmentent* $R_{b,i}$ (rebond plus large / protection des îlots).

Numérique (ordres de grandeur)

On fixe comme précédemment :

$$r_0 = 10^{-18}, \quad R_0 = 96 \text{ Gly} = 96 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

donc $R_0 \sqrt{r_0} = 96 \text{ a.l.}$ (valeur de référence pour $\delta = 0$). On compare $\delta \in \{0, 10^2, 10^6\}$ et $q \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$.

Lecture.

- $q = 1$ est la valeur “neutre” : une surdensité n’avance pas/retarde l’échelle du rebond (dans ce jouet).
- $q > 1$ réalise ton intuition “îlots survivants” : les surdensités rebondissent *plus largement* (donc potentiellement moins violent localement).
- $q < 1$ fait l’inverse : les surdensités rebondissent plus petit (plus violent), ce qui est moins favorable à la survie.

Note humour : là, les quartiers riches en matière ont droit à plus d’airbags cosmologiques. ;

TABLE 1 – Effet du couplage $r_i = (1 + \delta_i)^q$ sur la taille de rebond locale $R_{b,i}$ (en a.l.).

q	δ_i	$R_{b,i}$ (a.l.)
0	0	96
0	10^2	9.55
0	10^6	9.60×10^{-2}
1/2	0	96
1/2	10^2	30.3
1/2	10^6	3.04
1	0	96
1	10^2	96.0
1	10^6	96.0
3/2	0	96
3/2	10^2	305
3/2	10^6	3036
2	0	96
2	10^2	965
2	10^6	9.60×10^4

Application numérique hypothétique : rebond “stellaire” (RGH – déclenchement Weyl, régularisation symplectique)

Lolo (avec assistance IA pour la mise en forme)

6 février 2026

Résumé

Ce document est un *exercice numérique* : on explore, de façon volontairement hypothétique, ce que donnerait un rebond cosmologique à densité critique “astrophysique” (par exemple stellaire), dans un cadre inspiré de la RGH où le rebond est *déclenché* par un seuil Weyl (champ d’échelle Φ_μ) et *régularisé* par une structure interne symplectique (ω, J) . On sépare clairement hypothèses, modèle effectif et résultats chiffrés, afin d’éviter les confusions d’interprétation (liées notamment à la notion de “rayon de l’univers observable”).

1 Hypothèses (assumées)

On adopte les conventions suivantes, uniquement pour fixer les ordres de grandeur :

1. **Cosmologie homogène/isotrope** : métrique FLRW plate pour le *fond* (pas pour les structures liées).
2. **Weyl intégrable en FLRW** : $\Phi_\mu dx^\mu = \Phi_0(t) dt$ (donc $F_{\mu\nu} = d\Phi = 0$ au fond).
3. **Déclencheur Weyl (Option II)** : identification “seuil Weyl \leftrightarrow densité critique effective”

$$\boxed{\frac{\Phi_0^2}{\Phi_\star^2} = \frac{\rho}{\rho_\star}} \quad (1)$$

où ρ_\star est la densité critique de rebond (effective) et Φ_\star l’échelle critique Weyl.

4. **Dynamique effective de rebond** :

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\star}\right)} \quad (2)$$

(lecture : le seuil fondamental est Weyl ; la forme en ρ est une réécriture pratique).

5. **Contenu dominant au rebond** : on illustre surtout le cas *radiation* $w = \frac{1}{3}$ (le plus standard au très jeune âge), mais on rappelle les formules générales en w .
6. **Échelle actuelle “ R_0 ”** : on prend une *échelle physique* de référence $R_0 = 96$ milliards d’années-lumière (Gly), uniquement comme facteur multiplicatif. Ce n’est **pas** une “bille” matérielle : c’est une distance associée à un choix de volume comobile.

Rôle de (ω, J) (régularisation). On ne spécifie pas ici une action complète : on suppose seulement que la structure symplectique interne (ω, J) assure la stabilité (pas de ghost/gradient) et fournit un mécanisme de *saturation* qui rend Φ_\star fini (ex. régularisation de type Born–Infeld sur un invariant interne positif).

2 Formules utiles

2.1 Évolution en facteur d'échelle

Si $p = w\rho$ et conservation standard du fluide ($\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$), alors

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (3)$$

Le rebond se produit lorsque $\rho = \rho_\star$, donc

$$\boxed{\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_\star}\right)^{\frac{1}{3(1+w)}}}. \quad (4)$$

2.2 Cas radiation ($w = \frac{1}{3}$)

Alors

$$\boxed{\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_\star}\right)^{1/4}}, \quad \boxed{R_b = R_0 \left(\frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_\star}\right)^{1/4}}. \quad (5)$$

On utilise pour ordre de grandeur :

$$\rho_{\text{rad},0} \simeq 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3} \quad (6)$$

(photons + neutrinos : valeur indicative).

2.3 Température (si radiation thermique)

Si l'on interprète la densité massique ρ comme une densité d'énergie $u = \rho c^2$ dominée par radiation thermique,

$$u = \frac{\pi^2}{30} g_\star \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3} \Rightarrow \boxed{T = \left(\frac{30}{\pi^2 g_\star} \frac{\hbar^3 c^5}{k_B^4} \rho\right)^{1/4}}. \quad (7)$$

Le facteur g_\star (degrés relativistes effectifs) est incertain au rebond ; on donne deux valeurs illustratives ($g_\star = 10$ et 100).

3 Application numérique : “rebond stellaire” et comparaisons

On fixe $R_0 = 96$ Gly et on calcule, dans l'hypothèse radiation au rebond,

$$\frac{a_b}{a_0} = \left(\frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_\star}\right)^{1/4}, \quad R_b = R_0 \left(\frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_\star}\right)^{1/4}.$$

TABLE 1 – Ordres de grandeur (hypothèse radiation). $R_0 = 96$ Gly, $\rho_{\text{rad},0} \simeq 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg m}^{-3}$.

Scénario	ρ_\star (kg m ⁻³)	a_b/a_0	R_b (m)	R_b (a. l.)
Stellaire	10^6	8.24×10^{-10}	7.48×10^{17}	≈ 79
Nucléaire	10^{18}	8.24×10^{-13}	7.48×10^{14}	$\approx 7.9 \times 10^{-2}$
Très élevé	10^{30}	8.24×10^{-16}	7.48×10^{11}	$\approx 7.9 \times 10^{-5}$
Planck	5.15×10^{96}	1.73×10^{-32}	1.57×10^{-5}	$\approx 1.7 \times 10^{-21}$

Températures associées (illustratives). Pour ces mêmes densités, l’estimation radiative donne :

Scénario	T_b (K) pour $g_\star = 100$	T_b (K) pour $g_\star = 10$
Stellaire (10^6)	1.24×10^9	2.21×10^9
Nucléaire (10^{18})	1.24×10^{12}	2.21×10^{12}
Très élevé (10^{30})	1.24×10^{15}	2.21×10^{15}
Planck (5.15×10^{96})	5.92×10^{31}	1.05×10^{32}

4 Interprétation (ce que ça dit / ce que ça ne dit pas)

4.1 Ce que ces chiffres signifient

Ils donnent l’échelle physique associée à *un même volume comobile* si l’on normalise aujourd’hui à $R_0 = 96$ Gly et si l’on suppose une phase dominée par radiation au rebond.

4.2 Ce que ces chiffres *ne* signifient pas

- Ce n’est pas une preuve qu’un rebond stellaire préserve automatiquement des étoiles/galaxies.
- Le “rayon de l’univers observable” n’est pas un objet matériel : la notion d’horizon implique une intégrale sur $1/a(t)$.
- La survie des structures dépend de la durée de contraction, du chauffage radiatif, des anisotropies (cisaillement), etc.

5 Survie des structures : critère d’ordre de grandeur

Un critère minimal (très grossier) pour qu’un système lié ne soit pas déstructuré par l’expansion/contraction du fond est :

$$\boxed{|H| \ll \tau_{\text{bind}}^{-1}} \quad (8)$$

où τ_{bind} est un temps dynamique interne (galaxie : $\sim 10^8$ ans ; étoile : minutes–heures). Dans le modèle rebond $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(1 - \rho/\rho_\star)$, on a $H = 0$ au rebond et un H borné, mais le *chauffage radiatif* durant la contraction peut rester déterminant.

6 Annexe : autres hypothèses possibles (à explorer ensuite)

Ce document privilégie l’Option II (seuil Weyl \Rightarrow densité critique effective). D’autres choix sont possibles :

1. Seuil sur $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ plutôt que sur $\Phi_\mu\Phi^\mu$ (Weyl non intégrable).
2. Seuil sur un invariant de courbure (R ou Kretschmann K) contrôlé par le secteur RGH.
3. Seuil mixte unique $\mathcal{I} = \alpha\Phi^2 + \beta\|\omega\|^2$ (un seul seuil, deux secteurs).
4. Rebonds par domaines (inhomogènes) : le rebond concerne le fond, pas nécessairement les objets liés.

Note. Les chiffres sont indicatifs et destinés à guider l’intuition ; ils n’engagent pas une validation observationnelle.

Les belles ations

25 février 2026

1 Einstein

$$G_{\mu\nu}^{\Gamma} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{\mu\nu}^{matière}$$

2 RGH

$$G_{\mu\nu}^{\Gamma} + \Lambda_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \cdot (T_{\mu\nu}^{matière} + T_{\mu\nu}^F + T_{\mu\nu}^{\tau} + T_{\mu\nu}^c)$$

Première partie

Dark Fluid

Friedmann–Lemaître Universe with different fluids : photons, neutrinos, baryons and a dark fluid, the Friedmann equations take the form :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1)$$

$$\rho = \rho_r + \rho_b + \rho_D$$

where r denotes the radiation (i.e. photons + neutrinos), b the baryonic matter and D the dark fluid.

Deuxième partie

Hypercomplex General Relativity (HGR)

Friedmann–Lemaître Universe with different fluids : photons, neutrinos, baryons and a dark fluid, the Friedmann equations take the form :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^4}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (2)$$

$$\rho = \rho_r + \rho_b + \rho_{eff}(\Omega, \phi, C)$$

$\rho_{eff}(\Omega, \phi, C)$ groups the effective geometric contributions (Weyl, internal sector and couplings).

1 Galaxies dominées par matière noire et halos hypercomplexes dans la RGH

1.1 Contexte observationnel

Certaines galaxies récemment observées présentent une fraction baryonique extrêmement faible. Ces objets sont souvent désignés comme :

- *dark galaxies*,
- *ultra-diffuse galaxies* (UDG),
- halos dominés par matière noire.

Les indices observationnels sont essentiellement gravitationnels :

- amas globulaires orbitant autour d'un centre gravitationnel,
- dispersion de vitesse mesurée,
- parfois lentille gravitationnelle faible,
- estimation dynamique de la masse du halo.

Ces observations impliquent généralement

$$M_{\text{halo}} \gg M_{\text{baryon}} \quad (1)$$

Dans certains systèmes extrêmes :

$$\frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \sim 10^{-3} - 10^{-4} \quad (2)$$

alors que la fraction baryonique cosmologique attendue est

$$\frac{M_{\text{baryon}}}{M_{\text{halo}}} \approx 0.15. \quad (3)$$

Ces estimations proviennent d'analyses dynamiques (dispersion de vitesse, dynamique des amas globulaires) et non d'une mesure directe de la masse invisible.

1.2 Interprétation standard dans le modèle Λ CDM

Dans le cadre cosmologique standard, la formation des galaxies suit le scénario hiérarchique

$$\text{halo de matière noire} \rightarrow \text{capture du gaz baryonique} \rightarrow \text{formation stellaire}. \quad (4)$$

Dans les galaxies extrêmement diffuses, ce processus baryonique semble avoir échoué. Trois mécanismes principaux sont généralement invoqués.

Feedback stellaire violent Les premières générations d'étoiles peuvent expulser le gaz par :

- vents stellaires
- explosions de supernova
- rayonnement ultraviolet intense.

Stripping gravitationnel Dans un environnement d’amas de galaxies :

$$\text{pression dynamique} + \text{forces de marée} \quad (5)$$

peuvent arracher le gaz baryonique au halo.

Suppression par réionisation Lors de l’époque de réionisation cosmique, le gaz chauffé peut rester trop énergétique pour être capturé par certains halos.

1.3 Limites conceptuelles

Ces objets extrêmes sont souvent interprétés comme un argument en faveur d’une composante matérielle réelle (matière noire) plutôt qu’une modification universelle de la gravité.

Cependant la variabilité observée des fractions baryoniques suggère également que la structure gravitationnelle peut exister indépendamment de la matière visible.

Cela ouvre la possibilité d’interprétations géométriques plus fondamentales.

1.4 Cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe

Dans la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), la gravité effective peut contenir une contribution provenant d’un champ hypercomplexe.

La métrique effective peut être écrite sous la forme

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(R)} + g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})} \quad (6)$$

où $g_{\mu\nu}^{(\mathbb{H})}$ représente la contribution hypercomplexe.

Le tenseur énergie-impulsion effectif devient alors

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}}. \quad (7)$$

Dans certains régimes :

$$T_{\mu\nu}^{\mathbb{H}} \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}. \quad (8)$$

Un halo gravitationnel peut donc exister même en absence quasi complète de matière baryonique.

1.5 Hypothèse : halos hypercomplexes

Hypothèse H1.

Il peut exister des domaines astrophysiques où la densité d’énergie hypercomplexe domine la contribution baryonique :

$$\rho_{\mathbb{H}} \gg \rho_{\text{baryon}}. \quad (9)$$

Dans ce cas, la structure gravitationnelle observable correspondrait à un condensat du champ hypercomplexe.

1.6 Structure possible

Une galaxie dominée par le champ hypercomplexe pourrait suivre le schéma :

condensation du champ hypercomplexe \rightarrow puits gravitationnel \rightarrow capture partielle de baryons. (10)

Si la capture baryonique est inefficace, l'objet apparaît presque invisible.

1.7 Défaut de couplage baryonique

Il est également possible que le couplage

$$\mathbb{H} \leftrightarrow T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} \quad (11)$$

soit faible dans certains domaines.

La structure gravitationnelle peut alors se former sans accumulation significative de matière ordinaire.

1.8 Domaines topologiques

Dans certaines extensions géométriques, ces structures pourraient correspondre à :

- défauts topologiques,
- solitons gravitationnels,
- domaines de Weyl ou de torsion.

Ces structures produisent une perturbation métrique

$$\Delta g_{\mu\nu} \quad (12)$$

générant une gravité effective similaire à celle d'un halo de matière noire.

1.9 Prédictions observationnelles

Si cette interprétation est correcte, plusieurs signatures observables pourraient apparaître :

1. dispersion dynamique atypique,
2. relation masse–amas globulaires anormale,
3. profil de masse non compatible avec un halo NFW standard,
4. signatures de lentille gravitationnelle modifiées.

1.10 Intérêt pour la RGH

Ces galaxies représentent des laboratoires astrophysiques particulièrement intéressants car elles minimisent les effets baryoniques et isolent la structure gravitationnelle pure.

Elles constituent donc des systèmes privilégiés pour tester des extensions géométriques de la relativité générale.

1.11 Analogie conceptuelle

Une analogie simple consiste à comparer une galaxie à un sapin de Noël :

- dans le modèle Λ CDM, l'arbre correspond au halo de matière noire et les guirlandes à la matière baryonique ;
- dans MOND, la gravité modifiée affecte la luminosité apparente des guirlandes ;
- dans la RGH, la structure même de l'arbre pourrait provenir d'une géométrie hypercomplexe du champ gravitationnel.

1 Discussion physique : feedback stellaire et distribution baryonique

1.1 Question de départ

On peut s'interroger sur le rôle du *feedback stellaire* dans la distribution de la matière baryonique.

Dans les modèles de formation galactique, les premières générations d'étoiles peuvent expulser du gaz par plusieurs mécanismes :

- vents stellaires,
- explosions de supernova,
- rayonnement ultraviolet intense.

Si ces processus ne dépendent pas directement de la présence de matière noire, on peut alors se poser la question suivante :

Si une galaxie expulse une grande fraction de sa matière baryonique, où se retrouve cette matière ?

On pourrait imaginer que cette matière se disperse dans une région de taille comprise entre

$$1 \text{ Myr} \lesssim R \lesssim 10 \text{ Myr}$$

(correspondant à environ 0.3 à 3 Mpc), contenant potentiellement une masse baryonique comparable à celle d'une galaxie massive :

$$M \sim 10^{10} - 10^{11} M_{\odot}.$$

Cela soulève la question de savoir si de telles concentrations diffuses de matière baryonique devraient être observables.

1.2 Contraintes énergétiques

L'expulsion complète du gaz d'une galaxie nécessite de surmonter l'énergie de liaison gravitationnelle du halo.

Une estimation d'ordre de grandeur donne

$$E \sim \frac{GM^2}{R}.$$

Pour une galaxie typique :

$$M \sim 10^{11} M_{\odot}, \quad R \sim 50 \text{ kpc}.$$

On obtient alors

$$E \sim 10^{59} \text{ J}.$$

Or une supernova libère environ

$$E_{\text{SN}} \sim 10^{44} \text{ J.}$$

Il faudrait donc approximativement

$$N_{\text{SN}} \sim 10^{15}$$

supernovae pour expulser totalement la masse baryonique d'une galaxie massive.

Cela montre que le *feedback* ne peut généralement pas vider complètement les grandes galaxies.

1.3 Distribution réelle du gaz expulsé

En pratique, le gaz expulsé reste souvent lié gravitationnellement au halo galactique et se distribue dans ce que l'on appelle le milieu circumgalactique (*Circumgalactic Medium*, CGM).

Ce gaz présente typiquement :

— une température

$$T \sim 10^5 - 10^6 \text{ K,}$$

— une extension spatiale de l'ordre de

$$100 \text{ kpc} \lesssim R \lesssim 500 \text{ kpc,}$$

— une masse baryonique totale

$$M \sim 10^9 - 10^{10} M_{\odot}.$$

Le gaz peut ensuite retomber vers la galaxie dans un processus appelé

galactic fountain.

1.4 Limites de l'expulsion à grande échelle

Pour que la matière atteigne des distances de plusieurs mégaparsecs, il faudrait des vitesses d'éjection de l'ordre de

$$v \gtrsim 3000 \text{ km s}^{-1}.$$

Or les vents galactiques typiques ont des vitesses de l'ordre de

$$v \sim 300 - 1000 \text{ km s}^{-1}.$$

Cela limite fortement l'extension maximale du gaz expulsé.

1.5 Cas particulier des galaxies naines

Dans les galaxies de faible masse :

$$M_{\text{halo}} \sim 10^9 - 10^{10} M_{\odot},$$

le potentiel gravitationnel est plus faible.

Dans ce régime, le feedback stellaire peut effectivement expulser une grande fraction du gaz baryonique, produisant des galaxies :

- ultra-diffuses,
- pauvres en étoiles,
- dominées par leur halo gravitationnel.

1.6 Le problème des baryons manquants

Les observations cosmologiques indiquent une densité baryonique

$$\Omega_b \approx 0.048.$$

Cependant, la matière baryonique observée dans les galaxies ne représente qu'environ

$$20\% - 30\%$$

de la valeur attendue.

Le reste est probablement distribué dans le

$$\textit{Warm-Hot Intergalactic Medium (WHIM)}$$

qui correspond à un gaz diffus situé entre les galaxies.

1.7 Interprétation dans le cadre de la RGH

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), il est également possible d'envisager un scénario différent.

Certaines structures gravitationnelles pourraient correspondre à des halos dominés par la contribution hypercomplexe du champ gravitationnel :

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H.$$

Dans certains régimes :

$$T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}.$$

Dans ce cas, un halo gravitationnel pourrait exister même en présence d'une très faible quantité de matière baryonique.

1.8 Conclusion

La question de la localisation des baryons expulsés par les processus de feedback stellaire reste un problème actif en cosmologie.

Les observations suggèrent que :

- une partie des baryons se trouve dans les halos circumgalactiques,
- une autre fraction est dispersée dans le milieu intergalactique chaud,
- certaines structures gravitationnelles pourraient contenir très peu de baryons.

Ces objets constituent des laboratoires astrophysiques importants pour tester les modèles de formation galactique et les extensions possibles de la gravitation.

1 Flux baryonique galactique et éjection par feedback stellaire

1.1 Motivation

Les processus de formation stellaire produisent des mécanismes de rétroaction (*stellar feedback*) capables d'expulser une fraction importante du gaz baryonique d'une galaxie.

Les principaux mécanismes sont :

- vents stellaires,
- explosions de supernova,
- rayonnement ultraviolet intense.

Ces mécanismes peuvent produire des vents galactiques capables de transporter du gaz au-delà du disque galactique.

La question physique fondamentale est alors :

Quelle quantité de matière baryonique peut être expulsée et jusqu'à quelle distance ?

1.2 Énergie de liaison gravitationnelle

Pour une galaxie de masse totale M et de rayon caractéristique R , l'énergie gravitationnelle de liaison est approximativement

$$E_{\text{bind}} \sim \frac{GM^2}{R}. \quad (1)$$

Pour une galaxie typique :

$$M \sim 10^{11} M_{\odot}, \quad R \sim 50 \text{ kpc}.$$

On obtient un ordre de grandeur

$$E_{\text{bind}} \sim 10^{59} \text{ J}. \quad (2)$$

L'énergie libérée par une supernova est typiquement

$$E_{\text{SN}} \sim 10^{44} \text{ J}. \quad (3)$$

Le nombre de supernovae nécessaires pour expulser entièrement le gaz serait donc

$$N_{\text{SN}} \sim \frac{E_{\text{bind}}}{E_{\text{SN}}} \sim 10^{15}. \quad (4)$$

Cela montre que l'expulsion complète de la matière baryonique est difficile pour les galaxies massives.

1.3 Vitesse d'éjection

Les vents galactiques présentent typiquement des vitesses

$$v_{\text{wind}} \sim 300 - 1000 \text{ km s}^{-1}. \quad (5)$$

La distance maximale atteinte par le gaz peut être estimée en comparant cette vitesse à la vitesse d'échappement du halo.

Pour un halo galactique typique :

$$v_{\text{esc}} \sim 500 \text{ km s}^{-1}. \quad (6)$$

Ainsi, une partie du gaz expulsé reste gravitationnellement liée au halo.

1.4 Milieu circumgalactique

Le gaz expulsé forme généralement un halo diffus appelé

Circumgalactic Medium (CGM)

caractérisé par :

$$T \sim 10^5 - 10^6 \text{ K}, \quad (7)$$

$$R \sim 100 - 500 \text{ kpc}, \quad (8)$$

$$M_{\text{gas}} \sim 10^9 - 10^{10} M_{\odot}. \quad (9)$$

Ce gaz peut ensuite retomber vers la galaxie dans un cycle appelé

galactic fountain.

1.5 Éjection dans le milieu intergalactique

Dans certains cas extrêmes (galaxies naines ou interactions gravitationnelles), une fraction du gaz peut être expulsée dans le milieu intergalactique.

Le gaz se distribue alors dans le

Warm-Hot Intergalactic Medium (WHIM)

caractérisé par :

$$T \sim 10^5 - 10^7 \text{ K}. \quad (10)$$

Ce milieu pourrait contenir une grande fraction des baryons manquants de l'univers.

1.6 Flux baryonique

On peut estimer le flux de masse éjectée par un vent galactique :

$$\dot{M}_{\text{out}} \sim \eta \dot{M}_\star, \quad (11)$$

où

- \dot{M}_\star est le taux de formation stellaire,
- η est le facteur de chargement du vent.

Les observations donnent typiquement

$$\eta \sim 1 - 10 \quad (12)$$

pour les galaxies à forte formation stellaire.

1.7 Limites de l'expulsion

Pour atteindre une distance de plusieurs mégaparsecs, la vitesse d'éjection devrait être

$$v \gtrsim 3000 \text{ km s}^{-1}. \quad (13)$$

Ces vitesses ne sont généralement pas atteintes par les vents galactiques standards.

Ainsi, la plupart du gaz expulsé reste confiné dans le halo circumgalactique ou le voisinage intergalactique immédiat.

1.8 Interprétation possible dans la RGH

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), une autre interprétation peut être envisagée.

La gravité effective peut contenir une contribution provenant du champ hypercomplexe :

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H. \quad (14)$$

Dans certains régimes :

$$T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}. \quad (15)$$

Dans ce cas, un halo gravitationnel peut exister même en présence d'une quantité très faible de matière baryonique.

Ces structures pourraient correspondre à des halos hypercomplexes dans lesquels la matière ordinaire n'a jamais été capturée efficacement ou a été expulsée lors des premières phases d'évolution galactique.

1.9 Conséquences observationnelles

De tels systèmes pourraient apparaître comme :

- galaxies ultra-diffuses,
- halos gravitationnels détectés par dynamique des amas globulaires,
- structures dominées par une composante gravitationnelle invisible.

Ces objets constituent donc des laboratoires astrophysiques intéressants pour tester les modèles de formation galactique et les extensions géométriques de la gravitation.

1 Halos hypercomplexes et courbes de rotation galactiques

1.1 Motivation

Une propriété observationnelle majeure des galaxies spirales est la présence de courbes de rotation approximativement plates à grande distance du centre. Dans le cadre standard, cette propriété est généralement interprétée comme la signature d'un halo de matière noire.

Dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), on peut envisager qu'une partie de cette gravitation effective provienne d'une contribution géométrique hypercomplexe, sans postuler nécessairement une nouvelle composante particulaire.

1.2 Hypothèse de halo hypercomplexe sphérique

Considérons un halo effectif statique, sphériquement symétrique, décrit par une densité d'énergie hypercomplexe effective $\rho_H(r)$.

On suppose qu'à grande distance la densité suit la loi asymptotique

$$\rho_H(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2}, \quad (1)$$

où ρ_0 et r_0 sont des constantes caractéristiques du halo.

Cette loi est particulièrement intéressante car elle conduit naturellement à une croissance linéaire de la masse enfermée.

1.3 Masse effective intérieure

La masse effective contenue à l'intérieur d'un rayon r est

$$M_H(r) = 4\pi \int_0^r \rho_H(r') r'^2 dr'. \quad (2)$$

En utilisant (1), on obtient

$$M_H(r) = 4\pi \rho_0 r_0^2 \int_0^r dr' = 4\pi \rho_0 r_0^2 r. \quad (3)$$

Ainsi,

$$M_H(r) \propto r. \quad (4)$$

1.4 Courbe de rotation

Dans l'approximation newtonienne, la vitesse circulaire vérifie

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}. \quad (5)$$

Si la contribution dominante à grande distance est $M_H(r)$ donnée par (3), alors

$$v_c^2(r) = \frac{G}{r} (4\pi\rho_0 r_0^2 r) = 4\pi G\rho_0 r_0^2. \quad (6)$$

Donc

$$v_c(r) \approx \text{constante}. \quad (7)$$

On retrouve ainsi naturellement une courbe de rotation plate.

