

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2824.

Der Lambert'sche Satz.

Von Prof. H. Bruns.

§ 1.

In den Nouveaux Mémoires der Berliner Akademie vom Jahre 1771 hat Lambert unter dem Titel »Observations sur l'orbite apparente des comètes« den bekannten Satz entwickelt, wonach die Krümmung des scheinbaren Laufes eines Himmelskörpers zu erkennen gestattet, ob derselbe der Sonne näher ist, als die Erde, oder nicht. In den Darstellungen der theoretischen Astronomie erscheint dieser Satz in der Regel lediglich als eine Art Curiosum; es lässt sich jedoch zeigen, dass das Lambert'sche Theorem, wenn man dasselbe in präziser Weise formulirt und namentlich alle unnötigen Einschränkungen und Vernachlässigungen beseitigt, für mässige Zwischenzeiten, z. B. bei kleinen Planeten für eine einzelne Erscheinung, eine praktisch durchaus brauchbare Methode der Bahnbestimmung in sich schliesst. Dieses Lambert'sche Verfahren, wie ich es kurz nennen will, stimmt mit der Methode der Theoria motus darin überein, dass der eigentliche Nerv der Auflösung der Aufgabe in der Aufsuchung einer Wurzel der bekannten Gleichung achten Grades besteht — der Lambert'sche Satz, passend geschrieben, ist in der That mit jener Gleichung achten Grades identisch. Die Unterschiede sind im Wesentlichen folgende. Erstlich wird statt mit geocentrischen Oertern mit »barycentrischen« gerechnet, d. h. mit Oertern, welche sich auf den Schwerpunkt des Systems »Erde-Mond« beziehen. Ein fernerer Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die beobachteten Coordinaten zur Bildung der Zwischengrössen der Rechnung verwendet werden. Sind z. B. mehr als drei Beobachtungen gegeben, so lassen sich diese von vornherein sämmtlich zu der Bahnbestimmung heranziehen, und zwar unter Erhöhung der Genauigkeit des Resultats; ja man kann, wenn der von den Beobachtungen überspannte Zeitraum die für die Anwendbarkeit der Methode gesteckten Grenzen nicht überschreitet, die Beobachtungen bereits vor Beginn der eigentlichen Bahnbestimmung einer praktisch hinreichend strengen Ausgleichung unterwerfen. Die Berechnung endlich der Elemente erfolgt aus Ort und Geschwindigkeit; infolgedessen tritt die Unterscheidung zwischen elliptischen und parabolischen Bahnen erst gegen Ende der ganzen Rechnung auf.

§ 2.

Auf einer gegebenen Fläche beschreibe ein Punkt A eine beliebige Bahn; eine geodätische Linie, welche die Bahn in A berührt, heisst die »geodätische Tangente« in A ; die geodätischen Tangenten in zwei auf einander folgenden Punkten der Bahn schneiden einander unter dem »geodätischen

Contingenzwinkel«; letzterer, dividirt durch das Bogenelement zwischen den Berührungspunkten, misst die »geodätische Krümmung« der Bahn in A . Im Folgenden ist die Fläche eine Kugel vom Halbmesser Eins; die geodätischen Tangenten sind also grösste Kreise, welche die Bahn des Punktes A berühren, und es besteht unsere nächste Aufgabe darin, den Ausdruck für die geodätische Krümmung der scheinbaren Bahn eines Planeten oder Cometen aufzustellen. Zuvor möge jedoch noch eine Bemerkung eingeschaltet werden. Bei den zu benutzenden rechtwinkligen Axensystemen $(x y z)$, etc. sollen die positiven Axenrichtungen immer so festgesetzt werden, dass von der $+x$ -Axe aus gesehen die Drehung von der $+x$ -Axe zur $+y$ -Axe rechtläufig, d. h. von rechts über vorn nach links erfolgt.

