

## Bemerkung zur Theorie der Flächen zweiter Ordnung.

Von

J. ROSANES in Breslau.

Die in der vorstehenden Note enthaltene Erweiterung eines geometrischen Satzes auf Formen von beliebig vielen Variablen findet für gewisse specielle Formen von sechs Veränderlichen eine einfache geometrische Interpretation.

Es sei

$$H(x, x) = \sum_{\kappa, \lambda} a_{\kappa, \lambda} x_{\kappa} x_{\lambda} \quad (\kappa, \lambda = 1, 2, 3, 4)$$

eine quadratische quaternäre Form der allgemeinen Tetraedercoordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , so dass  $H(x, x) = 0$  die Gleichung einer allgemeinen Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung darstellt.

Zwei Geraden heissen einer Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung conjugirt, sobald jede von ihnen die reciproke Polare der andern trifft, und man kann Systeme von Geraden in Betrachtung ziehen, welche zu je zweien einer und derselben Fläche conjugirt sind.\*) Wir wollen ein solches System ein „conjugirtes“ nennen. Die höchste Zahl der Geraden, aus denen ein conjugirtes System bestehen kann, ist offenbar gleich sechs. Bezeichnet man allgemein durch  $g_1, g_2, \dots, g_6$  die Plücker'schen Coordinaten einer Geraden  $g$ , so dass dieselben der Gleichung genügen

$$f(g, g) = g_1 g_4 + g_2 g_5 + g_3 g_6 = 0,$$

dann stellt sich die Beziehung des Conjugirtseins zweier Geraden  $g, g'$  in Bezug auf die Fläche  $H$  algebraisch durch die symmetrische bilineare Gleichung dar

$$\sum_{r, s} c_{r, s} g_r g'_s = 0, \quad (r, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Hierin bedeuten  $c_{r, s}$  die aus der Determinante der Form  $H(x, x)$  gebildeten Minoren zweiten Grades. Die Indices  $r, s$  geben die Combination der Horizontal- resp. Verticalreihen an, mit deren Hilfe  $c_{r, s}$  herzu-

\*) Vgl. Schur, Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven u. s. f. (Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 1 ff.)

stellen ist, in derselben Weise, wie sie das Gesetz der Bildung von  $g_r, g_s$  aus den Coordinaten der Punkte dieser Geraden bestimmen.

Versteht man unter  $G_1 G_2 \dots G_6$  willkürliche Veränderliche und nennt, wie in vorstehender Note, jedes Werthsystem derselben „Punkt“ (des fünf-dimensionalen Raumes) und spricht auch von der „Fläche“  $f(G, G)$ , als der Gesamtheit der Punkte  $G$ , welche  $f(G, G)$  annulliren, so können wir, ein conjugirtes Geradenpaar der Fläche  $H$  als ein Paar von „Punkten“ der „Fläche“  $f(G, G)$  ansehen, welche der „Fläche“

$$\varphi(G, G) = \sum c_r, G_r G_s = 0$$

conjugirt sind.

Ein conjugirtes System von sechs Geraden der Fläche  $H$  kann somit nur existiren, sobald  $f(G, G)$  der Form  $\varphi(G, G)$  harmonisch umschrieben ist (vgl. vorst. Note), d. h. wenn die harmonische Invariante  $J(f, \varphi)$  verschwindet. Nun hat bekanntlich die Form  $\varphi(G, G)$  die Eigenschaft, bis auf einen constanten Factor mit ihrer Adjuncten übereinzustimmen, folglich ist  $J(f, \varphi)$  bis auf jenen Factor identisch mit dem Ausdruck

$$c_{14} + c_{25} + c_{36}.$$

Da dieser jeder Zeit verschwindet, so ist die Form  $f(G, G)$  stets der Form  $\varphi(G, G)$  harmonisch umschrieben, d. h.