1.5 Interprétation RGH

Dans la RGH, cette densité effective peut être interprétée comme provenant du secteur hypercomplexe du tenseur énergie-impulsion :

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{\text{baryon}} + T_{\mu\nu}^H. \quad (8)$$

Dans le régime de halo externe, on peut supposer que

$$T_{\mu\nu}^H \gg T_{\mu\nu}^{\text{baryon}}, \quad (9)$$

de sorte que la dynamique orbitale est dominée par la contribution hypercomplexe.

Le profil $\rho_H(r) \propto r^{-2}$ peut alors être vu comme une solution effective stationnaire du secteur géométrique interne.

1.6 Origine possible du profil en $1/r^2$

Un tel profil peut émerger si le champ hypercomplexe forme un halo auto-gravitant quasi-statique dont l'énergie se distribue selon une loi d'échelle.

Par exemple, si un invariant scalaire du champ interne $X(r)$ vérifie asymptotiquement

$$X(r) \propto \frac{1}{r}, \quad (10)$$

et si la densité effective est quadratique en cet invariant,

$$\rho_H(r) \propto X(r)^2, \quad (11)$$

alors on obtient immédiatement

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}. \quad (12)$$

Cette possibilité est cohérente avec une lecture où le secteur interne RGH agit comme une structure de halo géométrique plutôt que comme une matière particulaire ordinaire.

1.7 Modèle minimal effectif

On peut paramétrer le potentiel gravitationnel total par

$$\Phi(r) = \Phi_b(r) + \Phi_H(r), \quad (13)$$

où Φ_b est la contribution baryonique et Φ_H la contribution hypercomplexe. La contribution hypercomplexe vérifie alors

$$\nabla^2 \Phi_H = 4\pi G \rho_H(r). \quad (14)$$

Avec $\rho_H(r) = \rho_0 r_0^2 / r^2$, on obtient un champ radial

$$\frac{d\Phi_H}{dr} = \frac{GM_H(r)}{r^2} = \frac{4\pi G \rho_0 r_0^2}{r}, \quad (15)$$

ce qui donne après intégration

$$\Phi_H(r) \sim 4\pi G \rho_0 r_0^2 \ln r + \text{const.} \quad (16)$$

Le potentiel logarithmique est précisément le comportement classique associé à des vitesses orbitales asymptotiquement constantes.

1.8 Conséquences observationnelles

Si les halos hypercomplexes reproduisent effectivement les courbes de rotation, on s'attend à observer :

1. des vitesses orbitales asymptotiquement plates,
2. une transition baryons \rightarrow halo hypercomplexe à grand rayon,
3. des profils de masse effective compatibles avec $M(r) \propto r$,
4. des écarts possibles au profil NFW standard dans les régions intermédiaires.

1.9 Conclusion

Le cadre RGH permet donc, au moins au niveau effectif, d'envisager une explication géométrique des courbes de rotation galactiques.

Une densité hypercomplexe asymptotique de type

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (17)$$

implique

$$M_H(r) \propto r, \quad v_c(r) \approx \text{constante}, \quad (18)$$

ce qui reproduit directement le comportement observé des halos galactiques.

Cette possibilité fait des halos hypercomplexes des candidats naturels pour l'interprétation RGH de la dynamique galactique à grande échelle.

STRUCTURES HYPERCOMPLEXES EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE-TEMPS RELATIVISTE

LAURENT BESSON (IDÉE INITIALE)
AIDE MATHÉMATIQUE : CHATGPT

1 INTRODUCTION

La relativité générale décrit la gravitation comme la manifestation géométrique de la courbure de l'espace-temps. Dans sa formulation standard, la géométrie est entièrement déterminée par la métrique $g_{\mu\nu}$ et par la connexion de Levi-Civita qui en dérive. Les trajectoires des particules libres sont alors décrites par les géodésiques associées à cette connexion.

Cependant, plusieurs extensions géométriques de la relativité générale ont été étudiées au cours du siècle dernier. Parmi celles-ci figurent les géométries de Weyl, qui introduisent une non-métricité associée à un champ de dilatation, ainsi que les théories d'Einstein-Cartan où la connexion affine possède une torsion couplée au spin de la matière. Ces approches partagent une idée commune : la structure affine de l'espace-temps pourrait être plus riche que celle décrite par la seule connexion de Levi-Civita.

Dans ce travail, nous explorons et j'insiste sur le côté exploratoire, une autre possibilité géométrique, fondée sur l'existence d'une structure interne hypercomplexe associée à chaque point de l'espace-temps. Plus précisément, nous considérons un espace total muni d'une fibre quaternionique \mathbb{H} , de sorte que la structure géométrique fondamentale est décrite sur un espace fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne l'espace-temps observable et \mathbb{H} la fibre hypercomplexe interne.

Dans cette perspective, la géométrie observable ne constitue plus la structure fondamentale, mais apparaît comme la projection d'une géométrie définie sur l'espace total. La connexion affine effective de l'espace-temps peut alors être interprétée comme la projection d'une connexion plus générale agissant sur l'espace fibré hypercomplexe.

Une telle construction conduit naturellement à introduire une connexion étendue combinant plusieurs secteurs géométriques, notamment la connexion de spin relativiste, un champ conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne associée à la structure quaternionique.

Nous postulons la décomposition affine minimale suivante :

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H),$$

où les termes supplémentaires représentent respectivement les contributions conforme et hypercomplexe.

La décomposition

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$$

doit être comprise comme une décomposition tensorielle de la connexion effective relativement à la connexion de Levi-Civita. En revanche, la forme explicite de la contribution hypercomplexe

$$\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma^\rho_{\nu I} + A_\nu^I \Sigma^\rho_{\mu I} \right)$$

n'est pas dérivée ici à partir d'une géométrie fondamentale complète, mais introduite comme l'ansatz local minimal compatible avec la symétrie en μ, ν et avec l'existence d'un couplage entre la connexion quaternionique interne et la structure tangentielle de l'espace-temps.

Dans ce cadre, la structure quaternionique interne ne se comporte pas simplement comme un champ de jauge supplémentaire, mais peut également modifier la structure affine de l'espace-temps observable. Les trajectoires géodésiques et la courbure effective peuvent alors recevoir des contributions provenant de la dynamique de la fibre hypercomplexe.

L'objectif de cet article est d'explorer cette possibilité dans un cadre géométrique minimal et de clarifier les implications physiques d'une telle structure. Nous introduisons pour cela une ansatz affine simple reliant la connexion interne quaternionique à la connexion effective de l'espace-temps, et discutons les conséquences géométriques et physiques qui en découlent.

Ce travail se situe dans une perspective exploratoire à l'interface entre géométrie différentielle et physique gravitationnelle. Il vise principalement à mettre en évidence la cohérence géométrique d'une telle extension hypercomplexe et à identifier les directions possibles pour des développements ultérieurs.

2 ALGÈBRE QUATERNIONIQUE ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

L'algèbre des quaternions \mathbb{H} fournit un cadre naturel pour décrire des structures rotationnelles tridimensionnelles ainsi que des degrés de liberté internes associés au groupe $SU(2)$. Un quaternion est défini par

$$q = a + bi + cj + dk,$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et où les unités imaginaires satisfont les règles de multiplication

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

L'algèbre quaternionique est associative mais non commutative. En particulier

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j,$$

tandis que

$$ji = -k.$$

Tout quaternion peut être décomposé en une partie réelle et une partie imaginaire vectorielle,

$$q = \text{Re}(q) + \vec{q},$$

avec

$$\vec{q} = (b, c, d).$$

Les composantes imaginaires (i, j, k) engendrent ainsi un espace interne tridimensionnel. Cette observation établit une correspondance naturelle entre les directions imaginaires des quaternions et les générateurs des rotations tridimensionnelles.

Un sous-ensemble important de l'algèbre quaternionique est constitué par les quaternions unitaires satisfaisant

$$|q| = 1.$$

Ces éléments forment un groupe isomorphe à $SU(2)$,

$$SU(2) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$$

Cette relation joue un rôle central dans de nombreux domaines de la physique mathématique, car $SU(2)$ est le double revêtement du groupe des rotations $SO(3)$ et apparaît naturellement dans la description du spin et de certaines symétries internes.

Dans le cadre géométrique considéré ici, l'algèbre des quaternions fournit la fibre interne associée à chaque point de la variété d'espace-temps. Les directions imaginaires (i, j, k) peuvent alors être interprétées comme des directions internes attachées à l'espace-temps, tandis que le sous-groupe des quaternions unitaires décrit des transformations rotationnelles internes.

Cette interprétation motive l'introduction d'une structure de fibré quaternionique

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne la variété d'espace-temps observable et \mathbb{H} la fibre hypercomplexe interne.

Dans un tel cadre, la structure quaternionique interne peut influencer la géométrie effective de l'espace-temps par l'intermédiaire d'une connexion généralisée définie sur le fibré total.

3 STRUCTURE FIBRÉE HYPERCOMPLEXE

L'algèbre quaternionique introduite dans la section précédente suggère naturellement une interprétation géométrique en termes de structure fibrée. Dans ce cadre, l'espace-temps est décrit par une variété de base M_4 , tandis que chaque point de cette variété est muni d'une structure interne hypercomplexe représentée par une fibre quaternionique.

L'espace géométrique total est donc décrit par un fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H},$$

où M_4 désigne la variété d'espace-temps observable et \mathbb{H} la fibre hypercomplexe interne.

Un point de l'espace total peut ainsi être représenté par

$$(x^\mu, q),$$

où x^μ sont les coordonnées d'espace-temps et $q \in \mathbb{H}$ est un quaternion décrivant la configuration interne.

Dans ce cadre, l'espace-temps observable correspond à la projection

$$\Pi_{\text{obs}} : (x^\mu, q) \rightarrow x^\mu.$$

La structure hypercomplexe interne n'est donc pas directement observable, mais elle peut influencer la géométrie effective de l'espace-temps par l'intermédiaire de la connexion définie sur le fibré total.

Afin de décrire le transport parallèle dans l'espace total, nous introduisons une connexion généralisée

$$\mathcal{D}_\mu.$$

Cette connexion contient plusieurs contributions géométriques associées aux différentes structures de symétrie présentes dans la théorie. Dans la construction minimale considérée ici, elle peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu.$$

Le premier terme ω_μ correspond à la connexion de spin relativiste associée à la symétrie de Lorentz locale $Spin(1, 3)$.

Le champ W_μ représente une contribution conforme de type Weyl associée aux transformations locales d'échelle.

Enfin, A_μ désigne la connexion interne quaternionique agissant sur la fibre hypercomplexe. Ses composantes peuvent s'écrire

$$A_\mu = A_\mu^I T_I,$$

où T_I sont les générateurs associés aux directions imaginaires quaternioniques (i, j, k) .

La connexion \mathcal{D}_μ décrit ainsi le transport parallèle sur le fibré hypercomplexe total, combinant la structure géométrique de l'espace-temps et les degrés de liberté internes.

Dans la section suivante, nous montrons comment la connexion affine effective de l'espace-temps peut être obtenue à partir de cette connexion étendue par projection sur la variété observable.

4 PROJECTION VERS LA CONNEXION AFFINE OBSERVABLE

La connexion définie sur le fibré introduite dans la section précédente agit sur l'espace hypercomplexe total $E = M_4 \times \mathbb{H}$. Afin de retrouver une géométrie effective d'espace-temps, il est nécessaire de préciser comment cette connexion étendue se projette sur la variété observable M_4 .

L'hypothèse centrale explorée dans ce travail est que la structure affine perçue dans l'espace-temps n'est pas purement primitive, mais peut être interprétée comme la projection d'une connexion plus riche définie sur le fibré hypercomplexe total. Dans cette perspective, la géométrie observable de l'espace-temps apparaît comme un secteur effectif d'une structure géométrique plus vaste.

Nous postulons ainsi que la connexion affine effective de l'espace-temps prend la forme

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H),$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(g)$ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique observable $g_{\mu\nu}$, $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W)$ représente une correction de type Weyl, et $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$ correspond à la contribution induite par le secteur interne hypercomplexe.

La correction hypercomplexe est supposée provenir de la connexion définie sur la fibre quaternionique à travers un mécanisme local de projection base-fibre. Au niveau minimal, nous introduisons l'ansatz suivant :

$$\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right),$$

où A_μ^I sont les composantes de la connexion quaternionique, $\Sigma_{\nu I}^\rho$ est un tenseur décrivant la projection locale des directions quaternioniques internes vers l'espace-temps, et λ est une constante de couplage géométrique.

Cette expression doit être comprise comme un ansatz effectif minimal. Son objectif n'est pas de fournir une théorie fondamentale complète, mais de capturer la possibilité que la structure interne hypercomplexe modifie directement la géométrie affine, et pas uniquement via une contribution au tenseur énergie-impulsion.

D'un point de vue géométrique, cette construction peut être interprétée comme la projection sur l'espace-temps d'une connexion définie sur le fibré total $M_4 \times \mathbb{H}$. Le tenseur $\Sigma_{\nu I}^\rho$ joue alors le rôle d'un objet de soudure local reliant la fibre quaternionique interne au fibré tangent de l'espace-temps.

Une fois la connexion affine effective modifiée, l'équation des géodésiques devient

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Cela implique que la structure hypercomplexe interne peut influencer le mouvement des particules tests même dans des régions où la matière ordinaire est peu présente. Dans ce sens, le secteur quaternionique contribue non seulement au contenu effectif en énergie-impulsion, mais également à la définition même du transport parallèle dans l'espace-temps.

Un tel mécanisme est particulièrement intéressant dans des situations où le champ gravitationnel observé semble plus important que ce que la matière visible seule permettrait d'expliquer. Dans ces régimes, la modification hypercomplexe de la structure affine pourrait fournir une contribution géométrique effective à la dynamique observée.

Le cadre présenté ici reste volontairement minimal. Une formulation plus complète nécessiterait de dériver le tenseur de projection $\Sigma_{\nu I}^\rho$ à partir d'une géométrie de fibré pleinement spécifiée

et de clarifier sa relation avec les tétrades, des triades internes, ou plus généralement avec des structures de soudure de type Cartan.

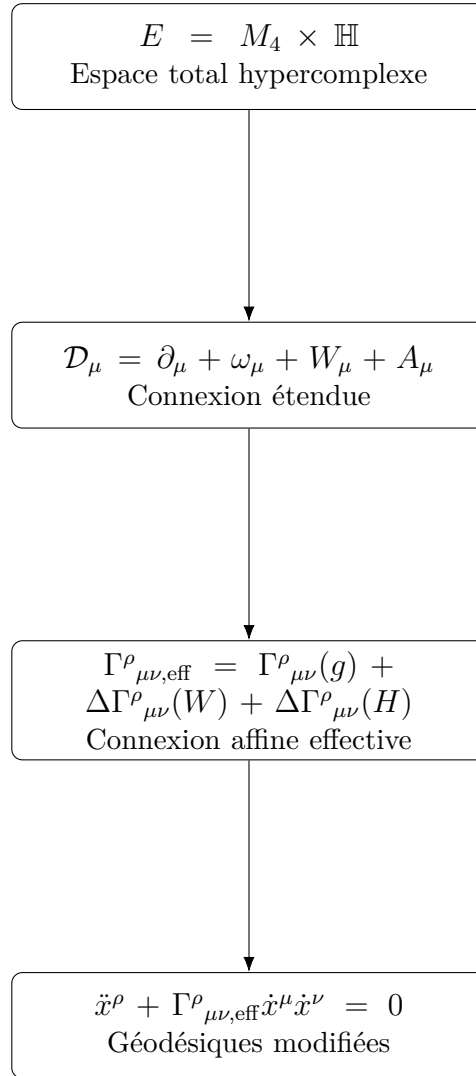


FIGURE 4.1. Chaîne conceptuelle de la relativité générale hypercomplexe. La géométrie observable est obtenue comme projection de la structure définie sur le fibré hypercomplexe $E = M_4 \times \mathbb{H}$.

5 GÉODÉSQUES ET IMPLICATIONS PHYSIQUES

La modification de la connexion affine discutée dans la section précédente affecte directement la structure géodésique de l'espace-temps. Puisque le mouvement des particules en chute libre est gouverné par la connexion affine, toute correction apportée à celle-ci peut conduire à des effets observables.

En utilisant la connexion effective introduite précédemment, l'équation des géodésiques prend la forme

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu, \text{eff}} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

En substituant la décomposition

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu, \text{eff}} = \Gamma^\rho_{\mu\nu}(g) + \Delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}(W) + \Delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}(H),$$

on obtient

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}(g)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \Delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}(W)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \Delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}(H)\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0.$$

Le premier terme correspond au mouvement géodésique habituel en relativité générale. Les termes supplémentaires représentent les déviations induites par les secteurs Weyl et hypercomplexe.

La contribution hypercomplexe

$$\Delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma^\rho_{\nu I} + A_\nu^I \Sigma^\rho_{\mu I} \right)$$

introduit dans l'équation des géodésiques un terme analogue à une force effective, dont l'intensité dépend de la connexion quaternionique interne A_μ^I et du tenseur de projection $\Sigma^\rho_{\nu I}$.

Du point de vue physique, ce terme peut modifier les trajectoires des particules même dans des régions où le tenseur énergie-impulsion ordinaire est faible. Autrement dit, la structure interne hypercomplexe peut contribuer directement à la dynamique gravitationnelle effective.

Un tel mécanisme pourrait potentiellement générer des effets gravitationnels supplémentaires sans nécessiter une grande quantité de matière visible. Dans cette perspective, la modification hypercomplexe de la structure affine peut agir comme une contribution géométrique additionnelle au champ gravitationnel observé.

Il est important de souligner que le cadre présenté ici demeure exploratoire. L'ansatz introduit doit être considéré comme une description effective minimale permettant de capturer la possibilité que des degrés de liberté quaternioniques internes influencent la connexion d'espace-temps.

Un traitement plus complet nécessiterait de dériver le tenseur de projection interne et la dynamique de la connexion quaternionique à partir d'une action géométrique définie sur le fibré hypercomplexe complet.

5.1 Motivation pour une structure interne quaternionique. Le choix d'une fibre interne quaternionique est fortement motivé par la structure algébrique sous-jacente aux rotations tridimensionnelles et à leurs extensions spinorielles.

Le groupe des rotations spatiales est décrit par le groupe de Lie $SO(3)$, dont l'algèbre de Lie est engendrée par trois générateurs J_i satisfaisant

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^{k} J_k.$$

Cependant, le groupe de symétrie agissant correctement sur les degrés de liberté spinoriels n'est pas directement $SO(3)$, mais son groupe de revêtement double $Spin(3)$, qui est isomorphe à $SU(2)$,

$$Spin(3) \simeq SU(2).$$

Une observation importante est que le groupe des quaternions unitaires forme lui aussi un groupe isomorphe à $SU(2)$,

$$SU(2) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$$

Les unités imaginaires quaternioniques

$$(i, j, k)$$

fournissent ainsi une base naturelle de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, qui gouverne la structure infinitésimale des rotations tridimensionnelles et leur relèvement spinoriel.

Du point de vue géométrique, le sous-espace imaginaire de l'algèbre quaternionique

$$\text{Im}(\mathbb{H}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(i, j, k)$$

constitue un espace vectoriel interne tridimensionnel naturellement associé aux générateurs des rotations.

Ces observations motivent l'utilisation de l'algèbre des quaternions \mathbb{H} comme structure géométrique interne attachée à chaque point de l'espace-temps. Dans ce cadre, les directions imaginaires quaternioniques peuvent être interprétées comme des degrés de liberté rotationnels internes, tandis que le sous-groupe des quaternions unitaires reproduit la symétrie spinorielle $SU(2)$.

Cela fournit ainsi un fondement algébrique naturel pour l'introduction d'une structure fibrée quaternionique dans certaines extensions géométriques de l'espace-temps.

6 STRUCTURE ALGÈBRIQUE ÉTENDUE : $Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}$

L'introduction d'une fibre interne quaternionique peut être motivée non seulement par la structure des rotations tridimensionnelles et du groupe $SU(2)$, mais également par la forme algébrique même du secteur spinoriel relativiste.

En relativité locale, la structure algébrique naturelle associée à l'espace-temps de Minkowski est l'algèbre de Clifford $Cl(1, 3)$, engendrée par des éléments γ_μ satisfaisant

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}.$$

Cette algèbre encode la structure métrique locale, les générateurs du groupe de Lorentz, ainsi que la description des champs spinoriels relativistes.

D'un autre côté, comme discuté précédemment, l'algèbre des quaternions \mathbb{H} fournit une réalisation naturelle des degrés de liberté rotationnels internes, à travers l'identification du sous-espace imaginaire $\text{Im}(\mathbb{H})$ avec une structure de type $\mathfrak{su}(2)$.

Ces deux structures suggèrent d'introduire une algèbre étendue de la forme

$$\mathcal{A}_{\text{ext}} = Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

dans laquelle la partie de Clifford décrit le secteur relativiste observable, tandis que le facteur quaternionique décrit une structure interne hypercomplexe attachée à chaque point de l'espace-temps.

Un élément générique de cette algèbre étendue peut alors s'écrire schématiquement comme

$$X = a \mathbf{1} + b^\mu \gamma_\mu + \frac{1}{2} c^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + d^I T_I + e^{\mu I} \gamma_\mu \otimes T_I + \dots,$$

où T_I désignent les générateurs associés aux directions imaginaires quaternioniques (i, j, k) .

Cette écriture montre que l'algèbre étendue contient à la fois :

- la structure vectorielle et spinorielle relativiste,
- les générateurs internes de type quaternionique,
- ainsi que des secteurs mixtes couplant structure d'espace-temps et directions internes.

D'un point de vue conceptuel, cela suggère que la géométrie observable pourrait correspondre à une projection effective d'une structure algébrique plus riche, dans laquelle les degrés de liberté d'espace-temps et les degrés de liberté internes ne sont pas strictement séparés au niveau fondamental.

Dans cette perspective, la connexion totale introduite précédemment,

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu,$$

peut être vue comme une connexion prenant ses valeurs dans une algèbre étendue compatible avec cette structure $Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H}$. Le secteur ω_μ agit alors sur la composante relativiste spinorielle, tandis que A_μ agit sur la composante interne quaternionique. Les éventuels termes mixtes peuvent, dans une formulation plus complète, être responsables du mécanisme de projection reliant la fibre hypercomplexe à la connexion affine effective de l'espace-temps.

Une telle structure ne constitue pas encore une théorie fermée. Elle fournit cependant un cadre algébrique naturel dans lequel la géométrie hypercomplexe explorée dans ce travail peut être formulée de manière cohérente. Dans ce cadre, la partie observable réelle ou complexe de la géométrie peut être interprétée comme un secteur effectif issu d'une structure plus fondamentale de type hypercomplexe.

Cette observation renforce l'idée que l'extension quaternionique n'est pas un ajout arbitraire à la géométrie relativiste, mais peut au contraire s'inscrire dans une structure algébrique unifiée associant spin, géométrie locale et degrés de liberté internes.

7 ACTION GÉOMÉTRIQUE MINIMALE

Afin de donner une base dynamique à la structure géométrique introduite précédemment, il est naturel de se demander si la connexion étendue

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu$$

peut être associée à une action géométrique effective.

Dans la relativité générale standard, la dynamique de la géométrie est gouvernée par l'action d'Einstein–Hilbert

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R,$$

où R est le scalaire de courbure construit à partir de la connexion de Levi–Civita.

Dans le cadre hypercomplexe considéré ici, la connexion totale contient également une contribution interne quaternionique A_μ ainsi qu'un secteur conforme de type Weyl W_μ . Il est donc naturel d'introduire une action effective de la forme

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \alpha F_{\mu\nu}^I F_I^{\mu\nu} + \beta W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \right),$$

où :

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + \epsilon^{IJK} A_\mu^J A_\nu^K$$

est la courbure associée à la connexion quaternionique interne, tandis que

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$$

représente le champ de courbure associé au secteur conforme.

Les constantes α et β sont des paramètres de couplage déterminant l'intensité relative des contributions hypercomplexes et conformes.

Dans ce cadre, la dynamique du système résulte de la variation de l'action totale par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$, au champ quaternionique A_μ^I et au champ conforme W_μ .

L'action proposée doit être comprise comme une description effective minimale compatible avec la structure géométrique introduite dans les sections précédentes. Une formulation plus complète pourrait nécessiter l'introduction de termes supplémentaires reliant explicitement la connexion interne quaternionique à la structure affine effective de l'espace-temps.

8 DISCUSSION

Le cadre présenté dans ce travail explore la possibilité que la structure affine observée de l'espace-temps soit la projection effective d'une géométrie plus riche définie sur un fibré hypercomplexe.

Dans cette approche, chaque point de l'espace-temps est associé à une fibre interne quaternionique \mathbb{H} , et la connexion totale contient à la fois les contributions relativistes habituelles, une composante conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne quaternionique.

La projection de cette structure sur l'espace-temps observable conduit à une modification effective de la connexion affine, introduisant un terme supplémentaire dépendant de la connexion interne. Cette correction peut modifier les trajectoires géodésiques et la dynamique gravitationnelle effective.

Il est important de souligner que la construction présentée ici doit être considérée comme un cadre géométrique minimal. Le tenseur de projection $\Sigma^\rho_{\nu I}$ introduit dans l'ansatz affine n'a pas été dérivé à partir d'une géométrie de fibré complète, mais représente une paramétrisation effective du couplage entre les directions internes quaternioniques et la structure tangentielle de l'espace-temps.

Plusieurs directions de développement peuvent être envisagées.

Tout d'abord, une description plus fondamentale de la géométrie du fibré hypercomplexe permettrait de dériver explicitement le tenseur de projection ainsi que les relations de compatibilité entre la connexion interne et la géométrie d'espace-temps.

Ensuite, l'action géométrique minimale proposée pourrait être étendue afin d'inclure des termes de couplage direct entre les secteurs quaternionique et gravitationnel. Une telle extension pourrait conduire à des équations de champ modifiées et à de nouvelles solutions gravitationnelles.

Enfin, il serait intéressant d'explorer les conséquences phénoménologiques de cette structure, en particulier dans des régimes où la gravitation effective semble plus forte que ce que la matière visible permet d'expliquer. Dans de tels cas, la contribution géométrique issue de la structure hypercomplexe pourrait jouer un rôle analogue à celui d'une composante gravitationnelle effective supplémentaire.

9 CONCLUSION

Dans cet article, nous avons exploré une extension géométrique de la relativité générale fondée sur l'introduction d'une structure interne hypercomplexe associée à chaque point de l'espace-temps.

Cette construction repose sur l'idée que la géométrie observable pourrait être interprétée comme la projection d'une structure définie sur un espace fibré de la forme

$$E = M_4 \times \mathbb{H}.$$

Dans ce cadre, la connexion totale combine la connexion de spin relativiste, une contribution conforme de type Weyl, ainsi qu'une connexion interne quaternionique. La projection de cette connexion sur l'espace-temps conduit à une connexion affine effective modifiée, susceptible d'influencer directement les trajectoires géodésiques.