Es seien f, g, h die auf den Kugelmittelpunkt bezogenen Coordinaten des beweglichen Kugelpunktes A , t die Zeit, V die Geschwindigkeit und

$$ds = V dt$$

das Bogenelement. Bezeichnet man die Ableitungen nach t durch Accente, so sind:

$$\frac{f'}{V}, \quad \frac{g'}{V}, \quad \frac{h'}{V}$$

die Coordinaten des Kugelpunktes A_1 , nach welchem der zu ds parallele Radius hinweist. Weiter sei A_0 derjenige Kugelpunkt, welcher mit A und A_1 ein Axensystem AA_1A_0 der festgesetzten Art bestimmt, dann liegt A_0 auf derjenigen Seite des grössten Kreises AA_1 , nach welchem hin die Abstände von diesem Kreise positiv zu rechnen sind. Die Coordinaten von A_0 sind resp.

$$\frac{g'h' - hg'}{V}, \quad \frac{hf' - fh'}{V}, \quad \frac{fg' - gf'}{V}.$$

Erfährt A längs der Bahn eine Verschiebung um das Bogenelement ds nach A' , so entspricht der Tangente in A' ein Punkt A_2 mit den Coordinaten

$$\frac{f'}{V} + d\left(\frac{f'}{V}\right), \quad \frac{g'}{V} + d\left(\frac{g'}{V}\right), \quad \frac{h'}{V} + d\left(\frac{h'}{V}\right);$$

der Abstand dieses Punktes A_2 von dem grössten Kreise AA_1 ist gleich dem Contingenzwinkel zwischen den in A und A' berührenden grössten Kreisen und gegeben durch

$$\sum \frac{g'h' - hg'}{V} \left[\frac{f'}{V} + d\left(\frac{f'}{V}\right) \right],$$

wo das Zeichen Σ eine cyclische Summation über die drei

Axen bedeutet. Hieraus ergibt sich für die geodätische Krümmung K der Ausdruck:

$$\sum \frac{g'h' - h'g'}{V^3} f''$$

oder es ist, in abgekürzter Determinantenform geschrieben:

$$KV^3 = [f, f', f'']$$

Wenn K positiv ist, so dreht sich der berührende grösste Kreis beim Uebergange von A nach A' für einen Beobachter, der in A von aussen auf die Kugel blickt, rechtläufig oder die Bahn wendet ihre Concavität nach der positiven Seite von AA_1 .

§ 3.

Es seien x, y, z, r, l, b die heliocentrischen rechtwinkligen und Polar-Coordinationen eines kleinen Planeten (oder Cometen), $\xi, \eta, \zeta, \rho, \lambda, \beta$ die analogen Grössen bezogen auf die Erde und X, Y, Z, R, L, B die Sonnencoordinationen, dann gelten die Relationen:

$$\xi = x + X, \quad \eta = y + Y, \quad \zeta = z + Z.$$

Zur Herleitung des Lambert'schen Satzes sind in dem Ausdrucke für die geodätische Krümmung an Stelle der f, g, h des vorigen § die Grössen:

$$\frac{\xi}{\rho}, \quad \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{\zeta}{\rho}$$

einzuführen und die Ableitungen ξ'', η'', ζ'' durch ihre aus den Bewegungsgleichungen folgenden Ausdrücke zu ersetzen. Sieht man die Bahn der Planeten als einen Kegelschnitt an, vernachlässigt man also die durch die anderen Planeten erzeugten Störungen, so hat man:

$$x'' = -k^2 \frac{x}{r^3}, \quad y'' = -k^2 \frac{y}{r^3}, \quad z'' = -k^2 \frac{z}{r^3}.$$

Will man nun die Ausdrücke für die X'', Y'', Z'' analog in derselben einfachen Gestalt ansetzen, so ist zu beachten, dass zwar die Bewegung der Sonne um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond mit dem für die x, y, z festgesetzten Grade von Annäherung als eine elliptische angesehen werden darf, dass dagegen die geocentrische Bewegung der Sonne Abweichungen von einer Ellipse besitzt, welche von den bekannten Mondgliedern herrühren und deren Amplitude nur wenig kleiner ist, als der Einfluss der Sonnenparallaxe. Aus diesem Grunde muss man, wenn der Lambert'sche Satz in hinreichend strenger Gestalt formuliert werden soll, bei den Bewegungsgleichungen der Sonne die Mondglieder entweder hinzuzufügen, oder aber von vornherein dadurch mit berücksichtigen, dass man die Bewegung von Sonne und Planet nicht auf das Erdcentrum, sondern auf den Schwerpunkt von Erde-Mond bezieht, oder mit barycentrischen Oertern rechnet. Wir wählen hier den letzteren Weg, weil derselbe zu der einfachsten Form des Lambert'schen Satzes führt.