„es existiren Systeme von sechs conjugirten Geraden der allgemeinen Fläche  $H$ , und zwar in zehnfacher Mannigfaltigkeit.“

Die am Schlusse der vorstehenden Note ausgesprochene Bemerkung bedeutet in dem vorliegenden Beispiele:

„Weiss man, dass sechs Geraden, auf vierzehn verschiedene Arten zu zweien combinirt, immer ein conjugirtes Paar einer Fläche zweiter Ordnung ergeben, so stellt die 15<sup>te</sup> Combination ebenfalls ein conjugirtes Geradenpaar dar.“

Werden die Variablen  $G_1 G_2 \dots G_6$  nicht blos der quadratischen Gleichung  $f(G, G) = 0$ , sondern auch noch einer, zwei, drei linearen Gleichungen unterworfen, so stellen dieselben „Punkte“ einer „Fläche“ zweiter Ordnung in einem Raume von resp. vier, drei, zwei Dimensionen dar.

Die auf diese Weise aus  $f(G, G)$ ,  $\varphi(G, G)$  hervorgehenden „reducirten“ Formen oder „Flächen“ haben aber im Allgemeinen nicht mehr eine verschwindende harmonische Invariante, es bleibt somit noch eine Bedingung zu erfüllen, damit die erste „Fläche“ der zweiten harmonisch umschrieben wird.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Interpretation der Veränderlichen  $G_i$  lässt sich das Gesagte für den Fall einer hinzugefügten linearen Gleichung so aussprechen:

„Unter den Geraden eines linearen Complexes kann man im Bezug

auf eine Fläche zweiter Ordnung im Allgemeinen ein conjugirtes System von fünf Geraden nicht angeben. Es ist hierzu das Verschwinden einer Invariante nothwendig und hinreichend. Tritt dies ein, so giebt es eine sechsfache Mannigfaltigkeit von Systemen.“

*Für den Fall zweier linearer Gleichungen* ergibt sich,

„dass unter sämtlichen Geraden, welche zwei feste Geraden  $\varphi, \varphi'$  treffen, sich im Allgemeinen nicht vier angeben lassen, welche in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung ein conjugirtes System bilden.“

Die Bedingung, welche in diesem Falle zu erfüllen ist, nimmt aber eine geometrisch und analytisch gleich einfache Gestalt an. Denn gesetzt, es seien  $g'', g''', g^{IV}, g^V$  ein conjugirtes System von vier Graden, welches  $\varphi, \varphi'$  zu gemeinsamen Secanten hat. Construiert man die reciproken Polaren  $g, g'$  von  $\varphi, \varphi'$ , so ist jede von ihnen mit sämtlichen vier Graden  $g'' \dots g^V$  conjugirt. Es bilden somit die sechs Geraden  $g, g', g'' \dots g^V$  ein System, dessen sämtliche Combinationen zu je zwei ein conjugirtes Paar bilden, mit Ausnahme der Combination  $(g, g')$ . In Folge des oben angegebenen Satzes müssen auch  $g, g'$  einander conjugirt sein. Da aus diesem Grunde auch  $\varphi, \varphi'$  ein conjugirtes Paar bilden, so kann man den Satz aussprechen:

„Sind  $\varphi, \varphi'$  ein conjugirtes Gradenpaar einer Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung, so giebt es unter ihren gemeinschaftlichen Secanten conjugirte Systeme von vier Graden (derselben Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung), und zwar in dreifacher Mannigfaltigkeit, und umgekehrt.“

In anderer Form heisst dies:

„Bilden die vier Geraden  $g'', g''', g^{IV}, g^V$  ein conjugirtes System einer Fläche zweiter Ordnung, so sind auch ihre zwei gemeinschaftlichen Secanten einander conjugirt.“

Liegen drei lineare Gleichungen zwischen den Variablen  $G_1 \dots G_6$  vor, so sind die entsprechenden Geraden als Generatrices einer Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung charakterisirt und die Aufgabe\*), auf einer Fläche 2<sup>ter</sup> Ordnung drei Generatrices zu finden, welche ein conjugirtes System einer andern gegebenen Fläche bilden, ist analytisch mit der identisch, auf einem Kegelschnitt drei Punkte zu finden, welche ein Tripel conjugirter Punkte eines andern Kegelschnittes bilden.

Breslau, im Juli 1883.

\*) Vgl. Schur, Math. Ann. Bd. XVIII, pag. 9ff.