Nous avons montré qu'un ansatz minimal permet de relier la connexion interne quaternionique à la connexion affine effective, introduisant ainsi une contribution géométrique supplémentaire à la dynamique gravitationnelle.

La structure algébrique sous-jacente suggère également l'existence d'un cadre plus général basé sur l'algèbre étendue

$$Cl(1, 3) \otimes \mathbb{H},$$

dans laquelle la géométrie relativiste locale et la structure quaternionique interne coexistent au niveau fondamental.

Bien que le modèle présenté reste exploratoire, il met en évidence la cohérence géométrique d'une extension hypercomplexe de la gravitation et ouvre plusieurs directions de recherche concernant la dynamique des connexions internes, la structure complète du fibré hypercomplexe, et les conséquences physiques d'une telle géométrie.

Ces résultats suggèrent que les structures hypercomplexes pourraient fournir un cadre naturel pour étendre la description géométrique de la gravitation au-delà du formalisme classique de la relativité générale.

Annexe — Champ répulsif effectif et réduction FLRW minimale dans le cadre RGH

Laurent Besson (idée originale)
Rédaction annexe : ChatGPT

Version de travail — 20 avril 2026

Objet de l'annexe

Le but de cette annexe est de fixer une formulation minimale, cohérente et exploitable du *champ répulsif effectif* dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), puis d'en donner la réduction cosmologique homogène et isotrope. L'idée centrale est de ne *pas* introduire un champ fantôme fondamental ni une “masse négative” au sens naïf, mais de représenter la répulsion gravitationnelle comme un *effet géométrique effectif*, activé dans certains régimes de courbure, et porté par les secteurs déjà présents dans la théorie :

- le secteur de Weyl ϕ_μ ,
- la connexion interne hypercomplexe A_μ ,
- le secteur symplectique mixte Ω_{mix} ,
- les termes croisés issus du couplage base-fibre.

1 Définition covariante du secteur répulsif effectif

On définit le tenseur répulsif effectif activé par

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}} := \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_\star^{\text{eff}}}\right) \Theta_{\mu\nu}, \quad (1)$$

où :

- W désigne un invariant de courbure servant de variable d'activation ;
- W_\star^{eff} est le seuil effectif d'activation ;
- $\mathcal{A}(z)$ est une fonction lisse telle que $0 \leq \mathcal{A}(z) \leq 1$, avec $\mathcal{A}(z) \rightarrow 0$ sous le seuil et $\mathcal{A}(z) \rightarrow 1$ au-dessus ;
- $\Theta_{\mu\nu}$ regroupe les contributions des secteurs internes et géométriques.

L'équation gravitationnelle effective minimale est alors

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} + \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}. \quad (2)$$

Une écriture plus explicite du seuil est

$$W_\star^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle, \quad (3)$$

où \hat{X} est l'observable interne quantifiée construite à partir des invariants du secteur hypercomplexe.

Critère covariant de régime répulsif

Pour un observateur de quadrivitesse u^μ , on introduit le scalaire

$$\Xi_{\text{rep}}(u) := - \left(\Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Theta^{\text{rep}} \right) u^\mu u^\nu, \quad \Theta^{\text{rep}} := g^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}. \quad (4)$$

Le régime répulsif effectif correspond à

$$\Xi_{\text{rep}}(u) > 0. \quad (5)$$

Autrement dit, la correction géométrique agit contre la tendance habituelle au *focusing* des congruences.

2 Décomposition minimale de $\Theta_{\mu\nu}$

La fermeture minimale la plus naturelle est

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} + \Theta_{\mu\nu}^{(A)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} + \Theta_{\mu\nu}^{(\text{cross})}. \quad (6)$$

2.1 Bloc de Weyl

On part du terme de type Maxwell

$$S_\phi = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^{(\phi)} F^{(\phi)\mu\nu} \sqrt{-g} \, d^4x, \quad F_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu. \quad (7)$$

La variation métrique donne

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} = F_{\mu\alpha}^{(\phi)} F^{(\phi)\alpha}{}_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^{(\phi)} F^{(\phi)\alpha\beta}. \quad (8)$$

2.2 Bloc interne hypercomplexe

Le secteur interne est pris sous forme Yang–Mills :

$$S_A = -\frac{1}{4} \int \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \sqrt{-g} \, d^4x, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (9)$$

La variation métrique fournit

$$\Theta_{\mu\nu}^{(A)} = \text{Tr}(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr}(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (10)$$

2.3 Bloc symplectique mixte

Pour le secteur dynamique de Ω , on considère le terme

$$S_{\Omega, \text{dyn}} = \frac{\kappa_\Omega}{2} \int d\Omega \wedge \star d\Omega. \quad (11)$$

On projette la partie mixte observable sous la forme d'une 2-forme

$$B_{\mu\nu} := \Pi_{\text{obs}}(\Omega_{\text{mix}})_{\mu\nu}, \quad H_{\mu\nu\rho} := 3\nabla_{[\mu} B_{\nu\rho]}. \quad (12)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion minimal associé est alors

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} = \frac{1}{2} H_{\mu\alpha\beta} H_\nu{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{12} g_{\mu\nu} H_{\alpha\beta\gamma} H^{\alpha\beta\gamma}. \quad (13)$$

2.4 Bloc croisé

Les termes croisés, issus des couplages gravité–Weyl–hypercomplexe–symplectique, sont définis par

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\text{cross})} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{coup}}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (14)$$

où S_{coup} désigne le terme de couplage total.

En résumé, on obtient la formule compacte

$$\boxed{\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} + \Theta_{\mu\nu}^{(A)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} + \Theta_{\mu\nu}^{(\text{cross})}.} \quad (15)$$

3 Réduction FLRW minimale

On adopte l’ansatz homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad H := \frac{\dot{a}}{a}, \quad (16)$$

avec

$$\phi = \phi_0(t) dt, \quad A_i^a(t) = \psi(t) \delta_i^a, \quad A_0^a = 0, \quad (17)$$

et

$$\Omega_{\text{ext}} = 0, \quad \Omega_{\text{int}} = \varpi(t) \sum_a \sigma_a, \quad \Omega_{\text{mix}} = \chi(t) \sum_i e^i \wedge \sigma_i. \quad (18)$$

3.1 Contribution du bloc de Weyl

Avec $\phi = \phi_0(t) dt$, on a

$$F^{(\phi)} = d(\phi_0(t) dt) = \dot{\phi}_0 dt \wedge dt = 0. \quad (19)$$

Par conséquent,

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\phi)}|_{\text{FLRW}} = 0. \quad (20)$$

Le bloc de Weyl cinétique ne contribue donc pas directement au fond FLRW strict.

3.2 Contribution du bloc interne hypercomplexe

Sous l’ansatz isotrope triadique, le secteur Yang–Mills interne se comporte comme un fluide radiatif effectif :

$$\rho_A(a) = \frac{C_A}{\lambda^2} \frac{Q_A^2}{a^4}, \quad p_A(a) = \frac{1}{3} \rho_A(a). \quad (21)$$

Le coefficient associé est

$$\beta_A = \frac{C_A}{\lambda^2} Q_A^2. \quad (22)$$

3.3 Contribution du bloc symplectique mixte

Pour la partie mixte, on obtient également une loi de type radiatif :

$$\rho_\Omega(a) = \frac{C_\Omega}{\kappa} \frac{Q_\Omega^2}{a^4}, \quad p_\Omega(a) = \frac{1}{3} \rho_\Omega(a), \quad (23)$$

avec

$$\beta_\Omega = \frac{C_\Omega}{\kappa} Q_\Omega^2. \quad (24)$$

3.4 Contribution des termes croisés

À ce stade minimal, on absorbe les couplages cosmologiques additionnels dans un coefficient effectif

$$\beta_{\text{cross}}, \quad (25)$$

si bien que

$$\beta = \beta_A + \beta_\Omega + \beta_{\text{cross}}. \quad (26)$$

4 Identification des termes α/a^2 et β/a^4

Dans la version minimale actuellement retenue, on identifie :

$$\alpha = \alpha_\theta = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2, \quad (27)$$

où α_W est le paramètre tardif du secteur θ .

La densité effective totale prend alors la forme

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (28)$$

La pression effective associée est

$$p_{\text{eff}}(a) = -\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}. \quad (29)$$

L'équation d'état effective vaut

$$w_{\text{eff}}(a) = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -\frac{\alpha a^2 + \beta}{3(\alpha a^2 - \beta)}. \quad (30)$$

5 Équations cosmologiques effectives et condition de rebond

L'équation de Friedmann modifiée s'écrit

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_{\text{mat}} + \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \right). \quad (31)$$

Dans le cas plat $k = 0$ et en négligeant la matière ordinaire au voisinage du rebond, on obtient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \right) = \frac{8\pi G}{3a^4} (\alpha a^2 - \beta). \quad (32)$$

La condition $H^2 \geq 0$ impose

$$a^2 \geq \frac{\beta}{\alpha}, \quad (33)$$

et le minimum est atteint pour

$$a_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (34)$$

Le rebond cosmologique correspond alors aux conditions

$$H(t_b) = 0, \quad \dot{H}(t_b) > 0, \quad a(t_b) = a_{\text{min}} > 0. \quad (35)$$

Près du rebond, la condition d'accélération est satisfaite car

$$w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}. \quad (36)$$

6 Version activée par seuil

En incorporant le mécanisme d'activation par courbure, on définit la densité répulsive activée :

$$\rho_{\text{rep}}(a) = \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_{\star}^{\text{eff}}}\right) \left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}\right), \quad (37)$$

et la pression activée :

$$p_{\text{rep}}(a) = \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_{\star}^{\text{eff}}}\right) \left(-\frac{\alpha}{3a^2} - \frac{\beta}{3a^4}\right). \quad (38)$$

L'équation gravitationnelle activée devient alors

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} + \mathcal{A}\left(\frac{W}{W_{\star}^{\text{eff}}}\right) \left(\Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} + \Theta_{\mu\nu}^{(A)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} + \Theta_{\mu\nu}^{(\text{cross})}\right). \quad (39)$$

7 Proposition synthétique

On peut résumer la structure minimale de la manière suivante :

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} + \mathcal{A}\left(\frac{W}{\kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle}\right) \left[\Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} + \Theta_{\mu\nu}^{(A)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} + \Theta_{\mu\nu}^{(\text{cross})}\right]}. \quad (40)$$

Au niveau FLRW minimal, cette structure se réduit à

$$\boxed{\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad \alpha = \frac{3}{8\pi G} \alpha_W H_0^2, \quad \beta = \beta_A + \beta_{\Omega} + \beta_{\text{cross}}}. \quad (41)$$

Conclusion

La formulation minimale précédente permet de donner un statut mathématique propre au *champ répulsif effectif* dans la RGH :

- il ne s'agit pas d'un champ fantôme fondamental ;
- il s'agit d'une *source géométrique activée* ;
- le terme en a^{-2} est porté par le secteur tardif θ ;
- le terme en a^{-4} provient du secteur interne hypercomplexe, du secteur symplectique mixte, et des éventuels couplages absorbés dans β ;
- la répulsion s'interprète comme un effet *anti-focalisant* effectif, compatible avec un rebond cosmologique contrôlé.

Annexe — Condition minimale d'un terme répulsif local pour l'annulation du poids dans le cadre RGH

Laurent Besson (idée originale)
Rédaction annexe : ChatGPT

Version de travail — 20 avril 2026

Objet de l'annexe

Le but de cette annexe est d'examiner, dans l'esprit de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), les conditions minimales nécessaires à l'apparition d'un *terme répulsif local* capable d'annuler le poids d'une masse test m placée au-dessus d'une masse source M .

L'objectif n'est pas ici de proposer un dispositif expérimental réaliste, mais de fixer une architecture théorique minimale pour une *anti-pesanteur locale* comprise comme une correction géométrique activée, anisotrope et spatialement confinée.

1 Formulation du problème local

On considère une masse source M et une masse test m placée à une altitude fixe r_0 au-dessus de M . Dans la limite non relativiste, l'accélération gravitationnelle standard est

$$\mathbf{a}_M(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Pour annuler localement le poids de m au point r_0 , il faut introduire une contribution répulsive locale telle que

$$\mathbf{a}_{\text{eff}}(r_0) = \mathbf{a}_M(r_0) + \mathbf{a}_{\text{rep}}(r_0) = 0. \quad (2)$$

La condition minimale est donc

$$\boxed{\mathbf{a}_{\text{rep}}(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2} \hat{\mathbf{r}}.} \quad (3)$$

2 Traduction géométrique en termes de connexion effective

Dans l'approximation de champ faible et pour une particule lente, l'accélération spatiale est reliée à la connexion effective par

$$a^i \simeq -c^2 \Gamma_{00,\text{eff}}^i. \quad (4)$$

On introduit alors une connexion effective de la forme

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H), \quad (5)$$

où $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$ représente la correction induite par le secteur hypercomplexe.

La condition d'annulation locale du poids devient alors

$$\boxed{-c^2 \Delta \Gamma_{00}^r(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2}.} \quad (6)$$

Autrement dit, le secteur hypercomplexe doit corriger localement le transport de sorte à produire une accélération radiale opposée à celle du champ de la masse source.

3 Ansatz affine hypercomplexe minimal

Dans l'esprit de l'extension affine forte de la RGH, on peut prendre comme modèle minimal

$$\Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right), \quad (7)$$

où :

- A_μ^I est une connexion interne hypercomplexe ;
- $\Sigma_{\nu I}^\rho$ est un tenseur de projection base-fibre ;
- λ est un couplage géométrique effectif.

Dans ce cas, la condition de compensation locale s'écrit

$$\boxed{-c^2 \frac{\lambda}{2} \left(A_0^I \Sigma_{0I}^r + A_0^I \Sigma_{0I}^r \right)_{r=r_0} = +\frac{GM}{r_0^2}.} \quad (8)$$

En simplifiant,

$$\boxed{-c^2 \lambda \left(A_0^I \Sigma_{0I}^r \right)_{r=r_0} = +\frac{GM}{r_0^2}.} \quad (9)$$

4 Nécessité d'une activation locale et d'un domaine spatial

Un terme répulsif utile pour une anti-pesanteur locale ne peut pas être seulement cosmologique. Il faut qu'il soit *activé localement* dans une région spatiale D .

On introduit donc une fonction de domaine

$$\mathcal{A}_D(x) \in [0, 1], \quad (10)$$

valant approximativement 1 dans la zone d'annulation du poids et 0 à l'extérieur.

Une forme lisse possible est

$$\mathcal{A}_D(x) = \exp\left(-\frac{d(x, D)^2}{L^2}\right), \quad (11)$$

où L fixe l'épaisseur caractéristique du domaine.

La connexion effective locale devient alors

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \mathcal{A}_D(x) \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H). \quad (12)$$

La condition locale au centre x_0 du domaine est

$$\boxed{-c^2 \mathcal{A}_D(x_0) \Delta \Gamma_{00}^r(x_0) = +\frac{GM}{r_0^2}.} \quad (13)$$

5 Nécessité d'une anisotropie directionnelle

Une simple correction scalaire isotrope est insuffisante pour annuler le poids dans une direction donnée. Pour compenser le champ gravitationnel de M au-dessus de la source, il faut une structure capable de sélectionner la direction radiale $\hat{\mathbf{r}}$.

Le terme répulsif local doit donc être au moins :

- soit vectoriel,
- soit affine anisotrope,
- soit tensoriel mixte base-fibre.

Dans l'ansatz (7), cette anisotropie est portée par la projection $\Sigma_{\nu I}^\rho$ et par l'orientation interne du secteur A_μ^I .

6 Condition de stabilité locale

Annuler le poids en un point ne suffit pas pour obtenir une lévitation statique utile. Il faut en plus que la configuration soit stable vis-à-vis des petites perturbations radiales.

Si l'on note $a_{\text{eff}}(r)$ l'accélération radiale effective, les conditions minimales sont

$$a_{\text{eff}}(r_0) = 0, \quad (14)$$

et

$$\left. \frac{da_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_0} < 0. \quad (15)$$

La seconde condition garantit qu'une petite déviation au voisinage de r_0 ne transforme pas l'équilibre en instabilité explosive.

7 Modèle jouet radial minimal

Une écriture effective minimale de l'accélération est

$$\mathbf{a}_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{A}_D(r) a_H(r) \hat{\mathbf{r}}. \quad (16)$$

La condition de compensation à l'altitude cible r_0 est

$$\boxed{a_H(r_0) = \frac{GM}{r_0^2}}. \quad (17)$$

Une forme simple pour le profil répulsif local est

$$a_H(r) = a_0 f(r), \quad (18)$$

où $f(r)$ est centrée sur r_0 et décroît rapidement hors du domaine.

Par exemple,

$$f(r) = \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{\ell^2}\right), \quad (19)$$

avec la condition d'ajustement

$$a_0 = \frac{GM}{r_0^2} \quad (20)$$

si $f(r_0) = 1$.

8 Écriture tensorielle effective

Au niveau de l'équation de champ, l'idée peut être résumée par

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} + \mathcal{A}_D(x) \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}(x). \quad (21)$$

Mais si l'on veut une compensation locale orientée du poids, le tenseur $\Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}$ ne doit pas être assimilé à un fluide isotrope ordinaire. Il doit contenir des composantes anisotropes capables de corriger localement la composante Γ_{00}^r de la connexion effective.

Autrement dit, le bon langage physique n'est plus seulement celui d'une "densité répulsive", mais celui d'un *domaine géométrique anisotrope activé*.

Conclusion

Dans le cadre de la RGH, l'apparition d'une anti-pesanteur locale statique au-dessus d'une masse source exigerait au minimum :

- une correction affine locale du type $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$;
- une activation spatiale confinée dans un domaine D ;
- une anisotropie directionnelle capable de sélectionner l'axe radial ;
- une condition de compensation exacte,

$$-c^2 \Delta\Gamma_{00}^r(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2},$$

ou, avec domaine activé,

$$-c^2 \mathcal{A}_D(x_0) \Delta\Gamma_{00}^r(x_0) = +\frac{GM}{r_0^2};$$

- une condition de stabilité locale sur le profil radial du terme répulsif.

La formulation minimale suggère donc qu'une *annulation locale du poids* ne relèverait pas d'un simple terme cosmologique homogène, mais d'une véritable *bulle géométrique locale, activée et orientée*, produisant une correction affine opposée au champ gravitationnel de la masse source.

Annexe — Production locale statique d'un champ hypercomplexe anti-pesanteur dans le cadre RGH

Laurent Besson (idée originale)
Rédaction annexe : ChatGPT

Version de travail — 20 avril 2026

Objet de l'annexe

Le but de cette annexe est de formuler, dans l'esprit de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH), les conditions minimales nécessaires non plus seulement à l'existence d'un terme répulsif local, mais à la *production locale statique* d'un champ hypercomplexe capable d'annuler le poids d'une masse test.

La difficulté centrale n'est pas d'écrire un terme répulsif dans une équation effective, mais de comprendre :

- ce qui *source* le champ hypercomplexe ;
- ce qui permet de le *confiner localement* ;
- ce qui permet de le rendre *stationnaire* ;
- ce qui lui donne une *orientation radiale* suffisante pour compenser le champ d'une masse source M .

1 Problème local de compensation du poids

On considère une masse source M et une masse test m placée à une altitude fixe r_0 au-dessus de M . Dans la limite non relativiste, l'accélération gravitationnelle standard vaut

$$\mathbf{a}_M(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

L'objectif est d'obtenir une configuration locale telle que

$$\mathbf{a}_{\text{eff}}(r_0) = 0, \quad (2)$$

soit explicitement

$$\boxed{\mathbf{a}_{\text{rep}}(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2} \hat{\mathbf{r}}.} \quad (3)$$

Autrement dit, le champ hypercomplexe produit localement doit générer une accélération radiale opposée à celle du champ gravitationnel de la masse source.

2 Lecture géométrique via la connexion effective

Dans l'approximation de champ faible et pour une particule lente, l'accélération spatiale est reliée à la connexion effective par

$$a^i \simeq -c^2 \Gamma_{00,\text{eff}}^i. \quad (4)$$

On introduit alors une connexion effective de la forme

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H), \quad (5)$$

où $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$ désigne la correction affine induite par le secteur hypercomplexe.

La condition locale de compensation du poids devient alors

$$\boxed{-c^2 \Delta\Gamma_{00}^r(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2}.} \quad (6)$$

Le problème de la production du champ hypercomplexe revient donc à produire une configuration stationnaire capable d'imposer localement une correction affine de cette amplitude.

3 Équations de champ avec sources

Dans la formulation RGH minimale, le secteur interne et le secteur symplectique dynamique peuvent être écrits, au niveau schématique, sous la forme

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad d \star d\Omega = 0, \quad d \star F^{(\phi)} = 0. \quad (7)$$

Pour qu'il y ait *production* d'un champ hypercomplexe local, il faut introduire de véritables sources :

$$\boxed{D_\mu F^{\mu\nu} = J_A^\nu, \quad d \star d\Omega = J_\Omega, \quad d \star F^{(\phi)} = J_\phi.} \quad (8)$$

Ici :

- J_A^ν source la connexion interne hypercomplexe ;
- J_Ω source le secteur symplectique ;
- J_ϕ source éventuellement le secteur de Weyl.

Le point conceptuel central est qu'un champ hypercomplexe manipulable nécessite l'identification d'une *grandeur source* physique ou effective, et non pas seulement d'un degré de liberté géométrique abstrait.

4 Lagrangien minimal de source

Une extension minimale du lagrangien peut être postulée sous la forme

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{src}} = g_A J_I^\mu A_\mu^I + g_\Omega \mathcal{J}^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + g_\phi j^\mu \phi_\mu,} \quad (9)$$

où :

- J_I^μ est un courant interne hypercomplexe ;
- $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ source la projection observable $B_{\mu\nu}$ du secteur mixte ;
- j^μ est un courant couplé au secteur de Weyl ;
- g_A, g_Ω, g_ϕ sont des couplages effectifs.

Cette écriture ne prétend pas identifier immédiatement un matériau ou un dispositif réel, mais elle donne une structure minimale pour modéliser la *production* d'un champ hypercomplexe local.

5 Ansatz affine hypercomplexe minimal

Dans l'esprit de l'extension affine forte de la RGH, on peut poser comme modèle minimal

$$\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right), \quad (10)$$

où :

- A_μ^I est une connexion interne hypercomplexe ;
- $\Sigma_{\nu I}^\rho$ est un tenseur de projection base-fibre ;
- λ est un couplage géométrique effectif.

La condition locale de compensation devient alors

$$\boxed{-c^2 \lambda (A_0^I \Sigma_{0I}^r)_{r=r_0} = + \frac{GM}{r_0^2}.} \quad (11)$$

Cette relation fixe directement l'amplitude locale minimale du produit géométrique $A_0^I \Sigma_{0I}^r$ nécessaire pour annuler le poids.

6 Activation locale et confinement spatial

Un terme anti-pesanteur local utile ne peut pas être homogène à l'échelle cosmologique. Il faut qu'il soit activé dans un domaine spatial fini D .

On introduit donc une fonction d'activation spatiale

$$\mathcal{A}_D(x) \in [0, 1], \quad (12)$$

valant environ 1 dans le domaine actif et 0 à l'extérieur.

Une forme lisse possible est

$$\mathcal{A}_D(x) = \exp\left(-\frac{d(x, D)^2}{L^2}\right), \quad (13)$$

où L fixe l'épaisseur caractéristique du domaine.

La connexion effective locale devient alors

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \mathcal{A}_D(x) \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H). \quad (14)$$

La condition locale au centre x_0 du domaine prend la forme

$$\boxed{-c^2 \mathcal{A}_D(x_0) \Delta \Gamma_{00}^r(x_0) = + \frac{GM}{r_0^2}.} \quad (15)$$

7 Nécessité d'une anisotropie directionnelle

Un champ purement scalaire isotrope ne suffit pas à produire une compensation orientée du poids. Il faut une structure capable de sélectionner la direction radiale $\hat{\mathbf{r}}$.

Le secteur producteur doit donc être au moins :

- soit vectoriel ;
- soit affine anisotrope ;
- soit tensoriel mixte base-fibre.

Dans l'ansatz (10), cette anisotropie est portée par $\Sigma_{\nu I}^\rho$ et par l'orientation interne du secteur A_μ^I .

8 Stationnarité et énergie finie

La production locale statique exige une solution approximativement stationnaire :

$$\partial_t A_\mu^I \approx 0, \quad \partial_t \Omega_{\text{mix}} \approx 0, \quad \partial_t \phi_\mu \approx 0. \quad (16)$$

Elle exige également une énergie totale finie dans le domaine actif :

$$E_{\text{tot}} = \int_D d^3x (\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_\Omega + \mathcal{E}_{\text{coup}}) < \infty. \quad (17)$$

Sans énergie finie, la production d'un champ anti-pesanteur local n'aurait pas de sens physique contrôlé.

9 Condition de stabilité locale

Même si la compensation locale est satisfaite, une configuration utile doit encore être stable. Si l'on note $a_{\text{eff}}(r)$ l'accélération radiale effective, les conditions minimales sont

$$a_{\text{eff}}(r_0) = 0, \quad (18)$$

et

$$\left. \frac{da_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_0} < 0. \quad (19)$$

Cette seconde condition garantit qu'une petite perturbation radiale ne transforme pas la compensation locale en instabilité divergente.

10 Modèle jouet radial minimal

Une écriture effective minimale de l'accélération est

$$\mathbf{a}_{\text{eff}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \mathcal{A}_D(r) a_H(r) \hat{\mathbf{r}}. \quad (20)$$

La condition de compensation à l'altitude cible r_0 est

$$\boxed{a_H(r_0) = \frac{GM}{r_0^2}}. \quad (21)$$

On peut écrire

$$a_H(r) = a_0 f(r), \quad (22)$$

où $f(r)$ est centrée sur r_0 et décroît rapidement hors du domaine.

Par exemple,

$$f(r) = \exp\left(-\frac{(r-r_0)^2}{\ell^2}\right), \quad (23)$$

avec ajustement

$$a_0 = \frac{GM}{r_0^2} \quad (24)$$

si $f(r_0) = 1$.

Ce modèle jouet ne remplace pas une solution complète des équations sourcées, mais il permet de fixer les conditions minimales de compensation, de confinement et de stabilité.

11 Interprétation tensorielle effective

Au niveau de l'équation de champ, l'idée peut être résumée par

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{(m)} + \mathcal{A}_D(x) \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}(x). \quad (25)$$

Cependant, si l'on veut une compensation locale orientée du poids, le tenseur $\Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}$ ne doit pas être assimilé à un fluide isotrope ordinaire. Il doit contenir des composantes anisotropes capables de corriger localement la composante Γ_{00}^r de la connexion effective.