Bedeutet also jetzt $X, Y, Z, \xi, \eta, \zeta$ barycentrische Coordinaten und bezeichnet man mit μ die Massensumme des Systems Sonne-Erde-Mond, so ist der Reihe nach:

$$X'' = -k^2 \mu \frac{X}{R^3},$$

$$\begin{aligned} \xi'' &= -k^2 \frac{x}{r^3} - k^2 \mu \frac{X}{R^3} \\ &= -\frac{k^2 \xi}{r^3} - k^2 X \left(\frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned}$$

oder mit der Abkürzung:

$$P = \frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3}$$

$$\xi'' = -\frac{k^2 \xi}{r^3} - k^2 X P.$$

Setzt man:

$$\xi = \rho f, \quad \eta = \rho g, \quad \zeta = \rho h$$

und bezeichnet mit V die Geschwindigkeit der scheinbaren barycentrischen Bewegung, so erhält man für die Krümmung K der scheinbaren Bahn:

$$KV^3 = \left| \frac{\xi}{\rho}, \left(\frac{\xi}{\rho} \right)', \left(\frac{\xi}{\rho} \right)'' \right|$$

$$KV^3 \rho^3 = |\xi, \xi', \xi''|$$

$$= -k^2 P |\xi, \xi', X|$$

$$KV^3 \rho = -k^2 P [f, f', X].$$

Es seien jetzt A und A_1 die Punkte an der Sphäre, nach welchen die Strecke ρ und die Richtung der scheinbaren Bewegung hinweist, ferner A_0 derjenige Punkt, welcher mit A und A_1 ein Axensystem AA_1A_0 von der eingangs festgesetzten Art bildet, dann sind die Richtungscosinus für die Radien nach diesen drei Punkten resp.

$$\begin{array}{ccc} f & , & g & , & h \\ \frac{f}{V} & , & \frac{g}{V} & , & \frac{h}{V} \\ f_0 = \frac{g'h' - h'g'}{V} & , & g_0 = \frac{hf' - fh'}{V} & , & h_0 = \frac{fg' - gf'}{V} \end{array}$$

also:

$$KV^2 \rho = -k^2 P \Sigma f_0 X. \quad (I)$$

Der Ausdruck $\Sigma f_0 X$ ist gleich $R \sin F$, wenn F den sphärischen Abstand des Sonnenortes von dem grössten Kreise AA_1 bedeutet. Wendet nun die Krümmung K ihre Concavität nach derjenigen Seite des grössten Kreises AA_1 , auf welcher sich die Sonne befindet, so haben nach den früheren Festsetzungen über die Vorzeichen K und F gleiches Zeichen, es ist also wegen

$$KV^2 \rho = -k^2 P R \sin F \quad (II)$$

der Ausdruck P negativ, d. h.:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{R^3} &< \frac{1}{r^3} \\ r \mu^{1/3} &< R; \end{aligned}$$

die Gleichungen (I) resp. (II) sind daher nichts anderes als der Lambert'sche Satz.

Der Schluss auf die zwischen R und r bestehende Ungleichung wird offenbar hinfällig, wenn F gleich Null ist, weil in folgedessen K nothwendig ebenfalls gleich Null wird.

Es tritt dann der bekannte und für die üblichen Bahnbestimmungsmethoden charakteristische Ausnahmefall ein.