Le bon langage physique n'est donc plus seulement celui d'une densité répulsive, mais celui d'un *domaine géométrique anisotrope activé*.

Conclusion

Dans le cadre de la RGH, la production locale statique d'un champ hypercomplexe anti-pesanteur exigerait au minimum :

- l'introduction de véritables sources J_A^ν , J_Ω , J_ϕ dans les équations de champ ;
- un lagrangien de source du type

$$\mathcal{L}_{\text{src}} = g_A J_I^\mu A_\mu^I + g_\Omega \mathcal{J}^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + g_\phi j^\mu \phi_\mu;$$

- une correction affine locale de type $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$;
- une activation spatiale confinée dans un domaine D ;
- une anisotropie directionnelle capable de sélectionner l'axe radial ;
- une stationnarité approximative des champs produits ;
- une énergie totale finie ;
- une condition de compensation locale,

$$-c^2 \mathcal{A}_D(x_0) \Delta\Gamma_{00}^r(x_0) = +\frac{GM}{r_0^2};$$

- une condition de stabilité sur le profil radial du terme répulsif.

La difficulté centrale n'est donc pas seulement l'existence mathématique d'un terme répulsif local, mais bien la *production physique* d'une bulle géométrique locale, activée, orientée, stationnaire et énergétiquement contrôlée.

C'est précisément à ce niveau qu'apparaît la véritable difficulté conceptuelle de l'anti-pesanteur locale hypercomplexe.

Interaction entre deux champs hypercomplexes dans un cadre de relativité générale hypercomplexe

Note autonome de travail

22 avril 2026

Résumé

On construit un modèle minimal et autonome décrivant l'interaction entre deux champs hypercomplexes internes dans un cadre de type connexion–courbure. L'idée centrale est qu'un champ hypercomplexe est représenté par une connexion interne non commutative, de sorte que l'interaction entre deux secteurs peut apparaître de quatre manières : par mélange cinétique des courbures, par commutateur croisé entre connexions, par couplage via la géométrie émergente, ou par verrouillage de structures internes. On retient ici le modèle minimal le plus directement calculable : deux connexions internes A_μ et B_μ , leurs courbures $F_{\mu\nu}^{(A)}$ et $F_{\mu\nu}^{(B)}$, un terme de mélange cinétique proportionnel à ϵ , et un terme d'interaction non commutative proportionnel à λ . On en déduit les équations du mouvement sous forme schématique ainsi que le tenseur énergie–impulsion effectif complet. Le document est autosuffisant et peut servir de base à une section d'article ou à un appendice de développement ultérieur.

1 Objet de la note

Cette note formalise une idée simple mais structurante : *que se passe-t-il lorsque deux champs hypercomplexes coexistent et interagissent dans un même secteur géométrique ?*

Le point de vue adopté est le suivant. Dans une reformulation géométrique de type symplectique ou fibrée, la non-commutativité interne n'est pas portée directement par les coordonnées de l'espace-temps, mais par une structure interne, typiquement sous la forme d'une connexion sur une fibre interne. Dès lors, un champ hypercomplexe peut être représenté par une connexion interne, et sa dynamique par une courbure de type Yang–Mills non abélienne.

Nous cherchons ici un modèle minimal autonome, c'est-à-dire :

- suffisamment simple pour être calculable ;
- suffisamment général pour capturer l'idée physique ;
- suffisamment propre pour être réutilisable dans un manuscrit scientifique.

2 Hypothèses, intuitions, modèle, résultats formels

2.1 Hypothèses

On introduit deux champs hypercomplexes internes, représentés par deux connexions

$$A_\mu, \quad B_\mu, \tag{1}$$

définies sur l'espace-temps observable, mais à valeurs dans une algèbre interne non commutative. On notera cette algèbre par \mathcal{H} , sans imposer à ce stade une réalisation unique ; on peut penser

à une structure quaternionique, ou à une algèbre interne plus large contenant un sous-secteur quaternionique.

Deux lectures sont possibles.

1. A_μ et B_μ vivent dans le *même* secteur interne, et peuvent donc interagir directement par commutateur.
2. A_μ et B_μ vivent dans *deux sous-secteurs distincts* d'une structure élargie ; l'interaction directe peut alors être absente, réduite, ou médiée par la géométrie émergente.

Dans cette note, on adopte le cadre le plus simple : les deux champs sont suffisamment proches pour que les termes croisés aient un sens invariant, en particulier

$$[A_\mu, B_\nu] \neq 0 \tag{2}$$

soit autorisé en général.

2.2 Intuitions physiques

L'idée physique se résume en trois images.

- **Deux courbures internes.** Chaque champ hypercomplexe courbe la fibre interne. L'un peut donc ressentir la présence de l'autre via la courbure totale.
- **Deux règles de transport concurrentes.** Si A_μ et B_μ n'induisent pas le même transport interne, leur incompatibilité se mesure naturellement par un commutateur croisé.
- **Une énergie d'interférence géométrique.** Même si les deux secteurs restent distincts, leurs densités d'énergie peuvent se mélanger par un terme bilinéaire en courbures.

2.3 Modèle minimal retenu

Le modèle retenu repose sur deux courbures internes

$$F_{\mu\nu}^{(A)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{3}$$

$$F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu]. \tag{4}$$

On ajoute à leurs termes cinétiques propres :

- un **mélange cinétique** entre courbures, de coefficient ϵ ;
- un **terme d'interaction non commutative directe**, de coefficient λ .

2.4 Résultats formels obtenus

Les résultats formels principaux sont :

1. l'action minimale à deux champs ;
2. les équations du mouvement sous forme covariante schématique ;
3. le tenseur énergie-impulsion effectif complet du système ;
4. l'identification claire des cas limites ($\epsilon = 0$, $\lambda = 0$, ou $[A, B] = 0$).

3 Action minimale à deux champs hypercomplexes

On considère l'action effective

$$S[A, B, g] = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{eff}}, \quad (5)$$

avec

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(A)\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (6)$$

et

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \lambda \text{Tr}([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]). \quad (7)$$

Le premier terme de (7) décrit un *mélange cinétique* entre les deux secteurs hypercomplexes. Le second terme mesure leur *interaction non commutative directe*.

Remarque 1. Le terme en ϵ couple les courbures, tandis que le terme en λ couple les algèbres. Cette distinction est conceptuellement essentielle : l'un mélange la propagation, l'autre pénalise ou favorise certaines configurations de non-commutation.

4 Structure du commutateur croisé

Il est utile d'introduire le tenseur croisé

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} := [A_\mu, B_\nu]. \quad (8)$$

Le régime suivant joue un rôle central :

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} = 0 \iff [A_\mu, B_\nu] = 0 \text{ pour tous } \mu, \nu. \quad (9)$$

Dans ce cas, l'interaction hypercomplexe directe disparaît et seul subsiste, le cas échéant, le mélange cinétique. À l'inverse, lorsque $\mathcal{C}_{\mu\nu} \neq 0$, le système possède une véritable énergie d'interaction interne.

5 Équations du mouvement

Une variation de l'action par rapport à A_μ puis à B_μ fournit, sous forme schématique, les équations

$$D_\mu^{(A)} F^{(A)\mu\nu} + \epsilon D_\mu^{(A)} F^{(B)\mu\nu} + \lambda \mathcal{J}_{AB}^\nu = 0, \quad (10)$$

$$D_\mu^{(B)} F^{(B)\mu\nu} + \epsilon D_\mu^{(B)} F^{(A)\mu\nu} + \lambda \mathcal{J}_{BA}^\nu = 0, \quad (11)$$

où $D_\mu^{(A)}$ et $D_\mu^{(B)}$ désignent les dérivées covariantes dans les deux secteurs, et où \mathcal{J}_{AB}^ν , \mathcal{J}_{BA}^ν sont les courants effectifs issus de la variation du terme quartique en commutateurs.

5.1 Forme des courants d'interaction

Sans imposer ici un calcul détaillé jusqu'au bout, on peut anticiper la structure générale de ces courants. En notant

$$\delta \mathcal{C}_{\mu\nu} = [\delta A_\mu, B_\nu] + [A_\mu, \delta B_\nu], \quad (12)$$

la variation du terme

$$\text{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\nu} \mathcal{C}^{\mu\nu}) \quad (13)$$

produit nécessairement des contributions du type

$$\mathcal{J}_{AB}^\nu \sim [B_\mu, [A^\nu, B^\mu]], \quad \mathcal{J}_{BA}^\nu \sim [A_\mu, [B^\nu, A^\mu]], \quad (14)$$

à des facteurs de symétrisation et de convention près.

On retiendra surtout le fait qualitatif suivant :

les équations (10)–(11) ne décrivent plus deux champs indépendants, mais deux champs qui se rétro-agissent à la fois par leurs courbures et par leur non-commutation.

6 Tenseur énergie–impulsion effectif

6.1 Définition

Le tenseur énergie–impulsion du système est défini par

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (15)$$

Il est naturel de le décomposer sous la forme

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(A)} + T_{\mu\nu}^{(B)} + T_{\mu\nu}^{(\epsilon)} + T_{\mu\nu}^{(\lambda)}. \quad (16)$$

6.2 Contributions propres des deux secteurs

La contribution propre du champ A_μ est

$$T_{\mu\nu}^{(A)} = \text{Tr} \left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(A)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(A)\rho\sigma} \right). \quad (17)$$

De même, pour le champ B_μ ,

$$T_{\mu\nu}^{(B)} = \text{Tr} \left(F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(B)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left(F_{\rho\sigma}^{(B)} F^{(B)\rho\sigma} \right). \quad (18)$$

Ces deux termes sont les analogues directs du tenseur énergie–impulsion Yang–Mills standard.

6.3 Terme de mélange cinétique

Le terme de mélange cinétique fournit

$$T_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \epsilon \left[\frac{1}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(B)\rho}{}_\nu + F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(A)\rho}{}_\nu \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \text{Tr} \left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(B)\rho\sigma} \right) \right]. \quad (19)$$

Ce terme peut être lu comme une *énergie commune de corrélation géométrique*. Les deux champs ne portent plus seulement leur énergie propre ; ils stockent aussi une énergie mixte due à la corrélation de leurs courbures.

6.4 Terme d’interaction non commutative directe

En introduisant

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} := [A_\mu, B_\nu], \quad (20)$$

le terme quartique donne un tenseur de la forme

$$T_{\mu\nu}^{(\lambda)} = -2\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho} + \mathcal{C}_{\nu\rho}\mathcal{C}_{\mu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \quad (21)$$

Quand aucune ambiguïté n'est à craindre sur la symétrisation en μ, ν , on peut écrire de façon plus compacte

$$T_{\mu\nu}^{(\lambda)} \simeq -4\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \quad (22)$$

6.5 Expression complète

En regroupant les blocs (17), (18), (19) et (21), on obtient

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(A)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(A)\rho\sigma}\right) \\ & + \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(B)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(B)} F^{(B)\rho\sigma}\right) \\ & + \epsilon \left[\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(F_{\mu\rho}^{(A)} F^{(B)\rho}{}_{\nu} + F_{\mu\rho}^{(B)} F^{(A)\rho}{}_{\nu}\right) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\left(F_{\rho\sigma}^{(A)} F^{(B)\rho\sigma}\right) \right] \\ & - 2\lambda \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_{\nu}{}^{\rho} + \mathcal{C}_{\nu\rho}\mathcal{C}_{\mu}{}^{\rho}) + \lambda g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}(\mathcal{C}_{\rho\sigma}\mathcal{C}^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (23)$$

7 Interprétation physique du tenseur effectif

L'expression (23) se lit naturellement comme la somme de trois contenus physiques.

7.1 Deux énergies propres

Les deux premiers blocs sont les densités d'énergie et de pression transportées séparément par chacun des champs hypercomplexes.

7.2 Une énergie d'interférence

Le terme en ϵ représente une énergie d'interférence ou de corrélation entre les deux secteurs. Il n'exprime pas une non-commutativité directe, mais une co-dynamique des courbures.

7.3 Une énergie de non-compatibilité algébrique

Le terme en λ mesure le coût énergétique associé au défaut d'alignement interne entre les deux connexions. Selon le signe de λ :

- si $\lambda > 0$, les configurations fortement non commutatives sont pénalisées ;
- si $\lambda < 0$, la théorie peut favoriser des configurations non triviales, possiblement liées à des domaines, défauts, ou états condensés.

8 Cas limites

Cas 1 : secteurs complètement découplés

$$\epsilon = 0, \quad \lambda = 0. \quad (24)$$

Alors

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(A)} + T_{\mu\nu}^{(B)}. \quad (25)$$

On a simplement deux fluides géométriques internes indépendants.

Cas 2 : mélange cinétique seul

$$\epsilon \neq 0, \quad \lambda = 0. \quad (26)$$

Les deux champs restent algébriquement séparés, mais leurs courbures se mélangent dynamiquement.

Cas 3 : interaction non commutative seule

$$\epsilon = 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (27)$$

La physique nouvelle provient alors uniquement du secteur de commutateur croisé.

Cas 4 : commutation exacte

$$[A_\mu, B_\nu] = 0 \quad \forall \mu, \nu. \quad (28)$$

Alors

$$\mathcal{C}_{\mu\nu} = 0, \quad T_{\mu\nu}^{(\lambda)} = 0, \quad (29)$$

et toute l'interaction directe disparaît.

9 Lien avec une géométrie émergente

Le modèle précédent peut être vu comme un sous-secteur effectif d'une théorie plus large dans laquelle la métrique observable émerge d'une structure symplectique et d'une structure interne. Dans cette lecture, deux champs hypercomplexes peuvent interagir non seulement par les termes explicites (7), mais aussi parce qu'ils contribuent ensemble à la géométrie émergente.

Schématiquement, si la métrique effective dépend de deux secteurs internes,

$$g(X, Y) = \Omega(X, \mathcal{J}(A, B)Y), \quad (30)$$

alors les champs A_μ et B_μ modifient indirectement :

- la connexion effective ;
- la courbure effective ;
- la dynamique cosmologique ou galactique ;
- le contenu gravitationnel observable.

Autrement dit, même en l'absence d'interaction directe explicite, deux champs hypercomplexes peuvent se coupler parce qu'ils *co-construisent* la géométrie effective.

10 Discussion méthodologique

Ce document n'impose volontairement ni une algèbre hypercomplexe unique, ni une réduction cosmologique précise, ni un choix complet de conventions de signe. Cette retenue est méthodologique.

Ce qui est fixé ici, c'est la *charpente* :

1. deux connexions internes ;
2. deux courbures propres ;
3. un mélange cinétique bilinéaire ;
4. une interaction quartique issue du commutateur croisé ;
5. un tenseur énergie-impulsion effectif calculable.

Les points à fixer dans une étape ultérieure sont :

- la réalisation exacte de l'algèbre interne ;
- les conventions de trace et de normalisation ;
- la réduction FLRW ou statique sphérique ;
- le signe physiquement admissible du terme en λ ;
- la conservation covariante détaillée de $T_{\mu\nu}$ une fois les équations du mouvement imposées.

11 Conclusion

Le modèle minimal construit ici montre qu'une interaction entre deux champs hypercomplexes peut être décrite de manière propre dans un langage de type connexion-courbure. Deux mécanismes distincts apparaissent immédiatement.

1. Un **mélange cinétique** entre courbures, qui traduit une corrélation dynamique entre secteurs.
2. Une **interaction non commutative directe**, qui mesure le défaut d'alignement algébrique entre les deux connexions.

Le tenseur énergie-impulsion effectif obtenu constitue la sortie la plus immédiatement exploitable de cette construction. Il fournit la source gravitationnelle effective d'un système à deux champs hypercomplexes, et ouvre naturellement vers des applications cosmologiques, des solutions de type halo géométrique, ou des structures de domaines internes.

En ce sens, l'interaction entre deux champs hypercomplexes n'est pas seulement une généralisation technique ; elle esquisse déjà une physique multi-secteur de la géométrie interne.

A Version courte réutilisable dans un manuscrit

Pour un usage rapide dans un article, on peut condenser le modèle sous la forme suivante.

On introduit deux connexions hypercomplexes A_μ et B_μ avec courbures

$$F_{\mu\nu}^{(A)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu].$$

L'action minimale à deux champs est

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(A)\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu} \right) - \frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \lambda \text{Tr}([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]) \right]$$

Le tenseur énergie–impulsion effectif se décompose en contributions propres, en un terme de mélange cinétique et en un terme d'interaction non commutative directe.

B Remarque sur les conventions de signe

Le signe exact du bloc quartique dans le tenseur énergie–impulsion dépend des conventions suivantes :

- signature de la métrique ;
- définition de $T_{\mu\nu}$ par variation par rapport à $g^{\mu\nu}$ ou $g_{\mu\nu}$;
- normalisation de la trace interne ;
- symétrisation choisie dans la contraction du terme $[A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]$.

La structure tensorielle générale exposée dans ce document reste toutefois stable : une partie quadratique en $\mathcal{C}_{\mu\rho}\mathcal{C}_\nu{}^\rho$ et une partie proportionnelle à $g_{\mu\nu} \text{Tr}(\mathcal{C}^2)$.

Fermeture semi-quantique minimale de H_0 en RGH

Document L^AT_EX autonome

Rédaction assistée

22 avril 2026 — heure de Paris

Résumé

Ce document autonome formalise une fermeture minimale de la constante de Hubble présente H_0 dans le cadre RGH (Relativité Générale Hypercomplexe), en raccordant : (i) la réduction FLRW effective, (ii) le secteur interne quantifié défini par un observable $X = \alpha_X Q^p$, et (iii) une variable cosmologique tardive unique $Q_{\text{eff}}(a)$. L'objectif n'est pas de présenter un théorème définitif, mais une architecture cohérente, compilable, stable notationnellement, et directement réutilisable comme sous-appendice de manuscrit.

Table des matières

1	But et statut du présent texte	2
2	Base cosmologique effective	2
3	Secteur interne quantifié	3
4	Séparation des deux amplitudes Q	3
5	Version tardive générale HGR–Weyl	4
6	Réduction à un unique mode effectif	4
7	Mise en exergue : 10 équations centrales	5
8	Résolution générale pour $H(a)$	5
9	Formule explicite pour H_0	6
10	Injection du seuil quantique dans H_0	6
11	Régime perturbatif tardif	7
12	Conditions de cohérence	7
13	Interprétation physique	8

1 But et statut du présent texte

Le but est de produire une version autonome, cohérente et compilable de la chaîne logique suivante :

$$Q_{\text{micro}} \longrightarrow X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p \longrightarrow W_{\star}^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle \longrightarrow Q_0 \longrightarrow Q_{\text{eff}}(a) \longrightarrow H(a) \longrightarrow H_0.$$

Le statut exact est le suivant.

- **Résultats déjà présents dans le manuscrit RGH** : équation de Friedmann modifiée, forme effective $\rho_{\text{eff}}(a) = \alpha/a^2 - \beta/a^4$, définition d'un observable interne $X = \alpha_X Q^p$, seuil quantique effectif $W_{\star}^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle$, approximation semi-classique de $\langle \hat{X}^2 \rangle$.
- **Ajouts de ce document** : séparation explicite entre le Q microscopique et le Q cosmologique, hypothèse de projection $Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s$, verrouillage tardif sur un mode unique $Q_{\text{eff}}(a)$, et résolution explicite de H_0 .
- **Nature de la construction** : fermeture minimale cohérente, pas encore démonstration ultime au sens d'un théorème microscopique fermé.

2 Base cosmologique effective

On part de la forme FLRW standardisée :

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}). \quad (1)$$

La contribution géométrique effective est prise sous la forme

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}. \quad (2)$$

Le terme radiatif interne est paramétré par une amplitude comobile :

$$\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} Q_{\text{cosmo}}^2. \quad (3)$$

Dans une formulation plus symplectique, on peut aussi écrire

$$\chi(t) = \frac{Q_{\text{cosmo}}}{a^2}, \quad \rho_{\Omega}(a) = \frac{C_{\Omega}}{\kappa} \frac{Q_{\text{cosmo}}^2}{a^4}. \quad (4)$$

Commentaire

L'équation (2) est le point de départ effectif. Tant que α est défini en fonction de H_0 , on n'a pas encore une prédiction autonome de H_0 . L'enjeu du présent texte est précisément de remplacer cette dépendance circulaire par un raccord avec le secteur interne quantifié.

3 Secteur interne quantifié

On introduit l'invariant interne microscopique

$$Q_{\text{micro}}(x) \equiv E_i^a E_a^i + B_i^a B_a^i. \quad (5)$$

L'observable interne est alors défini par

$$X(x) = \alpha_X Q_{\text{micro}}(x)^p. \quad (6)$$

Après promotion quantique :

$$\hat{X}(x) = \alpha_X \left(\hat{E}_i^a \hat{E}_a^i + \hat{B}_i^a \hat{B}_a^i \right)^p. \quad (7)$$

On définit ensuite le seuil effectif

$$W_{\star}^{\text{eff}}(x) = \kappa_X \langle \hat{X}^2(x) \rangle. \quad (8)$$

En régime semi-classique, on pose

$$Q_{\text{cl}} \equiv \langle \hat{Q}_{\text{micro}} \rangle, \quad (\Delta Q)^2 \equiv \langle \hat{Q}_{\text{micro}}^2 \rangle - \langle \hat{Q}_{\text{micro}} \rangle^2. \quad (9)$$

L'approximation cumulante au premier ordre donne :

$$\langle \hat{X}^2 \rangle \approx \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} \left[1 + \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2} \right]. \quad (10)$$

On introduit l'abréviation

$$\delta_q \equiv \frac{(2p)(2p-1)}{2} \frac{(\Delta Q)^2}{Q_{\text{cl}}^2}, \quad (11)$$

de sorte que

$$\langle \hat{X}^2 \rangle \approx \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} (1 + \delta_q). \quad (12)$$

Par conséquent,

$$W_{\star}^{\text{eff}} = \kappa_X \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} (1 + \delta_q). \quad (13)$$

On peut alors inverser :

$$Q_{\text{cl}} = \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}. \quad (14)$$

4 Séparation des deux amplitudes Q

Hypothèse 1 (Séparation notationnelle). *On distingue explicitement :*

$$Q_{\text{micro}} : \text{invariant interne microscopique/quantifié}, \quad (15)$$

$$Q_{\text{cosmo}} : \text{amplitude cosmologique effective entrant dans } \beta. \quad (16)$$

Cette séparation est conceptuellement indispensable : utiliser la même lettre pour ces deux objets est dangereux, même si leur parenté physique est claire.

Hypothèse 2 (Projection semi-classique minimale). *On introduit une relation de projection*

$$Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s, \quad (17)$$

où Q_0 est l'amplitude cosmologique tardive à $a = 1$, ζ est un coefficient de normalisation effectif, et s un exposant de coarse-graining.

Le choix minimal est

$$s = 1, \quad Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}. \quad (18)$$

En combinant (14) et (17), on obtient

$$Q_0 = \zeta \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{s/(2p)}. \quad (19)$$

Dans le cas minimal $s = 1$:

$$Q_0 = \zeta \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}. \quad (20)$$

5 Version tardive générale HGR–Weyl

On considère une équation de type

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha \omega_J^2 + \beta \dot{\omega}_J^2 + \gamma H \omega_J + A \phi^2 + B H \phi + C \dot{\phi}. \quad (21)$$

Cette équation contient deux secteurs additionnels :

- un mode hypercomplexe effectif ω_J ;
- un mode de Weyl homogène ϕ .

Le problème consiste à fermer ce système de la manière la plus économique possible.

6 Réduction à un unique mode effectif

Hypothèse 3 (Verrouillage tardif minimal). *On suppose que, dans le régime tardif, les deux secteurs se verrouillent sur un seul mode :*

$$\omega_J = u Q_{\text{eff}}, \quad \phi = v Q_{\text{eff}}, \quad (22)$$

où u et v sont des constantes de projection.

On prend ensuite un ansatz de dilution tardive

$$Q_{\text{eff}}(a) = Q_0 a^{-m}, \quad m > 0. \quad (23)$$

Comme $\dot{a} = Ha$, on a

$$\dot{Q}_{\text{eff}} = -mH Q_{\text{eff}}, \quad (24)$$

puis

$$\dot{\omega}_J = -mH \omega_J, \quad \dot{\phi} = -mH \phi. \quad (25)$$

En injectant (22)–(25) dans (21), on obtient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \alpha u^2 Q_{\text{eff}}^2 + \beta m^2 u^2 H^2 Q_{\text{eff}}^2 + \gamma u H Q_{\text{eff}} + A v^2 Q_{\text{eff}}^2 + B v H Q_{\text{eff}} - C m v H Q_{\text{eff}}. \quad (26)$$

On regroupe alors les termes :

$$(1 - \beta m^2 u^2 Q_{\text{eff}}^2) H^2 - [\gamma u + (B - C m) v] Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + (\alpha u^2 + A v^2) Q_{\text{eff}}^2 \right] = 0. \quad (27)$$

Définissons

$$\mu \equiv \beta m^2 u^2, \quad (28)$$

$$\nu \equiv \gamma u + (B - C m) v, \quad (29)$$

$$\sigma \equiv \alpha u^2 + A v^2. \quad (30)$$

L'équation cosmologique fermée minimale devient alors

$$(1 - \mu Q_{\text{eff}}^2) H^2 - \nu Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}^2 \right] = 0. \quad (31)$$

7 Mise en exergue : 10 équations centrales

Les 10 équations structurantes

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}) \quad (C1)$$

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \quad (C2)$$

$$\beta = \frac{C_A}{\lambda^2} Q_{\text{cosmo}}^2 \quad (C3)$$

$$X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p \quad (C4)$$

$$W_{\star}^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle \quad (C5)$$

$$\langle \hat{X}^2 \rangle \approx \alpha_X^2 Q_{\text{cl}}^{2p} (1 + \delta_q) \quad (C6)$$

$$Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s \quad (C7)$$

$$Q_{\text{eff}}(a) = Q_0 a^{-m} \quad (C8)$$

$$(1 - \mu Q_{\text{eff}}^2) H^2 - \nu Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}^2 \right] = 0 \quad (C9)$$

$$H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1 - \mu Q_0^2)(E_0 + \sigma Q_0^2)}}{2(1 - \mu Q_0^2)} \quad (C10)$$

$$E_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k \quad (32)$$

8 Résolution générale pour $H(a)$

L'équation (31) est quadratique en H . Posons

$$D(a) = 1 - \mu Q_{\text{eff}}(a)^2, \quad (33)$$

$$\Gamma(a) = \nu Q_{\text{eff}}(a), \quad (34)$$

$$\Xi(a) = \frac{8\pi G}{3}\rho(a) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}(a)^2. \quad (35)$$

Alors

$$D(a)H^2 - \Gamma(a)H - \Xi(a) = 0. \quad (36)$$

La solution de branche expansive est

$$H(a) = \frac{\Gamma(a) + \sqrt{\Gamma(a)^2 + 4D(a)\Xi(a)}}{2D(a)}. \quad (37)$$

9 Formule explicite pour H_0

À l'époque présente $a = 1$:

$$Q_{\text{eff}}(1) = Q_0, \quad \rho(1) = \rho_0 = \rho_{m0} + \rho_{r0}. \quad (38)$$

On définit

$$D_0 = 1 - \mu Q_0^2, \quad (39)$$

$$\Gamma_0 = \nu Q_0, \quad (40)$$

$$\Xi_0 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma Q_0^2. \quad (41)$$

Alors

$$D_0 H_0^2 - \Gamma_0 H_0 - \Xi_0 = 0, \quad (42)$$

d'où

$$H_0 = \frac{\Gamma_0 \pm \sqrt{\Gamma_0^2 + 4D_0\Xi_0}}{2D_0}. \quad (43)$$

La branche physique en expansion est

$$H_0 = \frac{\Gamma_0 + \sqrt{\Gamma_0^2 + 4D_0\Xi_0}}{2D_0}. \quad (44)$$

En remplaçant explicitement :

$$H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1 - \mu Q_0^2) \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma Q_0^2 \right)}}{2(1 - \mu Q_0^2)}. \quad (45)$$

10 Injection du seuil quantique dans H_0

À partir de (20), on a

$$Q_0^2 = \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p}. \quad (46)$$

Donc

$$D_0 = 1 - \mu \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p}, \quad (47)$$

$$\Gamma_0 = \nu \zeta \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}, \quad (48)$$

$$\Xi_0 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k + \sigma \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p}. \quad (49)$$

En remplaçant dans (44), on obtient une dépendance explicite de H_0 au seuil quantique effectif.

Pour alléger l'écriture, posons

$$Y \equiv \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)}, \quad E_0 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda}{3} - k. \quad (50)$$

Alors

$$H_0 = \frac{\nu \zeta Y + \sqrt{\nu^2 \zeta^2 Y^2 + 4(1 - \mu \zeta^2 Y^2)(E_0 + \sigma \zeta^2 Y^2)}}{2(1 - \mu \zeta^2 Y^2)}. \quad (51)$$

11 Régime perturbatif tardif

Supposons

$$\mu Q_0^2 \ll 1, \quad |\nu Q_0| \ll \sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2}. \quad (52)$$

Alors un développement limité donne

$$H_0 \approx \sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2} + \frac{\nu Q_0}{2} + \frac{\mu Q_0^2}{2} \sqrt{E_0 + \sigma Q_0^2}. \quad (53)$$

En remplaçant Q_0 par (20), on obtient :

$$\begin{aligned} H_0 \approx & \sqrt{E_0 + \sigma \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p}} \\ & + \frac{\nu \zeta}{2} \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)} \\ & + \frac{\mu \zeta^2}{2} \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p} \sqrt{E_0 + \sigma \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p}}. \end{aligned} \quad (54)$$

12 Conditions de cohérence

Pour que la branche soit physiquement acceptable, il faut au minimum :

(i) Absence de singularité du coefficient cinétique

$$D_0 = 1 - \mu Q_0^2 > 0. \quad (55)$$

(ii) Réalité de la solution

$$\Gamma_0^2 + 4D_0 \Xi_0 \geq 0. \quad (56)$$

(iii) Version quantique de la première condition

À partir de (47) :

$$1 - \mu \zeta^2 \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/p} > 0. \quad (57)$$

13 Interprétation physique

La lecture minimale de la construction est la suivante.

1. Le secteur interne quantifié définit un observable $X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p$.
2. Cet observable contrôle un seuil effectif W_{\star}^{eff} .
3. Ce seuil détermine une amplitude tardive Q_0 après projection/coarse-graining.
4. L'amplitude Q_0 gouverne un mode effectif $Q_{\text{eff}}(a) = Q_0 a^{-m}$.
5. Ce mode rétroagit sur la Friedmann fermée via trois couplages :

$$\mu : \text{renormalisation du terme } H^2, \quad (58)$$

$$\nu : \text{correction linéaire en } H, \quad (59)$$

$$\sigma : \text{densité géométrique supplémentaire.} \quad (60)$$

6. La valeur présente H_0 devient alors une *sortie* du modèle effectif, et non plus seulement une constante injectée comme normalisation externe.

14 Ce qui est établi, et ce qui reste ouvert

Établi dans ce document

On a construit une dépendance explicite du type

$$H_0 = H_0(W_{\star}^{\text{eff}}, \delta_q, \zeta, p, \mu, \nu, \sigma, \rho_0, \Lambda, k). \quad (61)$$

Reste ouvert

Le point non encore dérivé microscopiquement est la loi exacte de projection

$$Q_0 = \zeta Q_{\text{cl}}^s. \quad (62)$$

Trois lectures physiques restent possibles :

- projection directe de moyenne semi-classique ;
- variable coarse-grained de domaine ;
- amplitude saturée.

Remarque 1. *Autrement dit, la structure logique est fermée, mais la micro-fondation détaillée du passage $Q_{\text{cl}} \mapsto Q_0$ reste à préciser si l'on veut transformer cette fermeture cohérente en théorème pleinement dérivé.*

15 Résumé final

La chaîne complète peut être résumée par

$$\begin{aligned}
Q_{\text{micro}} &\longrightarrow X = \alpha_X Q_{\text{micro}}^p \longrightarrow W_{\star}^{\text{eff}} = \kappa_X \langle \hat{X}^2 \rangle \longrightarrow Q_0 = \zeta \left(\frac{W_{\star}^{\text{eff}}}{\kappa_X \alpha_X^2 (1 + \delta_q)} \right)^{1/(2p)} \\
&\longrightarrow Q_{\text{eff}}(a) = Q_0 a^{-m} \longrightarrow (1 - \mu Q_{\text{eff}}^2) H^2 - \nu Q_{\text{eff}} H - \left[\frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \sigma Q_{\text{eff}}^2 \right] = 0 \\
&\longrightarrow H_0 = \frac{\nu Q_0 + \sqrt{\nu^2 Q_0^2 + 4(1 - \mu Q_0^2)(E_0 + \sigma Q_0^2)}}{2(1 - \mu Q_0^2)}. \tag{63}
\end{aligned}$$

Ce document fournit donc une base L^AT_EX autonome pour incorporer la fermeture semi-quantique minimale de H_0 dans un manuscrit RGH plus large.

Interaction entre un champ hypercomplexe et un champ de Weyl

Régime de couplage faible ou nul dans le cadre RGH

Document autonome rédigé pour lolo / HAL

23 avril 2026

Résumé

On étudie, dans l'esprit de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH) reformulée symplectiquement, le cas où le couplage direct entre un champ de Weyl et un champ hypercomplexe est très faible, voire nul. L'objectif est de clarifier ce qui disparaît, ce qui subsiste, et quelles conséquences géométriques et cosmologiques en résultent. On montre que, dans cette limite, les deux secteurs se découplent au niveau direct des termes mixtes, tout en restant indirectement corrélés par la métrique émergente et par l'équation gravitationnelle effective. On obtient ainsi un cadre minimal, sobre et potentiellement plus stable, où le secteur de Weyl joue essentiellement un rôle conforme, tandis que le secteur hypercomplexe peut porter l'essentiel des corrections gravitationnelles effectives.

Table des matières

1	Position du problème	1
2	Hypothèses	2
2.1	Hypothèse H1 : action décomposée	2
2.2	Hypothèse H2 : régime faible	2
2.3	Hypothèse H3 : même géométrie observable	2
3	Intuition physique	2
3.1	Interaction directe	2
3.2	Interaction indirecte	2
4	Modèle minimal	3
4.1	Secteur de Weyl	3
4.2	Secteur hypercomplexe	3
4.3	Secteur mixte	3
5	Résultats formels dans la limite de couplage faible	3
5.1	Découplage de la courbure mixte	3
5.2	Équations presque séparées	3
5.3	Tenseur d'énergie-impulsion effectif	4
6	Interprétation conceptuelle	4
6.1	Ce qui disparaît	4
6.2	Ce qui subsiste	4
6.3	Lecture physique	4

7 Réduction cosmologique FLRW	4
7.1 Équation de Friedmann effective	4
7.2 Ansatz minimal utile	5
7.3 Condition de rebond	5
7.4 Message cosmologique essentiel	5
8 Cas particulier : couplage exactement nul	5
9 Discussion méthodologique	6
9.1 Pourquoi ce régime est intéressant	6
9.2 Ce que l'on ne peut pas conclure sans travail supplémentaire	6
10 Conclusion	6

1 Position du problème

Dans le cadre RGH enrichi par une structure de Weyl et par un secteur hypercomplexe interne, la connexion totale peut être vue comme la somme de trois composantes :

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu + W_\mu + A_\mu, \quad (1)$$

où :

- Γ_μ désigne la partie gravitationnelle/spinorielle usuelle ;
- W_μ est le champ de Weyl, associé à la structure de dilatation ou de compatibilité conforme ;
- A_μ est la connexion interne hypercomplexe (quaternionique ou apparentée).

La courbure totale s'écrit alors schématiquement

$$[D_\mu, D_\nu] = R_{\mu\nu}^{(\Gamma)} + F_{\mu\nu}^{(W)} + F_{\mu\nu}^{(H)} + F_{\mu\nu}^{(\text{mix})}, \quad (2)$$

avec

$$F_{\mu\nu}^{(W)} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu, \quad (3)$$

$$F_{\mu\nu}^{(H)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (4)$$

La question étudiée ici est la suivante :

Que devient la théorie si le couplage direct entre le secteur de Weyl et le secteur hypercomplexe est très faible, voire nul ?

2 Hypothèses

Nous supposons :

2.1 Hypothèse H1 : action décomposée

L'action totale peut être écrite sous la forme

$$S = S_{\text{grav}} + S_W + S_H + \varepsilon S_{\text{mix}} + S_{\text{mat}}, \quad (5)$$

où :

- S_{grav} représente le secteur gravitationnel émergent ;
- S_W le secteur de Weyl ;
- S_H le secteur hypercomplexe ;
- S_{mix} les termes de couplage direct entre Weyl et hypercomplexe ;
- ε est un paramètre de couplage.

2.2 Hypothèse H2 : régime faible

Le régime étudié correspond à

$$0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad (6)$$

et le cas limite de découplage strict est

$$\varepsilon = 0. \quad (7)$$

2.3 Hypothèse H3 : même géométrie observable

Même lorsque $\varepsilon = 0$, les deux secteurs vivent sur la même géométrie effective $g_{\mu\nu}$, ou plus exactement participent tous deux à sa dynamique émergente.

3 Intuition physique

Il faut bien distinguer deux niveaux d'interaction :

3.1 Interaction directe

Elle provient des termes explicitement mixtes, par exemple

$$L_{\text{mix}} = \zeta \Phi_I F_{\mu\nu}^{(W)} F_I^{(H)\mu\nu} + \eta W_\mu J_H^\mu + \xi R A_\mu^I A_I^\mu. \quad (8)$$

Si ε est très petit, ces termes deviennent perturbatifs ; si $\varepsilon = 0$, ils disparaissent.

3.2 Interaction indirecte

Même si les termes de (8) s'annulent, le champ de Weyl et le champ hypercomplexe restent couplés indirectement par leur contribution commune au tenseur d'énergie-impulsion effectif et donc à la géométrie observable.

Autrement dit :

pas de couplage direct ne signifie pas absence totale de dialogue ; cela signifie seulement absence de mélange local explicite entre les deux secteurs.

4 Modèle minimal

4.1 Secteur de Weyl

On prend une action de type Maxwell

$$S_W = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu}^{(W)} F^{(W)\mu\nu}. \quad (9)$$

La variation par rapport à W_μ conduit à

$$\nabla_\mu F^{(W)\mu\nu} = J_{(W)}^\nu. \quad (10)$$

4.2 Secteur hypercomplexe

On prend pour le secteur interne une action de type Yang–Mills :

$$S_H = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(H)} F^{(H)\mu\nu} \right). \quad (11)$$

La variation par rapport à A_μ donne

$$\nabla_\mu F^{(H)\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\mu\nu}] = J_{(H)}^\nu. \quad (12)$$

4.3 Secteur mixte

On introduit un terme mixte générique

$$S_{\text{mix}} = \int d^4x \sqrt{-g} L_{\text{mix}}, \quad (13)$$

où L_{mix} est donné par (8) à titre indicatif.

L'intérêt du présent document est justement d'étudier ce qui se passe lorsque ce terme est négligeable ou absent.

5 Résultats formels dans la limite de couplage faible

5.1 Découplage de la courbure mixte

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les blocs mixtes deviennent négligeables :

$$F_{\mu\nu}^{(\text{mix})} \simeq 0. \quad (14)$$

Au niveau de la décomposition globale,

$$[D_\mu, D_\nu] \simeq R_{\mu\nu}^{(\Gamma)} + F_{\mu\nu}^{(W)} + F_{\mu\nu}^{(H)}. \quad (15)$$

5.2 Équations presque séparées

Les équations de champ se réécrivent alors, à l'ordre dominant :

$$\nabla_\mu F^{(W)\mu\nu} = J_{(W)}^\nu + O(\varepsilon), \quad (16)$$

$$\nabla_\mu F^{(H)\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\mu\nu}] = J_{(H)}^\nu + O(\varepsilon). \quad (17)$$

Dans le cas strictement découplé $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$\nabla_\mu F^{(W)\mu\nu} = J_{(W)}^\nu, \quad (18)$$

$$\nabla_\mu F^{(H)\mu\nu} + [A_\mu, F^{(H)\mu\nu}] = J_{(H)}^\nu. \quad (19)$$

5.3 Tenseur d'énergie-impulsion effectif

La dynamique gravitationnelle effective reste néanmoins sensible aux deux secteurs :

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu}^{(\text{mat})} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + \varepsilon T_{\mu\nu}^{(\text{mix})} \right). \quad (20)$$

Dans la limite découplée,

$$G_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu}^{(\text{mat})} + T_{\mu\nu}^{(W)} + T_{\mu\nu}^{(H)} \right), \quad (21)$$

et donc les deux secteurs restent liés *gravitationnellement* même sans couplage direct.

6 Interprétation conceptuelle

6.1 Ce qui disparaît

Lorsque le couplage direct est très faible ou nul, on perd :

- les transferts directs d'énergie ou de structure entre Weyl et hypercomplexe ;
- les termes d'interférence dominants ;
- les sources croisées importantes dans les équations de mouvement.

6.2 Ce qui subsiste

En revanche, on conserve :

- la présence d'un champ de Weyl autonome ;
- la présence d'un secteur hypercomplexe autonome ;
- la sommation de leurs contributions dans l'équation gravitationnelle effective ;
- la possibilité que le secteur hypercomplexe produise à lui seul une gravitation additionnelle observable.

6.3 Lecture physique

Dans cette limite, le champ de Weyl peut être interprété comme un secteur de structure conforme ou de jauge d'échelle, relativement discret, tandis que le champ hypercomplexe peut porter :

- des halos géométriques ;
- des corrections effectives aux équations cosmologiques ;
- des contributions de type rebond, saturation ou gravité invisible.

7 Réduction cosmologique FLRW

7.1 Équation de Friedmann effective

On suppose une géométrie FLRW effective,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (22)$$

et une équation de Friedmann modifiée

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{\text{mat}} + \rho_{\text{eff}}), \quad (23)$$

avec

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_W + \rho_H + \varepsilon \rho_{\text{mix}}. \quad (24)$$

Dans le régime de couplage faible,

$$\rho_{\text{eff}} \simeq \rho_W + \rho_H. \quad (25)$$

7.2 Ansatz minimal utile

Dans l'esprit du modèle minimal RGH–Weyl, on peut paramétrer

$$\rho_W(a) \sim \frac{\alpha}{a^2}, \quad \rho_H(a) \sim -\frac{\beta}{a^4}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (26)$$

On obtient ainsi

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4}, \quad (27)$$

sans qu'un terme d'interférence Weyl–hypercomplexe soit nécessaire à l'ordre dominant.

7.3 Condition de rebond

En univers plat et en négligeant la matière ordinaire près du rebond, l'équation de Friedmann devient

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\alpha}{a^2} - \frac{\beta}{a^4} \right). \quad (28)$$

La condition $H = 0$ impose

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (29)$$

Ainsi, même en l'absence de couplage direct fort entre Weyl et hypercomplexe, un rebond effectif peut exister si le secteur hypercomplexe contribue avec le signe et l'intensité adéquats dans (27).

7.4 Message cosmologique essentiel

Le point conceptuel important est le suivant :

*le rebond n'a pas besoin d'être porté par un dialogue fort entre Weyl et hypercomplexe ;
il peut déjà émerger de la combinaison gravitationnelle indirecte de deux secteurs
presque séparés.*

8 Cas particulier : couplage exactement nul

Prenons maintenant le cas radical

$$\varepsilon = 0. \quad (30)$$

Alors :

1. les termes mixtes disparaissent de l'action ;
2. les équations de Weyl et du secteur hypercomplexe sont dynamiquement séparées ;
3. la seule interaction restante est gravitationnelle, via la métrique effective.

Ce régime peut être résumé par le schéma :

$$\text{GR émergente} + \text{Weyl autonome} + \text{hypercomplexe autonome}. \quad (31)$$

On obtient ainsi un modèle plus minimal, plus lisible, et souvent plus défendable du point de vue phénoménologique.

9 Discussion méthodologique

9.1 Pourquoi ce régime est intéressant

Le régime de couplage faible présente plusieurs avantages :

- il limite la prolifération des paramètres libres ;
- il réduit le risque de pathologies dynamiques liées à des mélanges trop agressifs ;
- il permet d'attribuer plus clairement un effet observé à un secteur donné ;
- il fournit une base plus propre pour des tests numériques ou observationnels.

9.2 Ce que l'on ne peut pas conclure sans travail supplémentaire

En revanche, sans fixer davantage le modèle, on ne peut pas encore déterminer de façon univoque :

- le signe exact de tous les termes effectifs ;
- la stabilité complète des perturbations ;
- la forme exacte des observables en structure fine, lentillage ou spectre cosmologique ;
- la valeur réelle du paramètre ε dans la nature.

10 Conclusion

Le cas d'un couplage très faible, voire nul, entre champ hypercomplexe et champ de Weyl ne vide pas la théorie de sa substance ; il la clarifie.

On obtient alors le tableau suivant :

1. les termes mixtes directs sont négligeables ou absents ;
2. les secteurs Weyl et hypercomplexe évoluent presque séparément ;
3. ils restent néanmoins reliés par leur contribution commune à la gravitation effective ;
4. le secteur hypercomplexe peut demeurer le principal support d'une gravité additionnelle ;
5. le secteur de Weyl conserve un rôle conforme et structurel plus discret.

Ce régime apparaît donc comme une version minimaliste, propre et potentiellement plus robuste du cadre RGH–Weyl. Il constitue une base naturelle pour une suite plus technique : ansatz minimal, perturbations, stabilité, puis confrontation observationnelle.

Formule synthétique. Si

$$S = S_{\text{grav}} + S_W + S_H + \varepsilon S_{\text{mix}}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (32)$$

alors, à l'ordre dominant,

interaction directe faible \implies découplage local presque complet mais rétroaction gravitationnelle commune.

(33)

Mini-secteur bi-Weyl compatible avec la RGH

Action minimale, equations de champ et reduction FLRW

Document de travail

23 avril 2026

Résumé

On propose ici une extension minimale du secteur de Weyl de la Relativite Generale Hypercomplexe (RGH) dans laquelle la connexion d'échelle usuelle est doublee en deux champs abeliens independants, faiblement melanges. L'objectif n'est pas d'introduire une seconde metrique, mais une *bimodalite d'échelle* : un mode moyen, interpretable comme le secteur conforme observable, et un mode relatif, interpretable comme une tension d'échelle cachee. On ecrit une action minimale compatible avec l'esprit symplectique de la RGH, on derive les equations de champ associees, puis on effectue une reduction FLRW homogene et isotrope.

1 Position du probleme

Dans la version actuelle de la RGH symplectique, le secteur de Weyl est porte par une unique 1-forme $\phi = \phi_\mu dx^\mu$, de courbure

$$F^{(\phi)} = d\phi,$$

et de dynamique de type Maxwell. Le formalisme admet en outre des couplages mixtes entre le secteur de Weyl, le secteur interne hypercomplexe et la structure symplectique. L'idée etudiee ici consiste a remplacer le champ de Weyl unique par deux 1-formes abeliennes

$$W^{(1)} = W_\mu^{(1)} dx^\mu, \quad W^{(2)} = W_\mu^{(2)} dx^\mu,$$

avec pour ambition de modeliser une structure a deux echelles :

- un **mode visible** ou *moyen*, qui generalise le Weyl usuel ;
- un **mode cache** ou *relatif*, qui mesure une difference interne entre deux structures de dilatation locales.

2 Hypotheses minimales

2.1 Hypothese H1 : double secteur conforme abelien

On introduit deux connexions d'échelle abeliennes $W_\mu^{(1)}$ et $W_\mu^{(2)}$ avec courbures

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} = \partial_\mu W_\nu^{(1)} - \partial_\nu W_\mu^{(1)}, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} = \partial_\mu W_\nu^{(2)} - \partial_\nu W_\mu^{(2)}. \quad (1)$$

2.2 Hypothese H2 : une seule metrique observable

On conserve une metrique effective $g_{\mu\nu}$ unique, interpretee comme la metrique emergente de la RGH. Les deux champs de Weyl ne definissent donc pas deux geometries metriques distinctes, mais deux *modes de connexion conforme* couples au meme secteur gravitationnel observable.

2.3 Hypothese H3 : couplages mixtes faibles

On autorise :

- un melange cinetique bi-Weyl $\mathcal{F}^{(1)} \cdot \mathcal{F}^{(2)}$;
- un terme de masse relative ou de raideur geometrique pour $W^{(1)} - W^{(2)}$;
- des couplages faibles vers le secteur hypercomplexe A_μ et/ou le secteur symplectique Ω .

3 Action minimale bi-Weyl–RGH

On prend comme point de depart une action effective de la forme

$$S = S_{\text{grav}} + S_\Omega + S_H + S_{\text{biW}} + S_{\text{mix}} + S_{\text{mat}}, \quad (2)$$

avec

$$S_{\text{biW}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{F}^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} \mathcal{F}^{(2)\mu\nu} - \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{F}^{(2)\mu\nu} + \frac{m_-^2}{2} (W_\mu^{(1)} - W_\mu^{(2)}) (W^{(1)\mu} - W^{(2)\mu}) \right]. \quad (3)$$

On peut y ajouter des couplages mixtes minimaux

$$S_{\text{mix}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\zeta_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{H}^{\mu\nu} + \zeta_2 \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} \mathcal{H}^{\mu\nu} + \eta (W_\mu^{(1)} + W_\mu^{(2)}) J_H^\mu + \xi (W_\mu^{(1)} - W_\mu^{(2)}) J_{\text{rel}}^\mu \right]. \quad (4)$$

4 Diagonalisation en modes moyen et relatif

On introduit les combinaisons orthogonales

$$W_\mu^{(+)} = \frac{W_\mu^{(1)} + W_\mu^{(2)}}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^{(-)} = \frac{W_\mu^{(1)} - W_\mu^{(2)}}{\sqrt{2}}, \quad (5)$$

avec

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(+)} = \partial_\mu W_\nu^{(+)} - \partial_\nu W_\mu^{(+)}, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(-)} = \partial_\mu W_\nu^{(-)} - \partial_\nu W_\mu^{(-)}. \quad (6)$$

Le secteur cinetique devient

$$\mathcal{L}_{\text{biW}} = -\frac{1}{4} (1 + \varepsilon) \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(+)} \mathcal{F}^{(+)\mu\nu} - \frac{1}{4} (1 - \varepsilon) \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(-)} \mathcal{F}^{(-)\mu\nu} + m_-^2 W_\mu^{(-)} W^{(-)\mu}. \quad (7)$$

Si $|\varepsilon| < 1$, les deux termes cinetiques gardent le bon signe.

5 Equations de champ

La variation donne

$$\nabla_\mu (\mathcal{F}^{(1)\mu\nu} + \varepsilon \mathcal{F}^{(2)\mu\nu}) + m_-^2 (W^{(1)\nu} - W^{(2)\nu}) = J_{(1)}^\nu, \quad (8)$$

$$\nabla_\mu (\mathcal{F}^{(2)\mu\nu} + \varepsilon \mathcal{F}^{(1)\mu\nu}) - m_-^2 (W^{(1)\nu} - W^{(2)\nu}) = J_{(2)}^\nu. \quad (9)$$

En base diagonale,

$$(1 + \varepsilon) \nabla_\mu \mathcal{F}^{(+)\mu\nu} = J_+^\nu, \quad (10)$$

$$(1 - \varepsilon) \nabla_\mu \mathcal{F}^{(-)\mu\nu} + 2m_-^2 W^{(-)\nu} = J_-^\nu. \quad (11)$$

6 Tenseur d'énergie-impulsion

Le tenseur du secteur bi-Weyl s'écrit schématiquement

$$T_{\mu\nu}^{(\text{biW})} = T_{\mu\nu}^{(1)} + T_{\mu\nu}^{(2)} + T_{\mu\nu}^{(12)} + T_{\mu\nu}^{(-m)}, \quad (12)$$

avec le terme croisé

$$T_{\mu\nu}^{(12)} = \varepsilon \left(\mathcal{F}_{\mu\rho}^{(1)} \mathcal{F}^{(2)\rho}{}_{\nu} + \mathcal{F}_{\mu\rho}^{(2)} \mathcal{F}^{(1)\rho}{}_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(1)} \mathcal{F}^{(2)\rho\sigma} \right). \quad (13)$$

Le secteur contribue alors à l'équation d'Einstein effective :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}^{(\cdot)} + T_{\mu\nu}^{(H)} + T_{\mu\nu}^{(\Omega)} + T_{\mu\nu}^{(\text{biW})} + T_{\mu\nu}^{(\text{mix})} \right). \quad (14)$$

7 Reduction FLRW minimale

Pour préserver l'isotropie de fond, on prend d'abord

$$W^{(1)} = w_1(t) dt, \quad W^{(2)} = w_2(t) dt. \quad (15)$$

Alors

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} = 0, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (16)$$

et le secteur cinétique pur ne contribue pas directement au fond. En revanche, le mode relatif peut subsister via le terme en m_-^2 et via les couplages mixtes.

Dans la base diagonale,

$$W^{(+)} = w_+(t) dt, \quad W^{(-)} = w_-(t) dt, \quad (17)$$

le mode relatif contribue schématiquement comme

$$\rho_{W_-}^{(0)} \sim +m_-^2 w_-^2, \quad p_{W_-}^{(0)} \sim +m_-^2 w_-^2, \quad (18)$$

soit un comportement typiquement *stiff* si rien ne le contraint davantage.