Setzt man $P = Q\rho$, so wird:

$$-\frac{KV^2}{k^2 R \sin F} = Q = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Diese Relation ist nichts anderes als die Gauss'sche Gleichung achten Grades, sobald man Q , R und den Winkel zwischen R und ρ als bekannt voraussetzt. Diese Gleichung erscheint hier gewissermaßen in ihrer natürlichen Gestalt und es ist merkwürdig genug, dass dem Spürsinn Lambert's die wahre Bedeutung seines Satzes für das Bahnbestimmungsproblem entgangen ist.

§ 4.

Um zu einer Methode für die Bestimmung der Elemente zu gelangen, können wir folgenden Weg einschlagen. Unter Beibehaltung der gewählten Bezeichnungsweise hat man:

$$\begin{aligned} \xi'' &= -k^2 \frac{\xi}{r^3} - k^2 X P \\ &= \rho f'' + 2\rho' f' + f \rho'' \end{aligned}$$

oder:

$$0 = k^2 X Q + f \left(\frac{\rho''}{\rho} + \frac{k^2}{r^3} \right) + 2f' \frac{\rho'}{\rho} + f''.$$

Multipliziert man diese Gleichung der Reihe nach mit f , mit f' , mit f_0 und summirt jedesmal über die drei Axen, so erhält man:

$$0 = k^2 Q \sum f X + \frac{\rho''}{\rho} + \frac{k^2}{r^3} + \sum f f'' \quad (\text{III})$$

$$0 = k^2 Q \sum f' X + 2V^2 \frac{\rho'}{\rho} + \sum f' f'' \quad (\text{IV})$$

$$0 = k^2 Q \sum f_0 X + \sum f_0 f'' \quad (\text{V})$$

Von diesen drei Gleichungen kommt die erste hier nicht weiter in Betracht, die letzte ist identisch mit dem Lambert'schen Satze, und die zweite liefert einen Ausdruck für ρ' : ρ , wenn man Q eliminiert. Es wird:

$$\begin{aligned} 0 &= 2V^2 \frac{\rho'}{\rho} \sum f_0 X + (\sum f' f'') (\sum f_0 X) \\ &\quad - (\sum f_0 f'') (\sum f' X) \\ &= 2V^2 \frac{\rho'}{\rho} \sum f_0 X + \sum (g' h_0 - h' g_0) (g' Z - h' Y) \\ 0 &= 2V \frac{\rho'}{\rho} \sum f_0 X + [f, f'', X]. \end{aligned}$$

Hiermit werden die beiden Grundgleichungen der Auflösung:

$$Q = -\frac{\sum f_0 f''}{k^2 \sum f_0 X} \quad (\text{VI})$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{[f, f'', X]}{2V \sum f_0 X} \quad (\text{VII})$$

Angenommen man könnte aus den beobachteten Grössen die Werthe der

$$f, g, h; \quad f', g', h'; \quad f'', g'', h''$$

auf irgend eine Weise mit hinreichender Genauigkeit für einen gegebenen Zeitpunkt t_0 direct herleiten, so sind hierdurch und durch die Sonnencoordinaten die Werthe von Q und ρ' : ρ nach den Gleichungen (VI) und (VII) ebenfalls gegeben. Der Werth von Q führt dann durch Auflösung der Gleichung:

$$Q\rho = \frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3} \quad (\text{VIII})$$

zur Kenntniss von ρ (und r) und weiter zu den Werthen der ξ , η , ζ und der x , y , z . Da ferner ρ' bekannt ist, so erhält man aus:

$$x' = -X' + \xi \frac{\rho'}{\rho} + \rho f',$$

die x' , y' , z' , sobald man die X' , Y' , Z' , z. B. durch numerische Differentiation aus einer Ephemeride der X , Y , Z , ermittelt hat. Hiermit ist offenbar alles zur directen Berechnung der Elemente Erforderliche gegeben.