Si l'on enrichit l'ansatz par une version isotropisée effective, on obtient au niveau phénoménologique

$$\rho_{W_+}(a) \sim \frac{Q_+^2}{a^4}, \quad \rho_{W_-}(a) \sim \frac{Q_-^2}{a^4} + m_-^2 \Xi_-(a). \quad (19)$$

8 Equation de Friedmann effective

La dynamique cosmologique peut alors s'écrire

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \rho_H + \rho_\Omega + \rho_{W_+} + \rho_{W_-} + \rho_{\text{mix}} \right). \quad (20)$$

Une paramétrisation minimale compatible avec l'esprit RGH est

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha_+}{a^2} + \frac{\gamma_+}{a^4} + \frac{\gamma_-}{a^4} + \rho_{W_-}^{(m)}(a) + \rho_{\text{mix}}(a) - \frac{\beta_H}{a^4}. \quad (21)$$

Pour un scénario de rebond, on peut condenser cela en

$$\rho_{\text{eff}}(a) = \frac{\alpha_{\text{biW}}}{a^2} - \frac{\beta_{\text{RGH}}}{a^4}, \quad \alpha_{\text{biW}} > 0, \quad \beta_{\text{RGH}} > 0, \quad (22)$$

avec

$$a_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\beta_{\text{RGH}}}{\alpha_{\text{biW}}}}. \quad (23)$$

9 Conclusion

Le mini-secteur bi-Weyl propose ici realise une *bimodalite d'echelle sans seconde metrique*. Il fournit :

1. une action coherente a deux champs abeliens melanges ;
2. des equations de type Maxwell couple ;
3. une decomposition claire en mode moyen et mode relatif ;
4. une insertion naturelle dans la Friedmann effective RGH ;
5. une possibilite de retroaction sur le rebond via les couplages mixtes.

Annexe — Conventions d’unités et normalisations dimensionnelles en RGH

Laurent Besson — rédaction assistée

Version de travail — 26 avril 2026, 18:08, heure de Paris

1 Conventions d’unités et normalisations dimensionnelles

1.1 Objet de l’annexe

Cette annexe fixe les conventions d’unités utilisées dans les applications numériques du cadre RGH/HGR. Son objectif est d’éviter tout mélange ambigu entre les unités géométriques, où l’on pose souvent $c = 1$, et les unités SI strictes, nécessaires dès que l’on donne des valeurs numériques en kg m^{-3} , m^{-2} , m^{-4} , secondes ou années-lumière.

Dans tout tableau numérique, sauf mention explicite contraire, on adopte les unités SI strictes. Les facteurs de c doivent donc être conservés lorsqu’ils sont nécessaires dimensionnellement.

1.2 Densité massique, densité d’énergie et pression

On distingue trois grandeurs :

$$\rho_m \quad : \text{densité massique, en } \text{kg m}^{-3}, \quad (1)$$

$$u \quad : \text{densité d’énergie, en } \text{J m}^{-3}, \quad (2)$$

$$p \quad : \text{pression, en } \text{Pa} = \text{J m}^{-3}. \quad (3)$$

Elles sont reliées par

$$u = \rho_m c^2. \quad (4)$$

Pour un fluide parfait d’équation d’état constante,

$$p = wu = w\rho_m c^2. \quad (5)$$

Dans les documents numériques RGH, lorsque le symbole ρ apparaît dans une formule de Friedmann avec un facteur $8\pi G/3$, il désigne par défaut une densité massique ρ_m .

1.3 Équation de Friedmann en SI strict

Pour une métrique FLRW, avec facteur d’échelle $a(t)$ et courbure spatiale normalisée $k \in \{-1, 0, +1\}$, on utilise la convention

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (6)$$

avec

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (7)$$

Si l’on préfère écrire l’équation en densité d’énergie u , alors

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}u + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (8)$$

Ces deux écritures sont équivalentes si $u = \rho_m c^2$.

1.4 Densité effective et terme normalisé dans H^2

On distingue strictement :

$$\rho_{\text{eff}} \quad : \text{densité massique effective, en kg m}^{-3}, \quad (9)$$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \quad : \text{contribution déjà normalisée dans l'équation de Friedmann, en s}^{-2}. \quad (10)$$

Le lien entre les deux est

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{eff}}. \quad (11)$$

Ainsi, les deux écritures suivantes sont équivalentes mais ne doivent pas être confondues :

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_{\text{eff}}), \quad (12)$$

ou bien

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \mathcal{H}_{\text{eff}}. \quad (13)$$

Dans les applications numériques, on réserve le symbole ρ_{eff} à une densité physique ou effective exprimée en kg m^{-3} . Les termes directement ajoutés à H^2 doivent être notés \mathcal{H}_{eff} ou par un symbole équivalent de dimension s^{-2} .

1.5 Loi d'échelle d'un fluide parfait

Pour un fluide parfait de paramètre d'équation d'état constant w , la conservation standard donne

$$\dot{\rho}_m + 3H(1+w)\rho_m = 0, \quad (14)$$

soit

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}. \quad (15)$$

Les cas usuels sont :

$$w = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-3} \quad \text{matière non relativiste,} \quad (16)$$

$$w = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-4} \quad \text{radiation,} \quad (17)$$

$$w = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \propto a^{-6} \quad \text{fluide stiff.} \quad (18)$$

Lorsque les tableaux utilisent la même valeur de référence ρ_0 pour comparer radiation et fluide stiff, les colonnes stiff doivent être comprises comme comparatives. Une prédiction physique pour un secteur stiff exige de fixer sa densité actuelle propre, notée $\rho_{w=1,0}$.

1.6 Scalaire de Ricci en SI strict

Avec la convention de signature et de signe fixée dans le corps du texte, le scalaire de Ricci est relié à la trace du tenseur énergie-impulsion. En ordre de grandeur FLRW pour un fluide parfait, on retient la relation dimensionnelle

$$|R| \sim \frac{8\pi G}{c^2} |1-3w| \rho_m. \quad (19)$$

Cette formule montre immédiatement que, pour une radiation parfaite en FLRW strict,

$$w = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad R = 0. \quad (20)$$

Un seuil de Ricci R_\star ne peut donc pas déclencher un rebond en radiation pure FLRW standard, sauf si l'on introduit un écart effectif $w_{\text{eff}} \neq 1/3$, un contenu non radiatif, ou une modification géométrique propre au secteur RGH.

La densité critique équivalente associée à un seuil R_\star s'écrit, en SI strict,

$$\rho_\star(R) \sim \frac{c^2 R_\star}{8\pi G |1 - 3w|}. \quad (21)$$

1.7 Invariant de Kretschmann en SI strict

L'invariant de Kretschmann est défini par

$$K \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (22)$$

avec dimension m^{-4} .

En FLRW, pour un fluide parfait, on utilise comme calibrage d'ordre de grandeur

$$K \sim \frac{G^2}{c^4} \rho_m^2 \times \mathcal{C}_K(w), \quad (23)$$

où $\mathcal{C}_K(w)$ est un coefficient numérique dépendant de l'équation d'état et de la convention exacte utilisée.

Si l'on emploie la forme détaillée

$$K \approx \frac{64\pi^2 G^2}{3c^4} h o_m^2 (9w^2 + 12w + 7), \quad (24)$$

la densité critique équivalente associée à un seuil K_\star est

$$\rho_\star(K) \approx \frac{c^2}{G} \sqrt{\frac{3K_\star}{64\pi^2 (9w^2 + 12w + 7)}}. \quad (25)$$

Toute utilisation d'une formule sans le facteur c^{-4} correspond implicitement à des unités géométriques $c = 1$ et ne doit pas être mélangée directement avec des densités en kg m^{-3} .

1.8 Invariant conforme de Weyl

L'invariant conforme de Weyl est défini par

$$W \equiv C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (26)$$

Il a pour dimension m^{-4} .

En FLRW strict,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad W = 0. \quad (27)$$

Un déclencheur fondé sur $W \rightarrow W_\star$ suppose donc au minimum une anisotropie, une inhomogénéité, un cisaillement, une structure de domaine, ou une branche Weyl non strictement FLRW.

Dans les modèles jouets où l'on paramètre les marées par un scalaire sans dimension Σ , on utilise l'ansatz dimensionnel

$$W \sim \kappa \Sigma^2 H^4. \quad (28)$$

Avec

$$H^2 \sim \frac{8\pi G}{3} \rho_m, \quad (29)$$

on obtient, en SI strict,

$$W \sim \kappa \Sigma^2 \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \right)^2 u^2 = \kappa \Sigma^2 \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^2 \rho_m^2, \quad (30)$$

si l'on passe par H^2 déjà exprimé en fonction de la densité massique. La cohérence dimensionnelle doit alors être vérifiée selon la définition précise de l'invariant géométrique utilisé.

Pour éviter toute ambiguïté dans les tableaux, on écrira la densité critique équivalente sous la forme calibrée

$$\rho_*(W, \Sigma) = \frac{3}{8\pi G} \sqrt{\frac{W_*}{\kappa \Sigma^2}} \mathcal{U}_W, \quad (31)$$

où \mathcal{U}_W est le facteur de conversion dimensionnel choisi. En unités géométriques $c = 1$, $\mathcal{U}_W = 1$. En SI strict, \mathcal{U}_W doit être fixé explicitement par la convention reliant H^4 et l'invariant W en m^{-4} .

1.9 Rayons, distances et années-lumière

Les applications numériques utilisent souvent une échelle de référence

$$R_0 = 96 \text{ Gly}. \quad (32)$$

Cette grandeur est une échelle physique associée à un volume comobile de référence. Elle ne doit pas être interprétée comme un rayon matériel rigide de l'Univers.

La conversion utilisée est

$$1 \text{ a.l.} = 9.460730472 \times 10^{15} \text{ m}. \quad (33)$$

Ainsi,

$$96 \text{ Gly} = 96 \times 10^9 \text{ a.l.} \simeq 9.082 \times 10^{26} \text{ m}. \quad (34)$$

Si $x = a_b/a_0$, alors

$$R_b = R_0 x. \quad (35)$$

1.10 Règle de lecture des tableaux numériques

Dans tout tableau numérique RGH/HGR :

1. les densités indiquées en kg m^{-3} sont des densités massiques ;
2. les densités d'énergie doivent être indiquées en J m^{-3} ;
3. les termes ajoutés directement à H^2 doivent être indiqués en s^{-2} ;
4. les seuils R_* , K_* et W_* doivent porter respectivement les dimensions m^{-2} , m^{-4} et m^{-4} ;
5. toute formule issue d'une convention $c = 1$ doit être reconvertie avant insertion dans un tableau SI ;
6. les colonnes stiff utilisant la même normalisation que la radiation sont des comparaisons d'exposants, non des prédictions physiques autonomes.

1.11 Résumé opérationnel

La convention recommandée pour les applications numériques est la suivante :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m, \quad (36)$$

$$u = \rho_m c^2, \quad (37)$$

$$p = w \rho_m c^2, \quad (38)$$

$$R \sim \frac{8\pi G}{c^2} \rho_m, \quad (39)$$

$$K \sim \frac{G^2}{c^4} \rho_m^2, \quad (40)$$

$$W \sim \frac{G^2}{c^4} \rho_m^2 \quad \text{hors FLRW strict ou avec anisotropies.} \quad (41)$$

Cette annexe sert de référence commune aux applications numériques. Toute déviation volontaire, par exemple le passage en unités géométriques $c = 1$, doit être annoncée explicitement avant les formules et ne doit pas être mélangée avec des valeurs SI dans un même tableau.

Annexe de travail — Bulle hypercomplexe mobile de type Alcubierre-like dans le cadre RGH

Reconstruction affine, lecture ADM, contraintes d'énergie et causalité

Laurent Besson — idée originale
Rédaction assistée : HAL9000

Version de travail — 1 mai 2026, heure de Paris

Résumé

Cette annexe explore, à titre de modèle jouet, la possibilité de rapprocher une bulle locale hypercomplexe de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH) d'une géométrie de type Alcubierre. Le point de départ est la distinction entre une bulle statique d'annulation locale du poids, décrite par une correction affine $\Delta\Gamma_{00}^i$, et une bulle mobile de type warp, qui requiert un terme de décalage spatial g_{0i} , ou shift ADM β^i . On formule une condition minimale de reconstruction affine permettant d'identifier la correction hypercomplexe $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$ à la différence de connexion entre une métrique cible de type Alcubierre et le fond de Minkowski. On montre ensuite que le prix géométrique associé apparaît dans la contrainte hamiltonienne ADM sous forme d'une densité d'énergie effective négative concentrée dans la paroi de la bulle. Le document sépare explicitement hypothèses, modèle, résultats formels et points ouverts. Il ne constitue pas une proposition de propulsion physique, mais une carte mathématique des conditions à satisfaire pour obtenir une géométrie RGH-Alcubierre-like.

Table des matières

1	Objet et statut du document	3
2	Rappel : bulle locale statique d'annulation du poids	3
3	Métrique cible de type Alcubierre	4
4	Approximation faible en vitesse	5
5	Condition de reconstruction affine RGH	5
6	Ansatz RGH-warp minimal	6
7	Lecture ADM de la bulle	7
8	Contrainte hamiltonienne et énergie requise	8
9	Estimation d'énergie totale	8
10	Équation gravitationnelle effective RGH	9

11 Sources nécessaires	10
12 NEC et conditions d'énergie	11
13 Causalité	11
14 Stabilité	12
15 Bulle mobile contre bulle statique : tableau de synthèse	13
16 Critères minimaux pour une annexe future	13
16.1 Critère 1 : existence d'une métrique effective	13
16.2 Critère 2 : reconstruction affine	13
16.3 Critère 3 : énergie effective de paroi	13
16.4 Critère 4 : flux géométrique	13
16.5 Critère 5 : conservation	14
16.6 Critère 6 : énergie finie	14
16.7 Critère 7 : causalité locale	14
17 Conclusion	14
A Annexe A : correction de la formule sans approximation faible	15
B Annexe B : profil lisse possible	15
C Annexe C : forme compacte du programme RGH-warp	16

1 Objet et statut du document

Le but est d'étudier la question suivante : une bulle locale hypercomplexe, initialement introduite comme domaine statique d'annulation du poids, peut-elle être reformulée comme une géométrie mobile de type Alcubierre-like ?

La question est volontairement exploratoire. On ne prétend pas construire un moteur à distorsion physique. On cherche plutôt à identifier les conditions mathématiques minimales sous lesquelles une correction hypercomplexe de la connexion effective pourrait imiter, au moins localement et au niveau des géodésiques, une métrique de type warp.

Le statut exact est donc :

S1. résultat formel de reconstruction affine ;

S2. modèle jouet de métrique effective mobile ;

S3. diagnostic ADM de l'énergie requise ;

S4. identification des obstacles : énergie effective négative, flux géométrique, anisotropie de paroi, causalité et stabilité.

On distingue constamment :

$$\text{bulle anti-poids RGH} \iff \Delta\Gamma_{00}^i, \quad (1)$$

$$\text{bulle warp-like RGH} \iff h_{0i}, \Delta\Gamma_{0j}^i, \Theta_{00} < 0, \Theta_{0i} \neq 0. \quad (2)$$

2 Rappel : bulle locale statique d'annulation du poids

Dans le modèle local anti-pesanteur, on considère une masse source M et une masse test m placée à une altitude fixe r_0 . Dans la limite non relativiste, l'accélération gravitationnelle standard vaut

$$\mathbf{a}_M(r) = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (3)$$

L'objectif d'une bulle locale statique est d'obtenir

$$\mathbf{a}_{\text{eff}}(r_0) = 0, \quad (4)$$

soit

$$\mathbf{a}_{\text{rep}}(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (5)$$

Dans l'approximation de champ faible et pour une particule lente,

$$a^i \simeq -c^2 \Gamma_{00,\text{eff}}^i. \quad (6)$$

On introduit alors une connexion effective

$$\Gamma_{\mu\nu,\text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H), \quad (7)$$

avec $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$ la correction affine induite par le secteur hypercomplexe. La condition locale d'annulation du poids devient

$$-c^2 \Delta\Gamma_{00}^r(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2}. \quad (8)$$

Un ansatz hypercomplexe minimal est

$$\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right), \quad (9)$$

où :

- A_μ^I est une connexion interne hypercomplexe ;
- $\Sigma_{\nu I}^\rho$ est une projection base-fibre ;
- λ est un couplage géométrique effectif.

Pour la compensation locale du poids :

$$-c^2 \lambda \left(A_0^I \Sigma_{0I}^r \right)_{r=r_0} = + \frac{GM}{r_0^2}. \quad (10)$$

On ajoute une fonction de domaine spatial $A_D(x)$:

$$A_D(x) \in [0, 1], \quad (11)$$

avec par exemple

$$A_D(x) = \exp \left[- \frac{d(x, D)^2}{L^2} \right], \quad (12)$$

et

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + A_D(x) \Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H). \quad (13)$$

Cette structure est déjà anisotrope et confinée, mais elle ne constitue pas encore une bulle warp. Elle produit principalement une correction de type $\Delta \Gamma_{00}^i$.

3 Métrique cible de type Alcubierre

On prend comme cible la métrique d'Alcubierre simplifiée :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + igl(dx - v_s f(r_s) dt)^2 + dy^2 + dz^2. \quad (14)$$

Le centre de la bulle suit une trajectoire $X_s(t)$:

$$\dot{X}_s(t) = v_s, \quad (15)$$

et

$$r_s^2 = (x - X_s(t))^2 + y^2 + z^2. \quad (16)$$

Le profil $f(r_s)$ vérifie typiquement

$$f(r_s) \simeq \begin{cases} 1, & r_s < R, \\ 0, & r_s \gg R, \end{cases} \quad (17)$$

avec une variation concentrée dans une paroi d'épaisseur Δ .

En développant (14) :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 - 2v_s f dx dt + v_s^2 f^2 dt^2 + dy^2 + dz^2, \quad (18)$$

$$= -(c^2 - v_s^2 f^2) dt^2 - 2v_s f dt dx + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (19)$$

Les composantes métriques non triviales sont

$$g_{00} = -(c^2 - v_s^2 f^2), \quad (20)$$

$$g_{0x} = -v_s f, \quad (21)$$

$$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1. \quad (22)$$

Le terme décisif est donc

$$\boxed{g_{0x} = -v_s f.} \quad (23)$$

Il ne s'agit pas d'une simple accélération verticale ou radiale, mais d'un terme de décalage spatial, ou shift.

4 Approximation faible en vitesse

On pose temporairement $c = 1$ et on suppose

$$\varepsilon_v := \frac{v_s}{c} \ll 1. \quad (24)$$

À l'ordre linéaire en v_s :

$$g_{00} \simeq -1, \quad (25)$$

$$g_{0x} \simeq -v_s f, \quad (26)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}. \quad (27)$$

La perturbation métrique principale est

$$h_{0x} = -v_s f. \quad (28)$$

En coordonnées cartésiennes et au premier ordre en v_s , les symboles de Christoffel pertinents sont

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (29)$$

En négligeant les termes d'ordre v_s^2 et en considérant un profil quasi-stationnaire dans le référentiel de la bulle, on obtient les composantes typiques :

$$\Gamma_{0y}^x \simeq -\frac{v_s}{2} \partial_y f, \quad (30)$$

$$\Gamma_{0z}^x \simeq -\frac{v_s}{2} \partial_z f, \quad (31)$$

$$\Gamma_{0x}^y \simeq +\frac{v_s}{2} \partial_y f, \quad (32)$$

$$\Gamma_{0x}^z \simeq +\frac{v_s}{2} \partial_z f. \quad (33)$$

La géométrie warp faible est donc contrôlée par les gradients transverses du profil :

$$\boxed{\nabla_\perp f = (0, \partial_y f, \partial_z f).} \quad (34)$$

La paroi de bulle est la région où

$$\nabla f \neq 0. \quad (35)$$

5 Condition de reconstruction affine RGH

On impose la condition cible :

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho \simeq \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g_{\text{Alc}}). \quad (36)$$

Si le fond est minkowskien, $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(\eta) = 0$ en coordonnées inertielles. On demande donc

$$\boxed{\Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) \simeq \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g_{\text{Alc}}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(\eta).} \quad (37)$$

En injectant l'ansatz (9), on obtient

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right) \approx \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g_{\text{Alc}}). \quad (38)$$

Les conditions linéaires principales sont donc :

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_0^I \Sigma_{yI}^x + A_y^I \Sigma_{0I}^x \right) \simeq -\frac{v_s}{2} \partial_y f, \quad (39)$$

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_0^I \Sigma_{zI}^x + A_z^I \Sigma_{0I}^x \right) \simeq -\frac{v_s}{2} \partial_z f, \quad (40)$$

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_0^I \Sigma_{xI}^y + A_x^I \Sigma_{0I}^y \right) \simeq +\frac{v_s}{2} \partial_y f, \quad (41)$$

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_0^I \Sigma_{xI}^z + A_x^I \Sigma_{0I}^z \right) \simeq +\frac{v_s}{2} \partial_z f. \quad (42)$$

Sous forme compacte :

$$\boxed{A_0^I \Sigma_{jI}^i + A_j^I \Sigma_{0I}^i \sim \frac{v_s}{\lambda} \partial_j f.} \quad (43)$$

La transition conceptuelle est donc :

$$\text{anti-poids RGH : } \Delta \Gamma_{00}^i, \quad (44)$$

$$\text{warp-like RGH : } \Delta \Gamma_{0j}^i. \quad (45)$$

6 Ansatz RGH–warp minimal

On définit une fonction de domaine mobile

$$A_D(t, \mathbf{x}) = A_D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_s(t)). \quad (46)$$

Pour un déplacement selon x :

$$\mathbf{X}_s(t) = (X_s(t), 0, 0), \quad \dot{X}_s(t) = v_s. \quad (47)$$

On pose alors

$$f_H(t, \mathbf{x}) := A_D(t, \mathbf{x}). \quad (48)$$

La métrique effective RGH–warp jouet devient

$$\boxed{ds_{\text{RGH-warp}}^2 = -c^2 dt^2 + (dx - v_s A_D(t, \mathbf{x}) dt)^2 + dy^2 + dz^2.} \quad (49)$$

Équivalamment,

$$g_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(H)}, \quad (50)$$

avec

$$h_{0x}^{(H)} = -v_s A_D, \quad (51)$$

$$h_{00}^{(H)} = v_s^2 A_D^2, \quad (52)$$

$$h_{ij}^{(H)} = 0. \quad (53)$$

Dans l'approximation faible :

$$h_{0x}^{(H)} \simeq -v_s A_D, \quad (54)$$

$$h_{00}^{(H)} = \mathcal{O}(v_s^2). \quad (55)$$

On peut donc écrire la condition minimale :

$$\boxed{\Delta \Gamma_{0j}^i(H) \sim v_s \partial_j A_D.} \quad (56)$$

7 Lecture ADM de la bulle

La métrique ADM s'écrit

$$ds^2 = -\alpha^2 c^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt). \quad (57)$$

Pour (49) :

$$\alpha = 1, \quad (58)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}, \quad (59)$$

$$\beta^x = -v_s A_D, \quad (60)$$

$$\beta^y = \beta^z = 0. \quad (61)$$

La bulle est donc essentiellement un champ de shift :

$$\boxed{\beta = (-v_s A_D, 0, 0)}. \quad (62)$$

La courbure extrinsèque est

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} (D_i \beta_j + D_j \beta_i - \partial_t \gamma_{ij}). \quad (63)$$

Avec $\alpha = 1$ et $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ indépendante du temps :

$$K_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i \beta_j + \partial_j \beta_i). \quad (64)$$

Selon la convention de signe ADM opposée, tous les K_{ij} changent de signe. Les invariants quadratiques employés plus bas sont inchangés quant au diagnostic principal.

Comme $\beta_x = -v_s A_D$, on obtient

$$K_{xx} = -v_s \partial_x A_D, \quad (65)$$

$$K_{xy} = K_{yx} = -\frac{v_s}{2} \partial_y A_D, \quad (66)$$

$$K_{xz} = K_{zx} = -\frac{v_s}{2} \partial_z A_D, \quad (67)$$

$$K_{yy} = K_{zz} = K_{yz} = 0. \quad (68)$$

La trace vaut

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} = K_{xx} = -v_s \partial_x A_D. \quad (69)$$

Le carré est

$$K_{ij} K^{ij} = K_{xx}^2 + 2K_{xy}^2 + 2K_{xz}^2, \quad (70)$$

$$= v_s^2 (\partial_x A_D)^2 + \frac{v_s^2}{2} (\partial_y A_D)^2 + \frac{v_s^2}{2} (\partial_z A_D)^2. \quad (71)$$

Donc

$$K^2 - K_{ij} K^{ij} = v_s^2 (\partial_x A_D)^2 - \left[v_s^2 (\partial_x A_D)^2 + \frac{v_s^2}{2} (\partial_y A_D)^2 + \frac{v_s^2}{2} (\partial_z A_D)^2 \right], \quad (72)$$

$$= -\frac{v_s^2}{2} [(\partial_y A_D)^2 + (\partial_z A_D)^2]. \quad (73)$$

C'est la formule centrale : la contrainte ne dépend que des gradients transverses.

8 Contrainte hamiltonienne et énergie requise

La contrainte hamiltonienne ADM est

$$^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho_E, \quad (74)$$

où ρ_E désigne ici une densité d'énergie, en J/m³.

Dans notre cas :

$$^{(3)}R = 0, \quad (75)$$

puisque $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Donc

$$\rho_E = \frac{c^4}{16\pi G} (K^2 - K_{ij}K^{ij}). \quad (76)$$

En réintroduisant les dimensions et en utilisant (73), on obtient la structure standard :

$$\boxed{\rho_E^{\text{req}} = -\text{racc}^4 32\pi G \frac{v_s^2}{c^2} [(\partial_y A_D)^2 + (\partial_z A_D)^2]}. \quad (77)$$

La densité de masse équivalente est

$$\rho_m^{\text{req}} = \frac{\rho_E^{\text{req}}}{c^2}, \quad (78)$$

soit

$$\boxed{\rho_m^{\text{req}} = -\text{racc}^2 32\pi G \frac{v_s^2}{c^2} [(\partial_y A_D)^2 + (\partial_z A_D)^2]}. \quad (79)$$

Le signe est inévitable dans ce modèle :

$$\boxed{\rho_E^{\text{req}} < 0 \quad \text{dans la paroi si} \quad \nabla_{\perp} A_D \neq 0}. \quad (80)$$

La traduction RGH est alors :

$$\boxed{\Theta_{00}^{\text{RGH}} \simeq -\frac{c^4}{32\pi G} \frac{v_s^2}{c^2} |\nabla_{\perp} A_D|^2}. \quad (81)$$

9 Estimation d'énergie totale

On prend une bulle de rayon caractéristique R et une paroi d'épaisseur Δ . Dans la paroi :

$$|\nabla A_D| \sim \frac{1}{\Delta}. \quad (82)$$

Le volume de paroi est approximativement

$$V_{\text{wall}} \sim 4\pi R^2 \Delta. \quad (83)$$

L'énergie négative totale est donc, à l'ordre de grandeur,

$$E_{-} \sim -\frac{c^4}{32\pi G} \frac{v_s^2}{c^2} \frac{1}{\Delta^2} (4\pi R^2 \Delta), \quad (84)$$

$$\sim -\frac{c^4}{8G} \frac{v_s^2}{c^2} \frac{R^2}{\Delta}. \quad (85)$$

Selon les conventions de profil, les facteurs numériques varient. On retiendra la loi d'échelle :

$$\boxed{E_{\neg} \sim -\frac{c^4}{G} \left(\frac{v_s}{c}\right)^2 \frac{R^2}{\Delta} \times C_f,} \quad (86)$$

où C_f est un coefficient de profil typiquement bien inférieur ou supérieur à 1 selon la forme précise de A_D .

Un calibrage souvent utilisé dans notre discussion est

$$E_{\neg} \sim -\frac{c^4}{G} \left(\frac{v_s}{c}\right)^2 \frac{R^2}{12\Delta}. \quad (87)$$

Pour

$$R = 10 \text{ m}, \quad \Delta = 1 \text{ m}, \quad v_s = 0.1c, \quad (88)$$

on obtient l'ordre de grandeur

$$E_{\neg} \sim -10^{43} \text{ J}. \quad (89)$$

Pour $v_s \sim c$:

$$E_{\neg} \sim -10^{45} \text{ J}. \quad (90)$$

Ce résultat ne réfute pas la construction mathématique, mais il rappelle que le coût géométrique d'une paroi warp est astronomique dans une lecture GR standard.

10 Équation gravitationnelle effective RGH

Dans le cadre RGH, on ne postule pas nécessairement une matière exotique fondamentale. On introduit plutôt une source géométrique effective :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(m)} + \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}. \quad (91)$$

Le secteur répulsif activé peut être écrit sous la forme

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}} = \mathcal{A} \left(\frac{W}{W_{\star}^{\text{eff}}} \right) \Theta_{\mu\nu}, \quad (92)$$

où

$$0 \leq \mathcal{A}(z) \leq 1, \quad \mathcal{A}(z) \rightarrow 0 \quad (z \ll 1), \quad \mathcal{A}(z) \rightarrow 1 \quad (z \gtrsim 1). \quad (93)$$

La décomposition minimale est

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} + \Theta_{\mu\nu}^{(A)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} + \Theta_{\mu\nu}^{(\times)}. \quad (94)$$

Pour un secteur de Weyl de type Maxwell :

$$F_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_{\mu}\phi_{\nu} - \partial_{\nu}\phi_{\mu}, \quad (95)$$

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\phi)} = F_{\mu\alpha}^{(\phi)} F_{\nu}^{(\phi)\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}^{(\phi)} F^{(\phi)\alpha\beta}. \quad (96)$$

Pour le secteur hypercomplexe de type Yang–Mills :

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}], \quad (97)$$

$$\Theta_{\mu\nu}^{(A)} = \text{Tr}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\text{Tr}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}). \quad (98)$$

Pour le secteur symplectique mixte :

$$B_{\mu\nu} = \Pi_{\text{obs}}(\Omega_{\text{mix}})_{\mu\nu}, \quad (99)$$

$$H_{\mu\nu\rho} = 3\nabla_{[\mu}B_{\nu\rho]}, \quad (100)$$

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\Omega_{\text{mix}})} = \frac{1}{2}H_{\mu\alpha\beta}H_{\nu}^{\alpha\beta} - \frac{1}{12}g_{\mu\nu}H_{\alpha\beta\gamma}H^{\alpha\beta\gamma}. \quad (101)$$

Le bloc croisé est défini par

$$\Theta_{\mu\nu}^{(\times)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (102)$$

La condition RGH-warp devient donc :

$$\boxed{\Theta_{00}^{\text{rep}} \simeq \Theta_{00}^{\text{warp}} < 0,} \quad (103)$$

avec en plus

$$\boxed{\Theta_{0x}^{\text{rep}} \neq 0, \quad \Theta_{ij}^{\text{rep}} \text{ anisotrope.}} \quad (104)$$

11 Sources nécessaires

Une configuration manipulable doit être sourcée. Les équations minimales sont

$$D_{\mu}F^{\mu\nu} = J_A^{\nu}, \quad (105)$$

$$d \star d\Omega = J_{\Omega}, \quad (106)$$

$$d \star F(\phi) = J_{\phi}. \quad (107)$$

Un lagrangien minimal de source peut être écrit

$$\mathcal{L}_{\text{src}} = g_A J_I^{\mu} A_{\mu}^I + g_{\Omega} J^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + g_{\phi} j^{\mu} \phi_{\mu}. \quad (108)$$

Pour une bulle mobile :

$$J_A^{\nu}(x) \longrightarrow J_A^{\nu}(t, \mathbf{x} - \mathbf{X}_s(t)), \quad (109)$$

$$J_{\Omega}(x) \longrightarrow J_{\Omega}(t, \mathbf{x} - \mathbf{X}_s(t)), \quad (110)$$

$$j^{\mu}(x) \longrightarrow j^{\mu}(t, \mathbf{x} - \mathbf{X}_s(t)). \quad (111)$$

La conservation covariante impose des contraintes du type

$$D_{\nu}J_A^{\nu} = 0, \quad (112)$$

ainsi que, pour le tenseur effectif total,

$$\nabla^{\mu} \left(T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{c^4}{8\pi G} \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}} \right) = 0. \quad (113)$$

Dans la version warp-like, la source doit donc produire non seulement une densité effective, mais aussi une densité de flux :

$$q_i := -\Theta_{\mu\nu} u^{\mu} h^{\nu}_i, \quad (114)$$

avec

$$q_x \neq 0. \quad (115)$$

12 NEC et conditions d'énergie

La condition d'énergie nulle, ou NEC, s'écrit

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0 \quad (116)$$

pour tout vecteur nul k^μ .

Dans une description effective RGH, on remplace

$$T_{\mu\nu} \longrightarrow T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{c^4}{8\pi G} \Theta_{\mu\nu}^{\text{rep}}. \quad (117)$$

Une violation effective contrôlée correspond à

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}}k^\mu k^\nu < 0 \quad (118)$$

dans une région limitée de l'espace-temps.

Pour un fluide isotrope, la NEC se lit

$$\rho + p \geq 0. \quad (119)$$

Mais une paroi warp n'est pas isotrope. On doit plutôt écrire

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \rho u_\mu u_\nu + p_x s_\mu^{(x)} s_\nu^{(x)} + p_y s_\mu^{(y)} s_\nu^{(y)} + p_z s_\mu^{(z)} s_\nu^{(z)} + 2q_{(\mu} u_{\nu)} + \pi_{\mu\nu}. \quad (120)$$

La NEC devient alors, selon les directions nulles,

$$\rho + p_i \pm 2q_i + \pi_{ii} \geq 0. \quad (121)$$

Pour une bulle warp-like, on s'attend à une violation effective dans au moins certaines directions :

$$\boxed{\exists k^\mu \text{ nul tel que } T_{\mu\nu}^{\text{eff}}k^\mu k^\nu < 0.} \quad (122)$$

Dans le langage RGH, l'objectif serait de rendre cette violation :

- i) localisée dans la paroi ;
- ii) activée seulement au-dessus d'un seuil ;
- iii) régularisée par le secteur interne ;
- iv) sans ghost ni instabilité de gradient ;
- v) compatible avec une énergie totale finie.

13 Causalité

La vitesse v_s de la bulle n'est pas automatiquement une vitesse locale de matière. Dans Alcubierre, le vaisseau peut rester localement au repos dans la bulle tandis que la géométrie globale transporte le domaine.

On distingue donc :

$$v := \text{vitesse apparente du profil } A_D, \quad (123)$$

$$v_{\text{signal}} := \text{vitesse de propagation physique d'une perturbation}, \quad (124)$$

$$v_{\text{car}} := \text{vitesse caractéristique des équations de champ RGH}. \quad (125)$$

Une condition causale prudente est

$$\boxed{v_{\text{signal}} \leq v_{\text{car}} \leq c.} \quad (126)$$

Pour une bulle subluminaire :

$$v_s < c, \quad (127)$$

le modèle reste au moins conceptuellement compatible avec une construction causale locale.

Pour une bulle superluminale :

$$v_s > c, \quad (128)$$

il faut démontrer que le déplacement apparent ne permet pas une transmission locale d'information hors du cône causal. Sinon, on risque des pathologies :

$$\text{superluminalité locale} \Rightarrow \text{violation causale possible}, \quad (129)$$

$$\text{boucles temporelles} \Rightarrow \text{instabilité globale}, \quad (130)$$

$$\text{horizons de bulle} \Rightarrow \text{problèmes de contrôle dynamique}. \quad (131)$$

Une condition de sécurité minimale est donc :

$$\boxed{\text{la RGH-warp-like acceptable doit être localement causale.}} \quad (132)$$

14 Stabilité

Pour être physiquement admissible, la configuration doit éviter :

- P1.** les ghosts ;
- P2.** les instabilités de gradient ;
- P3.** les modes tachyoniques incontrôlés ;
- P4.** une énergie non bornée inférieurement ;
- P5.** une divergence de paroi lorsque $\Delta \rightarrow 0$.

Au niveau du lagrangien effectif, on demande schématiquement

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{grav}} + \mathcal{L}_{\phi} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{\Omega} + \mathcal{L}_{\times} + \mathcal{L}_{\text{src}}. \quad (133)$$

La stabilité cinétique impose des signes corrects pour les termes quadratiques :

$$\mathcal{L}_{\phi} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(\phi)} F^{(\phi)\mu\nu}, \quad (134)$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (135)$$

$$\mathcal{L}_{\Omega} = +\frac{\kappa_{\Omega}}{2} d\Omega \wedge \star d\Omega. \quad (136)$$

Les termes croisés doivent rester contrôlés :

$$|\mathcal{L}_{\times}| \ll |\mathcal{L}_{\phi}| + |\mathcal{L}_A| + |\mathcal{L}_{\Omega}| \quad (137)$$

dans le régime perturbatif, ou bien être régularisés par une saturation de type Born-Infeld :

$$\mathcal{L} = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\mathcal{I}}{b^2}} \right), \quad (138)$$

où \mathcal{I} est un invariant positif du secteur interne.

Une condition utile est

$$\mathcal{I} < \mathcal{I}_{\star} < \infty. \quad (139)$$

15 Bulle mobile contre bulle statique : tableau de synthèse

Aspect	Bulle anti-poids RGH	Bulle RGH–Alcubierre-like
Objet principal	Annulation locale du poids	Shift spatial / entraînement de référentiel
Composante clé	$\Delta\Gamma_{00}^i$	$h_{0i}, \Delta\Gamma_{0j}^i$
Profil	Domaine statique $A_D(x)$	Domaine mobile $A_D(t, \mathbf{x} - \mathbf{X}_s(t))$
Source	Courants J_A, J_Ω, J_ϕ stationnaires	Courants mobiles avec flux
Énergie	Répulsion effective locale	Énergie effective négative de paroi
Flux	Non nécessaire au premier ordre	Nécessaire : $\Theta_{0x} \neq 0$
Anisotropie	Radiale locale	Paroi anisotrope transverse
Causalité	Locale, subluminaire	Délicate si $v_s \geq c$
Statut	Modèle local anti-pesanteur	Modèle jouet warp-like

16 Critères minimaux pour une annexe future

Une version plus complète devrait établir les propositions suivantes.

16.1 Critère 1 : existence d’une métrique effective

Il faut montrer qu’il existe une métrique émergente

$$g_{\mu\nu}^{\text{eff}} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(H)} \quad (140)$$

telle que

$$h_{0x}^{(H)} = -v_s A_D(t, \mathbf{x}). \quad (141)$$

16.2 Critère 2 : reconstruction affine

Il faut résoudre

$$\frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right) = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g_{\text{RGH-warp}}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(\eta). \quad (142)$$

16.3 Critère 3 : énergie effective de paroi

Il faut obtenir

$$\Theta_{00}^{\text{RGH}} \simeq -\frac{c^4}{32\pi G} \frac{v_s^2}{c^2} |\nabla_\perp A_D|^2. \quad (143)$$

16.4 Critère 4 : flux géométrique

Il faut obtenir

$$\Theta_{0x}^{\text{RGH}} \neq 0. \quad (144)$$

16.5 Critère 5 : conservation

Il faut satisfaire

$$\nabla^\mu \left(T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{c^4}{8\pi G} \Theta_{\mu\nu}^{\text{RGH}} \right) = 0. \quad (145)$$

16.6 Critère 6 : énergie finie

Il faut

$$E_{\text{tot}} = \int_{\Sigma} \rho_E^{\text{eff}} \sqrt{\gamma} d^3x \quad (146)$$

fini, avec régularisation de la paroi :

$$\Delta > 0. \quad (147)$$

16.7 Critère 7 : causalité locale

Il faut établir

$$v_{\text{car}} \leq c \quad (148)$$

pour les modes physiques propagatifs.

17 Conclusion

La bulle anti-poids RGH et la bulle d'Alcubierre ne sont pas le même objet. La première vise une compensation locale du poids par une correction de type

$$\Delta \Gamma_{00}^i. \quad (149)$$

La seconde exige une géométrie mobile avec shift spatial :

$$g_{0x} = -v_s f. \quad (150)$$

Le pont minimal est la condition de reconstruction affine :

$$\boxed{\Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g_{\text{warp}}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(\eta).} \quad (151)$$

Dans l'approximation faible, cela revient à demander

$$\boxed{\Delta \Gamma_{0j}^i(H) \sim v_s \partial_j A_D.} \quad (152)$$

Le diagnostic ADM montre ensuite que la paroi exige une densité effective négative :

$$\boxed{\rho_E^{\text{req}} = -\text{racc}^4 32\pi G \frac{v_s^2}{c^2} |\nabla_{\perp} A_D|^2.} \quad (153)$$

La RGH peut reformuler cette énergie non pas comme matière exotique fondamentale, mais comme correction géométrique effective :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(m)} + \Theta_{\mu\nu}^{\text{RGH}}. \quad (154)$$

Mais elle doit alors assumer simultanément :

$$\Theta_{00}^{\text{RGH}} < 0, \quad (155)$$

$$\Theta_{0x}^{\text{RGH}} \neq 0, \quad (156)$$

$$\Theta_{ij}^{\text{RGH}} \text{ anisotrope}, \quad (157)$$

$$E_{\text{tot}} < \infty, \quad (158)$$

$$\text{pas de ghost et pas d'instabilité}, \quad (159)$$

$$v_{\text{signal}} \leq c. \quad (160)$$

Le résultat final est donc :

Une bulle RGH–Alcubierre-like est formalisable comme modèle jouet,

(161)

mais

sa réalisation physique exigerait une paroi hypercomplexe anisotrope,
 $\Theta_{00} < 0, \quad \Theta_{0x} \neq 0,$
stable et causale.

(162)

Autrement dit : on peut aligner les équations, mais la cohérence physique impose encore de satisfaire simultanément les contraintes de causalité, d'énergie et de stabilité.

A Annexe A : correction de la formule sans approximation faible

Dans la métrique complète

$$ds^2 = -(c^2 - v_s^2 f^2) dt^2 - 2v_s f dt dx + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (163)$$

les termes d'ordre v_s^2 modifient g_{00} :

$$\partial_i g_{00} = 2v_s^2 f \partial_i f. \quad (164)$$

Ils induisent des composantes supplémentaires du type

$$\Gamma_{00}^i \sim -v_s^2 f \partial_i f + \text{exttermestemporels}. \quad (165)$$

Ces composantes ressemblent davantage à une accélération de paroi. Elles s'ajoutent au shift linéaire. Dans une version complète, on doit donc traiter simultanément :

$$\Delta \Gamma_{0j}^i(H) \sim v_s \partial_j f, \quad (166)$$

$$\Delta \Gamma_{00}^i(H) \sim v_s^2 f \partial_i f. \quad (167)$$

B Annexe B : profil lisse possible

Un profil de bulle standard peut être pris sous la forme

$$f(r_s) = \frac{\tanh[\sigma(r_s + R)] - \tanh[\sigma(r_s - R)]}{2 \tanh(\sigma R)}. \quad (168)$$

La largeur de paroi est alors approximativement

$$\Delta \sim \sigma^{-1}. \quad (169)$$

Le gradient radial vaut

$$\partial_i f = f'(r_s) \frac{x_i - X_{s,i}}{r_s}. \quad (170)$$

Les gradients transverses sont

$$\partial_y f = f'(r_s) \frac{y}{r_s}, \quad (171)$$

$$\partial_z f = f'(r_s) \frac{z}{r_s}. \quad (172)$$

La densité requise devient

$$\rho_E^{\text{req}} = -$$

$$\text{racc}^4 32\pi G \frac{v_s^2}{c^2} [f'(r_s)]^2 \frac{y^2+z^2}{r_s^2}. \quad (173)$$

Elle est maximale dans la paroi et dans les directions transverses.

C Annexe C : forme compacte du programme RGH–warp

Le programme mathématique peut être résumé ainsi :

$$\text{Donnée cible :} \quad g_{\mu\nu}^{\text{target}} = g_{\mu\nu}^{\text{Alc}}, \quad (174)$$

$$\text{Connexion cible :} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g^{\text{target}}), \quad (175)$$

$$\text{Correction requise :} \quad \Delta\Gamma_{\mu\nu,\text{req}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g^{\text{target}}) - \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g^{(0)}), \quad (176)$$

$$\text{Ansatz RGH :} \quad \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right), \quad (177)$$

$$\text{Reconstruction :} \quad \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \Delta\Gamma_{\mu\nu,\text{req}}^\rho, \quad (178)$$

$$\text{Équation effective :} \quad G_{\mu\nu}(g^{\text{target}}) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(m)} + \Theta_{\mu\nu}^{\text{RGH}}, \quad (179)$$

$$\text{Source géométrique requise :} \quad \Theta_{\mu\nu}^{\text{RGH}} = G_{\mu\nu}(g^{\text{target}}) - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (180)$$

$$\text{Tests :} \quad E_{\text{tot}} < \infty, \quad T_{\mu\nu}^{\text{eff}} k^\mu k^\nu < 0 \text{ contrôlé}, \quad v_{\text{car}} \leq c. \quad (181)$$

Production et porteurs possibles d'une charge hypercomplexe

Note autonome dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe

Laurent Besson — idée originale
HAL9000 / ChatGPT — mise en forme et développement

1 mai 2026 — heure de Paris

Résumé

Cette note rassemble une intuition théorique issue du cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH/HGR) : un champ hypercomplexe ne serait pas une nouvelle matière ordinaire, mais une connexion interne non commutative portée par une fibre quaternionique attachée à l'espace-temps. Produire un tel champ revient alors à créer une courbure interne, ou holonomie non triviale, dans cette fibre. On formalise l'idée d'une source hypercomplexe, on identifie le courant associé, puis on discute les candidats physiques capables de porter une telle charge : spin cohérent, secteur faible $SU(2)_L$, neutrinos, neutrinos stériles, Higgs comme verrouillage interne, condensats topologiques et secteur sombre fermionique. Le document ne prétend pas établir une théorie complète ; il fixe une architecture minimale pour conserver une trace exploitable et testable.

Table des matières

1	Statut du document	1
2	Cadre géométrique minimal	2
2.1	Espace fibré hypercomplexe	2
2.2	Connexion totale	2
3	Qu'est-ce qu'un champ hypercomplexe ?	2
3.1	La courbure interne	2
3.2	Holonomie interne	3
4	Produire le champ : source et courant hypercomplexe	3
4.1	Équation de champ minimale	3
4.2	Définition variationnelle de la charge	3
4.3	Courant spinoriel minimal	4
5	La pompe de frustration hypercomplexe	4

5.1	Deux transports incompatibles	4
5.2	Action minimale à deux champs	5
5.3	Non-commutativité génératrice	5
6	Projection vers la géométrie observable	5
6.1	Connexion affine effective	5
6.2	Limite non relativiste	6
7	Qui porte la charge hypercomplexe ?	6
7.1	Réponse abstraite	6
7.2	Candidat fondamental : champ spinoriel	7
8	Candidats dans le bestiaire des particules	7
8.1	Le secteur faible $SU(2)_L$	7
8.2	Neutrino gauche	7
8.3	Neutrino stérile	8
8.4	Higgs : porteur ou verrouilleur ?	8
8.5	Gluons : cousins, mais mauvais suspects directs	8
9	Classement des suspects	8
10	Conditions expérimentales ou phénoménologiques	9
10.1	Cohérence interne non nulle	9
10.2	Effet géométrique projeté	9
10.3	Courbure interne détectable indirectement	9
10.4	Signature gravitationnelle effective	9
11	Phrase synthèse	9
12	Ce qui est établi et ce qui reste ouvert	10
12.1	Établi dans ce modèle	10
12.2	Ouvert	10

1 Statut du document

Ce texte est une note de travail autonome.

Il distingue volontairement :

- les **hypothèses** : ce que l'on postule ;

- les **modèles** : les équations minimales utilisées ;
- les **intuitions** : les images physiques guidant la construction ;
- les **résultats formels provisoires** : les relations qui suivent effectivement des hypothèses posées.

Le but n'est pas d'affirmer que la charge hypercomplexe est déjà observée, mais de préciser ce que signifierait une telle charge, comment elle pourrait être sourcée, et quels objets connus ou hypothétiques ressemblent le plus à des porteurs naturels.

2 Cadre géométrique minimal

2.1 Espace fibré hypercomplexe

On considère un espace total de type

$$E = M_4 \times \mathbb{H}, \quad (1)$$

où M_4 est l'espace-temps observable et \mathbb{H} une fibre interne hypercomplexe, idéalement quaternionique.

Les unités imaginaires quaternioniques satisfont

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad (2)$$

avec non-commutativité

$$ij = k, \quad ji = -k. \quad (3)$$

Les quaternions unitaires sont reliés à $SU(2)$:

$$SU(2) \simeq \{q \in \mathbb{H}, |q| = 1\}. \quad (4)$$

Cette relation fait apparaître un lien naturel entre fibre quaternionique, spin, doublets internes et structures non abéliennes de type $SU(2)$.

2.2 Connexion totale

On introduit une dérivée covariante totale

$$D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + A_\mu, \quad (5)$$

où :

- ω_μ est la connexion spinorielle/gravitationnelle usuelle ;
- W_μ est un champ de Weyl ou de jauge d'échelle ;
- A_μ est une connexion interne hypercomplexe.

La connexion interne s'écrit

$$A_\mu = A_\mu^I T_I, \quad (6)$$

où les T_I sont des générateurs internes, par exemple associés à une algèbre de type $\mathfrak{su}(2)$ ou quaternionique :

$$[T_I, T_J] = f_{IJ}^K T_K. \quad (7)$$

3 Qu'est-ce qu'un champ hypercomplexe ?

3.1 La courbure interne

La courbure associée à la connexion A_μ est

$$F_{\mu\nu}^{(H)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (8)$$

En composantes :

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + f_{JK}^I A_\mu^J A_\nu^K. \quad (9)$$

Le point essentiel est le suivant :

produire un champ hypercomplexe physique $\iff F_{\mu\nu}^{(H)} \neq 0$.

(10)

Un potentiel pur jauge peut exister sans courbure physique locale. La grandeur véritablement significative est donc la courbure interne, ou l'holonomie associée.

3.2 Holonomie interne

Pour une boucle fermée γ , on définit

$$U_\gamma = \mathcal{P} \exp \left(\oint_\gamma A_\mu dx^\mu \right), \quad (11)$$

où \mathcal{P} désigne l'ordre de chemin.

Si

$$U_\gamma \neq \mathbf{1}, \quad (12)$$

alors le transport interne autour de la boucle ne se referme pas trivialement. Il existe une holonomie hypercomplexe non triviale.

On peut donc formuler l'intuition centrale :

un champ hypercomplexe est la mémoire géométrique d'un transport interne non refermable.

(13)

4 Produire le champ : source et courant hypercomplexe

4.1 Équation de champ minimale

L'équation dynamique naturelle du secteur interne est de type Yang–Mills :

$$D_\mu F^{\mu\nu} = J_A^\nu. \quad (14)$$

En composantes :

$$D_\mu F^{\mu\nu I} = \partial_\mu F^{\mu\nu I} + f_{JK}^I A_\mu^J F^{\mu\nu K} = J_A^{\nu I}. \quad (15)$$

La question centrale devient alors :

quel objet physique peut porter $J_A^{\nu I}$?

(16)

4.2 Définition variationnelle de la charge

Si la matière ou un secteur géométrique possède une action S_{mat} dépendant de A_μ^I , alors le courant hypercomplexe est défini par

$$J_A^{\mu I} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta A_{\mu I}}. \quad (17)$$

Cette équation est importante : elle dit que la charge hypercomplexe n'est pas portée par la masse en tant que telle, mais par tout degré de liberté qui transforme non trivialement sous la fibre interne.

4.3 Courant spinoriel minimal

Pour un champ spinoriel Ψ dans une représentation interne \mathcal{R}_H , on peut écrire

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + g_H A_\mu^I T_I \right) \Psi. \quad (18)$$

Le courant associé est alors

$$J_A^{\mu I} = g_H \bar{\Psi} \gamma^\mu T^I \Psi. \quad (19)$$

C'est l'analogue non abélien hypercomplexe du courant électromagnétique

$$j_{\text{EM}}^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (20)$$

La différence essentielle est que le courant hypercomplexe porte un indice interne I :

$$I = 1, 2, 3, \quad (21)$$

associé aux directions imaginaires de la fibre.

5 La pompe de frustration hypercomplexe

5.1 Deux transports incompatibles

Une façon élégante de produire une courbure interne est de forcer deux règles de transport incompatibles. On introduit deux connexions internes :

$$A_\mu, \quad B_\mu. \quad (22)$$

Leurs courbures sont

$$F_{\mu\nu}^{(A)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (23)$$

$$F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu]. \quad (24)$$

On définit le commutateur croisé

$$C_{\mu\nu} = [A_\mu, B_\nu]. \quad (25)$$

Si

$$C_{\mu\nu} \neq 0, \quad (26)$$

les deux transports internes ne sont pas compatibles.

5.2 Action minimale à deux champs

Un modèle effectif minimal est

$$S[A, B, g] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(A)\mu\nu} \right) - \frac{1}{4} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(B)} F^{(B)\mu\nu} \right) - \frac{\epsilon}{2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(A)} F^{(B)\mu\nu} \right) + \lambda \text{Tr} ([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]) \right]. \quad (27)$$

Le terme

$$\lambda \text{Tr} ([A_\mu, B_\nu][A^\mu, B^\nu]) \quad (28)$$

mesure l'énergie d'incompatibilité interne.