Nach den vorstehenden Entwicklungen handelt es sich wesentlich darum, ob man die f , g , h , ... mit hinreichender Genauigkeit direct aus den »topocentrischen«, d. h. den auf den Beobachtungsort bezogenen Coordinaten λ und β finden kann, wobei die f , g , h mit den λ , β durch die Relationen:

$$\begin{aligned} f &= \cos \beta \cos \lambda \\ g &= \cos \beta \sin \lambda \\ h &= \sin \beta \end{aligned}$$

zusammenhängen. Es versteht sich von selbst, dass man die barycentrischen Werthe der f , g , h , ... nicht finden kann, so lange die ρ für die einzelnen Beobachtungsmomente unbekannt sind; man wird vielmehr zunächst nach den für die barycentrischen Grössen geltenden Formeln eine erste Hypothese, jedoch unter Vernachlässigung von Aberration, Parallaxe und Reduction auf den Schwerpunkt bis zur Ermittlung von Q , ρ und ρ' durchrechnen, dann aus ρ und ρ' genährte Werthe der einzelnen ρ für die Beobachtungsmomente ableiten und damit die vernachlässigten Reductionen vor Beginn der zweiten Hypothese nachholen. Mit Rücksicht hierauf setzen wir voraus, dass die zu den Beobachtungsmomenten t_1 , t_2 , ... gehörigen barycentrischen Werthe f_1 , f_2 , ... der Grössen f ... gegeben vorliegen, dann kann man, wenn t_0 einen vorläufig unbestimmten zwischen den t_α liegenden Zeitpunkt bedeutet, und die f ... ohne Index zu t_0 gehören, mit der Abkürzung:

$$t_\alpha - t_0 = \tau_\alpha, \quad t_\alpha - t_\beta = \tau_{\alpha\beta}$$

die Reihenentwicklung:

$$f_\alpha = f + f' \tau_\alpha + \frac{1}{2} f'' \tau_\alpha^2 + \frac{1}{6} f''' \tau_\alpha^3$$

ansetzen, deren Convergenz von dem Intervall abhängt, innerhalb dessen sich die τ_α bewegen. Ertheilt man nun dem Index α zunächst nur die Werthe 1, 2, 3, so erhält man mit der Abkürzung:

$$\Delta = [1, \tau_1, \tau_1^2] = \tau_{21} \cdot \tau_{31} \cdot \tau_{32}$$

die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} |f_1, \tau_1, \tau_1^2| &= \Delta f + \frac{1}{6} f''' |\tau_1^3, \tau_1, \tau_1^2| + \dots \\ |f_1, \tau_1^2, 1| &= \Delta f' + \frac{1}{6} f''' |\tau_1^3, \tau_1^2, 1| + \dots \\ |f_1, 1, \tau_1| &= \frac{1}{2} \Delta f'' + \frac{1}{6} f''' |\tau_1^3, 1, \tau_1| + \dots \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus f, f', f'' unter Vernachlässigung der Glieder mit $f''' \dots$, so begeht man einen Fehler, der im Allgemeinen in Bezug auf die Zwischenzeiten resp. von der Ordnung 3, 2, 1 ist. Es werden daher die Werthe von Q und ρ' mit einem Fehler erster Ordnung behaftet gefunden. Diese Fehlerordnung lässt sich jedoch durch passende Wahl von t_0 um eine Einheit erhöhen. Da nämlich:

$$|\tau_1^3, 1, \tau_1| = \Delta(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$$

ist, so wird der Fehler in f'' sofort zweiter Ordnung, sobald man für t_0 das arithmetische Mittel aus den drei Beobachtungszeiten wählt. Entsprechend wird dann auch der Fehler in Q, ρ, ρ' nur zweiter Ordnung. Bei der Anwendung wird man übrigens, sobald die Zwischenzeiten nicht zu klein sind, für t_0 statt der genauen Mittelzeit die nächstgelegene runde Epoche der benutzten Ephemeriden wählen dürfen.

Sind mehr als drei Beobachtungen gegeben, so kann man, passende Vertheilung derselben vorausgesetzt, von den Grössen $f''' \dots$ eine gewisse Anzahl, statt sie zu vernachlässigen, bestimmen resp. eliminieren und erhält dann die f, f', f'' mit einem entsprechend höheren Grade von Annäherung.