5.3 Non-commutativité génératrice

Si

$$A_\mu = A_\mu^1 T_1, \quad B_\nu = B_\nu^2 T_2, \quad (29)$$

alors

$$[A_\mu, B_\nu] = A_\mu^1 B_\nu^2 [T_1, T_2] = A_\mu^1 B_\nu^2 f_{12}^3 T_3. \quad (30)$$

Ainsi deux excitations internes dans deux directions différentes peuvent générer une troisième direction :

$$\boxed{T_1 + T_2 \longrightarrow [T_1, T_2] \sim T_3.} \quad (31)$$

C'est le coeur de la pompe de frustration hypercomplexe :

$$\boxed{\text{on ne fabrique pas directement la courbure ; on fabrique une incompatibilité qui la force.}} \quad (32)$$

6 Projection vers la géométrie observable

6.1 Connexion affine effective

Pour que le champ interne devienne gravitationnellement observable, il doit se projeter sur la connexion affine :

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H). \quad (33)$$

Un ansatz minimal pour la contribution hypercomplexe est

$$\boxed{\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda g}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right).} \quad (34)$$

Le tenseur $\Sigma_{\nu I}^\rho$ joue le rôle d'une soudure locale entre la direction interne I et le fibré tangent observable.

6.2 Limite non relativiste

Dans la limite de champ faible et pour une particule lente :

$$a^i \simeq -c^2 \Gamma_{00,\text{eff}}^i. \quad (35)$$

La contribution hypercomplexe donne donc

$$a_H^i = -c^2 \Delta \Gamma_{00}^i(H). \quad (36)$$

Pour compenser localement le poids au-dessus d'une masse source M , il faudrait

$$a_H^r(r_0) = +\frac{GM}{r_0^2}, \quad (37)$$

soit

$$-c^2 \Delta \Gamma_{00}^r(H)|_{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}. \quad (38)$$

Avec l'ansatz

$$A_0^I(r) = Q(r)n^I, \quad \Sigma_{0I}^r(r) = S(r)n_I, \quad (39)$$

on obtient

$$\Delta \Gamma_{00}^r(H) = \lambda_g Q(r)S(r). \quad (40)$$

La condition de compensation devient

$$\boxed{\lambda_g Q(r_0)S(r_0) = -\frac{GM}{c^2 r_0^2}.} \quad (41)$$

Pour la Terre, l'ordre de grandeur du membre de droite est

$$\frac{g}{c^2} \sim 1.1 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1}. \quad (42)$$

Ce nombre est petit, mais il correspond à une correction de connexion affine orientée, pas à une simple force classique.

7 Qui porte la charge hypercomplexe ?

7.1 Réponse abstraite

Le porteur d'une charge hypercomplexe est tout objet qui transforme non trivialement sous la fibre interne :

$$\Psi \mapsto \exp\left(\alpha^I(x)T_I\right)\Psi. \quad (43)$$

On peut résumer :

$$\boxed{\text{la charge hypercomplexe n'est pas portée par la masse ;}} \quad (44)$$

$$\boxed{\text{elle est portée par une orientation interne cohérente de la matière ou du vide géométrique.}} \quad (45)$$

7.2 Candidat fondamental : champ spinoriel

Le porteur minimal est un champ spinoriel dans une représentation interne :

$$\Psi(x) \in \mathcal{R}_{\text{Lorentz}} \otimes \mathcal{R}_H. \quad (46)$$

Le courant est alors

$$J_A^{\mu I} = g_H \bar{\Psi} \gamma^\mu T^I \Psi. \quad (47)$$

Si les orientations internes sont aléatoires, on attend

$$\langle J_A^{\mu I} \rangle \simeq 0. \quad (48)$$

Pour un effet macroscopique, il faut au contraire une cohérence collective :

$$\boxed{\langle J_A^{\mu I} \rangle_D \neq 0.} \quad (49)$$

8 Candidats dans le bestiaire des particules

8.1 Le secteur faible $SU(2)_L$

Le candidat mathématique le plus proche dans le Modèle Standard est le secteur faible :

$$SU(2)_L. \quad (50)$$

Les doublets gauches

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (51)$$

portent déjà une charge non abélienne de type $SU(2)$.

Le Higgs est également un doublet :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Cependant, il faut distinguer :

$$SU(2)_L \quad \text{et} \quad SU(2)_H. \quad (53)$$

Si la fibre hypercomplexe correspond exactement à $SU(2)_L$, la RGH se raccorde fortement au Modèle Standard. Si elle correspond à un nouveau secteur $SU(2)_H$, alors la charge hypercomplexe est une charge cachée indépendante.

8.2 Neutrino gauche

Le neutrino gauche est un candidat proche car il est :

$$\text{spin } 1/2, \quad \text{neutre électriquement,} \quad \text{chiral,} \quad \text{porteur de } SU(2)_L. \quad (54)$$

Il n'est pas automatiquement porteur de charge hypercomplexe indépendante, mais il est l'un des objets connus les plus proches de la structure recherchée.

8.3 Neutrino stérile

Le meilleur candidat caché est un neutrino stérile hypothétique ν_s chargé sous un secteur $SU(2)_H$:

$$D_\mu \nu_s = \left(\partial_\mu + g_H A_\mu^I T_I \right) \nu_s. \quad (55)$$

Il porterait alors

$$J_H^{\mu I} = g_H \bar{\nu}_s \gamma^\mu T^I \nu_s. \quad (56)$$

On peut écrire :

$$\boxed{\nu_s \text{ est un candidat naturel à charge hypercomplexe cachée.}} \quad (57)$$

8.4 Higgs : porteur ou verrouilleur ?

Le Higgs n'est pas forcément le meilleur porteur direct de charge hypercomplexe, mais il est un excellent candidat de verrouillage interne.

Son vide sélectionne une direction :

$$\langle \Phi \rangle \neq 0. \quad (58)$$

Dans une lecture RGH, un tel mécanisme pourrait être analogue à une soudure ou un verrouillage de la fibre interne :

$$\Phi \sim \text{orientation interne}, \quad (59)$$

tandis que

$$\Sigma_{\nu I}^\rho \quad (60)$$

jouerait le rôle de projection vers la géométrie observable.

8.5 Gluons : cousins, mais mauvais suspects directs

Les gluons portent une charge non abélienne $SU(3)$:

$$SU(3)_c. \quad (61)$$

Ils sont donc mathématiquement proches de l'idée de courbure non abélienne. Cependant :

$$SU(3)_c \neq SU(2)_H \simeq \mathbb{H}_{\text{unitaires}}, \quad (62)$$

et la couleur est confinée.

Les gluons sont donc de bons cousins mathématiques, mais probablement pas les porteurs directs les plus naturels d'une charge hypercomplexe RGH.

9 Classement des suspects

On obtient le classement provisoire suivant :

1. **Neutrino stérile ou fermion sombre** : meilleur candidat caché pour une charge indépendante $SU(2)_H$.

2. **Neutrino gauche** : meilleur candidat connu proche, via chirality et $SU(2)_L$.
3. **Higgs** : excellent candidat de verrouillage/orientation interne, plutôt que porteur direct.
4. **Condensat de spin** : meilleur candidat macroscopique effectif.
5. **Défaut topologique ou vortex de fibre** : meilleur candidat géométrique non particulière.
6. **Secteur sombre fermionique** : meilleur candidat RGH pur si la charge est réellement nouvelle.

10 Conditions expérimentales ou phénoménologiques

Pour qu'une charge hypercomplexe soit pertinente, il faudrait observer au moins l'une des conditions suivantes.

10.1 Cohérence interne non nulle

$$\langle \bar{\Psi} \gamma^\mu T^I \Psi \rangle \neq 0. \quad (63)$$

10.2 Effet géométrique projeté

$$A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho \neq 0. \quad (64)$$

10.3 Courbure interne détectable indirectement

$$\text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{(H)} F^{(H)\mu\nu} \right) \neq 0. \quad (65)$$

10.4 Signature gravitationnelle effective

$$\Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) \neq 0, \quad (66)$$

ou, dans une équation gravitationnelle effective,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{\text{mat}} + \Theta_{\mu\nu}^{(H)} + \Theta_{\mu\nu}^{(\text{mix})}. \quad (67)$$

11 Phrase synthèse

La conclusion provisoire est :

$$\boxed{\text{la charge hypercomplexe indépendante reste à trouver.}} \quad (68)$$

Mais elle possède des cousins très proches :

$$\boxed{\text{spin, } SU(2)_L, \text{ neutrinos, Higgs, condensats de spin, défauts topologiques.}} \quad (69)$$

La version la plus compacte de l'idée est :

$$J_{\text{ext}} \longrightarrow (A_\mu, B_\mu) \longrightarrow [A_\mu, B_\nu] \neq 0 \longrightarrow F_{\mu\nu}^{(H)} \neq 0 \longrightarrow \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) \longrightarrow a_H^i = -c^2 \Delta\Gamma_{00}^i. \quad (70)$$

Ou, en formulation conceptuelle :

Produire un champ hypercomplexe revient à générer une holonomie non commutative confinée dans la fibre interne, puis à la projeter sur la géométrie observable.

12 Ce qui est établi et ce qui reste ouvert

12.1 Établi dans ce modèle

- Une charge hypercomplexe peut être définie variationnellement par rapport à la connexion A_μ^I .
- Le courant spinoriel $g_H \bar{\Psi} \gamma^\mu T^I \Psi$ est le porteur minimal le plus naturel.
- La non-commutativité interne peut générer une courbure via des commutateurs.
- L'effet gravitationnel observable nécessite une projection base-fibre $\Sigma_{\nu I}^\rho$.

12.2 Ouvert

- Identifier si $SU(2)_H$ est distinct ou relié à $SU(2)_L$.
- Déterminer si un neutrino stérile ou un fermion sombre peut porter Q_H .
- Construire une action complète stable couplant A_μ , $\Sigma_{\nu I}^\rho$, W_μ et la matière.
- Dériver des signatures observationnelles falsifiables.
- Établir si une cohérence macroscopique de charge hypercomplexe peut exister sans instabilité.

Conclusion courte

Si la RGH possède une charge hypercomplexe indépendante, le porteur le plus plausible n'est pas la masse, ni l'énergie brute, mais une orientation interne cohérente, probablement spinorielle ou fermionique, couplée à une connexion quaternionique.

Le candidat connu le plus proche est le secteur faible, en particulier les neutrinos. Le candidat au-delà du Modèle Standard le plus séduisant est le neutrino stérile ou un fermion sombre portant une charge $SU(2)_H$.

La gloire attendra la vérification expérimentale ; mais au moins, la porte est ouverte.

Neutrinos galactiques comme sources possibles d'une charge hypercomplexe

Pré-papier autonome dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe

Laurent Besson — idée originale
HAL9000 / ChatGPT — structuration et rédaction

2 mai 2026 — heure de Paris

Résumé

On propose une clarification conceptuelle dans le cadre de la Relativité Générale Hypercomplexe (RGH/HGR) : les neutrinos émis par les centres galactiques ne doivent pas être identifiés à la masse ou à l'énergie du halo hypercomplexe, car leur densité d'énergie libre est beaucoup trop faible pour reproduire directement une courbe de rotation plate. En revanche, ils peuvent jouer un rôle plus subtil : celui de source ou d'amorce d'une charge hypercomplexe, c'est-à-dire d'un courant interne couplé à une connexion quaternionique A_μ^I . Dans cette lecture, les neutrinos ne sont pas le halo ; ils sourcent un secteur géométrique interne dont la réponse effective peut former un profil de type $\rho_H(r) \propto r^{-2}$. Le halo est alors interprété comme un feu géométrique ; le flux neutrino comme l'allumette.

Table des matières

1	Statut et idée centrale	2
2	Motivation astrophysique	2
3	Rappel : profil de halo donnant une courbe plate	3
4	Pourquoi les neutrinos ne peuvent pas être le halo en énergie directe	4
5	Hypothèse RGH : les neutrinos comme sources, non comme halo	4
6	Réponse hypercomplexe du vide : susceptibilité	5
7	Modèle minimal source–champ–halo	6
7.1	Action effective	6
7.2	Énergie effective du secteur hypercomplexe	6
8	Projection gravitationnelle observable	6
9	Pourquoi le neutrino est un bon candidat source	7

10 Différence entre énergie du flux et efficacité de source	7
11 Prédictions qualitatives possibles	8
12 Conditions de cohérence	8
13 Résumé formel	8
14 Conclusion	9

1 Statut et idée centrale

Ce texte est un pré-papier de travail. Il ne constitue pas une preuve observationnelle, mais une architecture théorique minimale.

L'idée centrale est la suivante :

Les neutrinos galactiques ne sont pas le halo hypercomplexe ; ils peuvent être une source de charge hypercomplexe capable d'amorcer ou d'alimenter un champ géométrique interne.

La distinction est essentielle :

$$\rho_H \neq \rho_\nu, \quad (1)$$

mais possiblement

$$J_\nu^{\mu I} \longrightarrow A_\mu^I \longrightarrow F_{\mu\nu}^{(H)} \longrightarrow \rho_H^{\text{eff}}. \quad (2)$$

Autrement dit, les neutrinos ne fournissent pas nécessairement l'énergie gravitationnelle du halo. Ils peuvent fournir un *courant source* pour un secteur hypercomplexe dont l'énergie effective est géométrique.

2 Motivation astrophysique

Les centres galactiques contiennent généralement :

- une forte densité stellaire ;
- des populations d'objets compacts ;
- des supernovae passées ou futures ;
- des rayons cosmiques ;
- un trou noir massif central ;
- des régions d'accrétion et de fortes interactions gravitationnelles.

Ces ingrédients sont naturellement associés à des processus producteurs de neutrinos.

On considère donc une galaxie dont le centre émet un flux effectif de neutrinos avec une luminosité totale L_ν . Si l'émission est approximativement isotrope à grande distance, le flux d'énergie est

$$F_\nu(r) = \frac{L_\nu}{4\pi r^2}. \quad (3)$$

L'énergie volumique associée à un flux libre relativiste vaut

$$u_\nu(r) = \frac{F_\nu(r)}{c} = \frac{L_\nu}{4\pi r^2 c}. \quad (4)$$

La densité massique équivalente est donc

$$\rho_\nu(r) = \frac{u_\nu}{c^2} = \frac{L_\nu}{4\pi r^2 c^3}. \quad (5)$$

On obtient bien un profil

$$\rho_\nu(r) \propto \frac{1}{r^2}. \quad (6)$$

Ce point est séduisant, car le profil

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (7)$$

est précisément celui qui donne naturellement une courbe de rotation plate.

3 Rappel : profil de halo donnant une courbe plate

On suppose un halo effectif sphérique de densité

$$\rho_H(r) = \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2}. \quad (8)$$

La masse intérieure vaut

$$M_H(r) = 4\pi \int_0^r \rho_H(r') r'^2 dr'. \quad (9)$$

En injectant le profil précédent :

$$M_H(r) = 4\pi \rho_0 r_0^2 \int_0^r dr' = 4\pi \rho_0 r_0^2 r. \quad (10)$$

Donc

$$M_H(r) \propto r. \quad (11)$$

La vitesse circulaire vérifie

$$v_c^2(r) = \frac{GM_H(r)}{r}, \quad (12)$$

d'où

$$v_c^2(r) = 4\pi G \rho_0 r_0^2 = \text{constante}. \quad (13)$$

Ainsi :

$$\boxed{\rho_H(r) \propto r^{-2} \implies v_c(r) \simeq \text{constante}.} \quad (14)$$

4 Pourquoi les neutrinos ne peuvent pas être le halo en énergie directe

La tentation immédiate serait d'identifier :

$$\rho_H(r) = \rho_\nu(r). \quad (15)$$

Cette identification est toutefois trop forte.

Pour une courbe de rotation plate de vitesse v_c , la densité dynamique requise est

$$\rho_H(r) = \frac{v_c^2}{4\pi G r^2}. \quad (16)$$

Si on impose que cette densité soit directement celle d'un flux neutrino libre :

$$\frac{L_\nu}{4\pi r^2 c^3} = \frac{v_c^2}{4\pi G r^2}, \quad (17)$$

les facteurs $4\pi r^2$ s'annulent et il reste

$$\boxed{L_{\nu,\text{req}} = \frac{v_c^2 c^3}{G}}. \quad (18)$$

Pour une galaxie de type Voie Lactée, avec

$$v_c \simeq 220 \text{ km s}^{-1}, \quad (19)$$

on obtient

$$L_{\nu,\text{req}} \simeq 2 \times 10^{46} \text{ W}. \quad (20)$$

Ce nombre est gigantesque. Il est sans commune mesure avec une luminosité galactique stationnaire ordinaire.

Conclusion :

Les neutrinos ordinaires, considérés comme densité d'énergie libre, ne peuvent pas fournir directement le halo dynamique d'une grande galaxie.

Donc l'hypothèse naïve

$$\boxed{\text{halo} = \text{énergie directe des neutrinos}} \quad (21)$$

doit être rejetée dans ce modèle.

5 Hypothèse RGH : les neutrinos comme sources, non comme halo

La version RGH intéressante est différente.

On postule que certains neutrinos, ou un secteur neutrino étendu, portent une charge hypercomplexe. Ils possèdent alors un courant interne

$$J_\nu^{\mu I} = g_H \bar{\nu} \gamma^\mu T^I \nu, \quad (22)$$

où :

- g_H est un couplage hypercomplexe effectif ;
- T^I sont les générateurs internes de la fibre hypercomplexe ;
- $I = 1, 2, 3$ désigne les directions quaternioniques internes.

Ce courant source la connexion hypercomplexe :

$$D_\mu F^{\mu\nu I} = J_\nu^I. \quad (23)$$

Pour éviter une confusion d'indice, on notera plutôt

$$D_\mu F^{\mu\alpha I} = J_\nu^{\alpha I}. \quad (24)$$

La courbure interne est

$$F_{\mu\nu}^{(H)} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (25)$$

En composantes :

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + f_{JK}^I A_\mu^J A_\nu^K. \quad (26)$$

La chaîne physique proposée est alors :

$$\boxed{\nu \longrightarrow J_\nu^{\mu I} \longrightarrow A_\mu^I \longrightarrow F_{\mu\nu}^{(H)} \longrightarrow \rho_H^{\text{eff}}.} \quad (27)$$

Les neutrinos ne sont donc pas la masse cachée. Ils sont une source ou une amorce de la structure géométrique cachée.

6 Réponse hypercomplexe du vide : susceptibilité

Pour rendre le mécanisme explicite, on introduit une susceptibilité hypercomplexe χ_H .

Dans une approximation linéaire effective :

$$X(r) = \chi_H \int G_H(r, r') J_\nu(r') d^3 r', \quad (28)$$

où :

- $X(r)$ est un invariant interne effectif ;
- $G_H(r, r')$ est une fonction de Green du secteur hypercomplexe ;
- J_ν est la source neutrino effective ;
- χ_H mesure la réponse du vide hypercomplexe.

Si la source centrale produit asymptotiquement un champ interne de type

$$X(r) \propto \frac{1}{r}, \quad (29)$$

et si l'énergie effective du secteur hypercomplexe est quadratique :

$$\rho_H(r) \propto X(r)^2, \quad (30)$$

alors

$$\boxed{\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}.} \quad (31)$$

Cette structure reproduit exactement le comportement dynamique nécessaire pour une courbe de rotation plate.

7 Modèle minimal source–champ–halo

7.1 Action effective

On peut proposer l'action effective schématique :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{(H)} F^{(H)\mu\nu}) + \bar{\nu} i \gamma^\mu D_\mu \nu - m_\nu \bar{\nu} \nu + \mathcal{L}_{\text{geom}}(g, W, \Omega, \Sigma) + \mathcal{L}_{\text{mix}} \right]. \quad (32)$$

La dérivée covariante neutrino contient le secteur hypercomplexe :

$$D_\mu \nu = \left(\partial_\mu + \omega_\mu + W_\mu + g_H A_\mu^I T_I \right) \nu. \quad (33)$$

Variation par rapport à A_μ^I :

$$D_\mu F^{\mu\nu I} = g_H \bar{\nu} \gamma^\nu T^I \nu + J_{\text{mix}}^{\nu I}. \quad (34)$$

Le terme $J_{\text{mix}}^{\nu I}$ regroupe les sources effectives issues de la géométrie mixte :

$$J_{\text{mix}}^{\nu I} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mix}}}{\delta A_{\nu I}}. \quad (35)$$

7.2 Énergie effective du secteur hypercomplexe

Le tenseur énergie–impulsion interne prend la forme minimale

$$\Theta_{\mu\nu}^{(H)} = \text{Tr}(F_{\mu\alpha}^{(H)} F_\nu^{(H)\alpha}) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \text{Tr}(F_{\alpha\beta}^{(H)} F^{(H)\alpha\beta}). \quad (36)$$

La densité effective associée à un observateur u^μ est

$$\rho_H^{\text{eff}} = \Theta_{\mu\nu}^{(H)} u^\mu u^\nu. \quad (37)$$

Dans un régime stationnaire sphérique, on peut chercher des solutions telles que

$$\rho_H^{\text{eff}}(r) \simeq \frac{\rho_0 r_0^2}{r^2}. \quad (38)$$

8 Projection gravitationnelle observable

Dans la RGH, le secteur hypercomplexe peut aussi modifier directement la connexion affine observable. On écrit :

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{eff}}^\rho = \Gamma_{\mu\nu}^\rho(g) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(W) + \Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H). \quad (39)$$

Un ansatz minimal est

$$\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H) = \frac{\lambda_g}{2} \left(A_\mu^I \Sigma_{\nu I}^\rho + A_\nu^I \Sigma_{\mu I}^\rho \right), \quad (40)$$

où $\Sigma_{\nu I}^\rho$ est un tenseur de projection base–fibre.

Dans la limite non relativiste :

$$a_H^i = -c^2 \Delta \Gamma_{00}^i(H). \quad (41)$$

Le halo hypercomplexe peut donc être vu sous deux lectures complémentaires :

1. une lecture énergie–impulsion effective : $\Theta_{\mu\nu}^{(H)}$;
2. une lecture affine : $\Delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$.

9 Pourquoi le neutrino est un bon candidat source

Le neutrino est intéressant parce qu'il est :

- électriquement neutre ;
- très pénétrant ;
- produit naturellement dans les environnements stellaires et compacts ;
- lié au secteur faible $SU(2)_L$;
- chiral dans le Modèle Standard ;
- potentiellement relié à des extensions stériles ou sombres.

Le candidat le plus proche dans le bestiaire connu est donc le neutrino gauche ν_L , mais le candidat théorique le plus propre est un neutrino stérile ou fermion sombre ν_s portant une charge sous un nouveau secteur $SU(2)_H$:

$$\nu_s \in \mathcal{R}_H. \quad (42)$$

On aurait alors

$$D_\mu \nu_s = \left(\partial_\mu + g_H A_\mu^I T_I \right) \nu_s. \quad (43)$$

10 Différence entre énergie du flux et efficacité de source

Le point clé est que la puissance neutrino ne doit pas être comparée directement à l'énergie du halo si le secteur hypercomplexe possède une réponse collective.

On distingue :

$$\rho_\nu(r) = \frac{L_\nu}{4\pi r^2 c^3}, \quad (44)$$

densité d'énergie directe du flux, et

$$\rho_H(r) = \mathcal{F}[J_\nu, \chi_H, G_H, \Sigma], \quad (45)$$

densité géométrique effective produite par la réponse du secteur hypercomplexe.

On peut écrire schématiquement :

$$\rho_H(r) = \Lambda_H X(r)^2, \quad (46)$$

avec

$$X(r) = \chi_H \int G_H(r, r') J_\nu(r') d^3 r'. \quad (47)$$

La condition de viabilité n'est donc pas

$$\rho_\nu = \rho_H, \quad (48)$$

mais

$$\boxed{\mathcal{F}[J_\nu, \chi_H, G_H, \Sigma] \simeq \frac{v_c^2}{4\pi G r^2}.} \quad (49)$$

11 Prédications qualitatives possibles

Si le mécanisme est réel, on peut attendre des corrélations qualitatives entre :

- activité centrale ancienne ou actuelle ;
- production intégrée de neutrinos ;
- structure du halo hypercomplexe ;
- courbe de rotation ;
- présence de trous noirs centraux ;
- historique de formation stellaire ;
- asymétries ou domaines topologiques du halo.

Une version simple suggère que le halo ne suit pas nécessairement le flux neutrino instantané, mais une mémoire géométrique intégrée :

$$\rho_H(r, t) = \int_{-\infty}^t K_H(t - t') \mathcal{F}[J_\nu(r, t')] dt', \quad (50)$$

où K_H est un noyau de mémoire du secteur hypercomplexe.

Cette mémoire permettrait à un halo de subsister même si la source neutrino actuelle est faible.

12 Conditions de cohérence

Pour que le scénario soit viable, il faut au minimum :

1. une charge hypercomplexe portée par les neutrinos ou par un secteur neutrino étendu ;
2. une équation de source stable
$$D_\mu F^{\mu\nu I} = J^{\nu I}; \quad (51)$$
3. une réponse hypercomplexe amplificatrice ou condensatrice ;
4. un profil asymptotique $X(r) \propto r^{-1}$;
5. une densité effective quadratique $\rho_H \propto X^2$;
6. une projection gravitationnelle cohérente via $\Theta_{\mu\nu}^{(H)}$ ou $\Delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho(H)$;
7. une stabilité du halo à grande échelle ;
8. une absence de contradiction avec les contraintes cosmologiques et les observations de neutrinos.

13 Résumé formel

La chaîne proposée est :

$$\boxed{L_\nu \not\Rightarrow \rho_\nu = \rho_H.} \quad (52)$$

Mais :

$$\boxed{L_\nu \Rightarrow J_\nu^{\mu I} \Rightarrow A_\mu^I \Rightarrow F_{\mu\nu}^{(H)} \Rightarrow X(r) \Rightarrow \rho_H(r) \propto X(r)^2.} \quad (53)$$

Si

$$X(r) \propto \frac{1}{r}, \quad (54)$$

alors

$$\rho_H(r) \propto \frac{1}{r^2}, \quad (55)$$

et donc

$$v_c(r) \simeq \text{constante}. \quad (56)$$

14 Conclusion

L'hypothèse selon laquelle les neutrinos constitueraient directement le halo échoue par ordre de grandeur énergétique.

En revanche, une hypothèse plus subtile et plus compatible avec la RGH est ouverte :

Les neutrinos galactiques pourraient être des sources de charge hypercomplexe, non la substance du halo. Le halo serait alors une réponse géométrique effective du secteur interne.

Dans cette lecture, le neutrino n'est pas le carburant principal. Il est l'allumette. Le halo est le feu géométrique.

Note finale de travail

Cette idée exige maintenant trois développements :

1. définir précisément la représentation hypercomplexe portée par le neutrino ou par un neutrino stérile ;
2. résoudre un modèle sphérique source–champ pour obtenir $X(r) \sim 1/r$;
3. comparer la normalisation obtenue avec les vitesses de rotation galactiques.