Die vorstehende Entwicklung lässt nun auch die Grenzen für die Brauchbarkeit der Lambert'schen Methode näher fixiren. Wesentlich für die praktische Anwendung ist offenbar, dass innerhalb des von den Beobachtungen überspannten Zeitraums die bei der Berechnung der $f \dots$ benutzten Potenzreihen hinreichend rasch convergiren, derart, dass man bei nur drei Beobachtungen die vierten Potenzen für eine erste Bestimmung vernachlässigen darf und dass man beim Hinzutreten weiterer Beobachtungen eine hinreichende Ausgleichung derselben auf Grund der Potenzreihen unter Berücksichtigung der dritten oder allenfalls auch der vierten Potenzen erreichen kann. Diese Bedingung ist bei kleinen Planeten innerhalb einer Opposition im Allgemeinen erfüllt, wie ein Blick auf die Ephemeriden des Berliner Jahrbuchs lehrt. Denn die Sprünge in den vierten Differenzen rühren bei diesen Ephemeriden bereits wesentlich von den in den Sonnencoordinaten enthaltenen Mondgliedern her. Bei Cometen ist jene Bedingung im Allgemeinen so lange erfüllt, als die Variationen von ρ innerhalb inäusserer Grenzen bleiben, also in der Regel für mehrere Wochen. Das ist aber ausreichend, denn sobald erst angenäherte Elemente bekannt sind, bedarf man überhaupt keiner besonderen Kunstgriffe mehr, da dann die Anwendung von Differentialformeln, sei es in strenger, sei es in abgekürzter Gestalt, z. B. als Variation der Distanzen und dergl., einen einfachen und übersichtlichen Weg zur Verbesserung der Elemente darbietet.

§ 5.

Der Symmetrie halber sind im vorigen § die Richtungs-cosinus f, g, h statt der sphärischen Coordinaten λ, β benutzt worden. Für die numerische Rechnung sind jedoch die letzteren, abgesehen von gewissen Specialfällen, vorzuziehen. Es sollen deshalb jetzt noch die entsprechenden

Umformungen in den früheren Relationen vorgenommen werden. Man hat zunächst:

$$\begin{aligned} f &= \cos \beta \cos \lambda \\ g &= \cos \beta \sin \lambda \\ h &= \sin \beta \\ f' &= -\beta' \sin \beta \cos \lambda - \lambda' \cos \beta \sin \lambda \\ g' &= -\beta' \sin \beta \sin \lambda + \lambda' \cos \beta \cos \lambda \\ h' &= \beta' \cos \beta \\ V^2 &= \beta'^2 + (\lambda' \cos \beta)^2 \\ Vf_0 &= \beta' \sin \lambda - \lambda' \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \lambda \\ Vg_0 &= -\beta' \cos \lambda - \lambda' \cos \beta \cdot \sin \beta \sin \lambda \\ Vh_0 &= \lambda' \cos \beta \cdot \cos \beta \\ f'' &= -\beta'' \sin \beta \cos \lambda - \lambda'' \cos \beta \sin \lambda \\ &\quad - f\beta'^2 + 2\beta' \lambda' \sin \beta \sin \lambda - f\lambda'^2 \\ g'' &= -\beta'' \sin \beta \sin \lambda + \lambda'' \cos \beta \cos \lambda \\ &\quad - g\beta'^2 - 2\beta' \lambda' \sin \beta \cos \lambda - g\lambda'^2 \\ h'' &= \beta'' \cos \beta - h\beta'^2 \\ gh'' - hg'' &= \beta'' \sin \lambda - \lambda'' \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \lambda \\ &\quad + 2\beta' \lambda' \sin \beta^2 \cos \lambda + hg\lambda'^2 \\ hf'' - fh'' &= -\beta'' \cos \lambda - \lambda'' \cos \beta \cdot \sin \beta \sin \lambda \\ &\quad + 2\beta' \lambda' \sin \beta^2 \sin \lambda - hf\lambda'^2 \\ fg'' - gf'' &= \lambda'' \cos \beta \cdot \cos \beta - 2\beta' \lambda' \cos \beta \sin \beta \\ V \sum f_0 f'' &= (\lambda' \beta'' - \beta' \lambda'') \cos \beta \\ &\quad + \lambda' \sin \beta (2\beta'^2 + \lambda'^2 \cos \beta^2). \end{aligned}$$

Setzt man an:

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L, \quad Z = R \sin B$$

$$\left. \begin{aligned} \cos G &= \sin \beta \sin B + \cos \beta \cos B \cos(L-\lambda) \\ \sin G \cos H &= \cos \beta \sin B - \sin \beta \cos B \cos(L-\lambda) \\ \sin G \sin H &= \cos B \sin(L-\lambda) \end{aligned} \right\} \text{(IX)}$$

so sind G und H Distanz und Positionswinkel der Sonne, bezogen auf den Planeten, und man erhält:

$$\begin{aligned} \frac{V}{R} \sum f_0 X &= \sin G (\lambda' \cos \beta \cdot \cos H - \beta' \sin H) \\ \frac{[f, f'', X]}{R} &= \sin G (\lambda'' \cos \beta \cos H - \beta'' \sin H) \\ &\quad - \lambda' \sin \beta \sin G (2\beta' \cos H + \lambda' \cos \beta \cdot \sin H). \end{aligned}$$

Führt man noch ein:

$$\begin{aligned} \beta' &= V \cos \psi, & \beta'' &= V_1 \cos \psi_1 \\ \lambda' \cos \beta &= V \sin \psi, & \lambda'' \cos \beta &= V_1 \sin \psi_1 \end{aligned}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} Q \cdot k^2 R \sin G \sin(H-\psi) &= V_1 \sin(\psi-\psi_1) \\ &\quad + V^2 \operatorname{tg} \beta \sin \psi \\ &\quad + V^2 \operatorname{tg} \beta \sin \psi \cos \psi \cdot \cos \psi \end{aligned} \right\} \text{(X)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q'}{Q} \cdot 2 V \sin(H-\psi) &= V_1 \sin(\psi_1-H) \\ &\quad - V^2 \operatorname{tg} \beta \sin \psi \cdot \cos(H-\psi) \\ &\quad - V^2 \operatorname{tg} \beta \sin \psi \cos \psi \cos H \end{aligned} \right\} \text{(XI)}$$

Hiermit ist die gesuchte Umformung geleistet und der Gang der Rechnung stellt sich in der Hauptsache folgendermassen. Mit den topocentrischen λ und β (Rectascensionen und Declinationen) und den uncorrigirten t bei der ersten Hypothese, mit den barycentrischen λ und β und den für Aberration verbesserten t in der zweiten Hypothese rechnet man die $\lambda, \lambda', \lambda'', \beta, \beta', \beta''$ bei drei Beobachtungen nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda - \lambda_0) &= \Sigma (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \tau_2 \tau_3 \cdot \tau_{32} \\ \Delta\lambda' &= -\Sigma (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot (\tau_2 + \tau_3) \tau_{32} \\ \Delta \frac{1}{2}\lambda'' &= \Sigma (\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \tau_{32}\end{aligned}$$

wo λ_0 einen willkürlich gewählten Werth, z. B. λ_2 bedeutet. Die Mittelzeit t_0 kann abgerundet und in beiden Hypothesen übereinstimmend gewählt werden, um die doppelte Berechnung des Sonnenortes zu ersparen. Nach Berechnung der Hilfsgrössen $V, V_1, \psi, \psi_1, G, H$ aus

$$\begin{aligned}\beta' &= V \cos \psi \\ \lambda' \cos \beta &= V \sin \psi \\ \beta'' &= V_1 \cos \psi_1 \\ \lambda'' \cos \beta &= V_1 \sin \psi_1\end{aligned}$$

und aus (IX) ergeben sich Q und $\rho' : \rho$ aus (X) und (XI). Der Werth von Q führt dann durch Auflösung der Gleichung achten Grades:

$$Q\rho = \frac{\mu}{R^3} - \frac{1}{r^3}$$

in welcher

$$r^3 = R^2 + \rho^3 - 2R\rho \cos G$$

zur Kenntniss von $\rho, \xi, \eta, \zeta, x, y, z$. Ferner ergibt sich aus $\rho' : \rho$ und

Leipzig 1887 Dec. 27.

$$\begin{aligned}x' &= -X' + \xi \left(\frac{\rho'}{\rho} - \beta' \operatorname{tg} \beta - \lambda' \operatorname{tg} \lambda \right) \\ y' &= -Y' + \eta \left(\frac{\rho'}{\rho} - \beta' \operatorname{tg} \beta + \lambda' \cotg \lambda \right) \\ z' &= -Z' + \zeta \left(\frac{\rho'}{\rho} + \beta' \cotg \beta \right)\end{aligned}$$

das Werthsystem der x', y', z' , welche mit den x, y, z zusammen auf bekannte Weise zur Kenntniss der Elemente führen.

Vergleicht man die vorstehenden Darlegungen mit den üblichen Bahnbestimmungsmethoden, so erkennt man, wie nahe Lambert mehr als fünfundzwanzig Jahre vor Olbers und vor Gauss der Entdeckung eines Verfahrens war, welches innerhalb der oben angegebenen Beschränkung recht wohl mit den heute üblichen Methoden concurriren kann. Denn die Unbequemlichkeit der Reduction auf den barycentrischen Ort dürfte durch die Einfachheit und Uebersichtlichkeit der Rechnung an anderen Stellen compensirt werden und würde bei Vorausberechnung jener Reduction für die X, Y, Z, R, L, B überhaupt nicht mehr ins Gewicht fallen. Auch der Einwand, dass aus den Ephemeriden die X', Y', Z' im Allgemeinen höchstens mit sechs geltenden Ziffern durch numerische Differentiation zu erhalten sind, liesse sich dadurch beseitigen, dass diese Grössen in längeren Intervallen, etwa von 10 zu 10 Tagen mit einer Decimale mehr mitgetheilt werden, da sich dann die Zwischenwerthe durch eine kurze mechanische Quadratur über die Ausdrücke

$$-\frac{k^2 \mu X}{R^3}, \quad -\frac{k^2 \mu Y}{R^3}, \quad -\frac{k^2 \mu Z}{R^3}$$

mit aller Schärfe interpoliren lassen, sobald dies nöthig wird.

Beobachtungen des Olbers'schen Cometen 1887 V

ausgeführt am 12füssigen Aequatoreal der Sternwarte in Leipzig.

1887	M.Z. Leipzig	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Vgl.	α app.	$\log p.\Delta$	δ app.	$\log p.\Delta$	Red. ad l. app.	*
Sept. 15	15 ^h 18 ^m 44 ^s	+0 ^m 34 ^s 94	+ 9' 21".7	21.7	10 ^h 10 ^m 24 ^s 39	9.608 _n	+30° 1' 37".9	0.834	+0 ^s 05 — 7".4	1
16	15 50 11	+2 3.79	+ 1 22.4	15.5	—	9.622 _n	—	0.811	+0.05 — 7.5	2
26	15 25 46	+1 57.96	+ 9 5.9	15.5	11 4 48.06	9.600 _n	+28 44 52.3	0.839	+0.03 — 6.7	3

Beobachter: M. Schnauder.

Mittlere Oerter der Vergleichsterne für 1887.0.

*	α 1887.0	δ 1887.0	Autorität
1	10 ^h 9 ^m 49 ^s 40	+29° 52' 23".6	23 Leon. min. $\frac{1}{4}$ (Arm.+Rad. ₂ +Y.+Gl.)
2	10 13 19	+29 54	DM. +30° 1994
3	11 2 50.07	+28 35 53.2	W ₂ 10 ^h 1230

Nr. 2 ist noch zu bestimmen. — Beobachtungen mit hellen Fäden.