

Ueber algebraische Correspondenzen.

Zweite Abhandlung:

Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve.

Von

A. BRILL in Tübingen.

In der gemeinsamen Arbeit über die algebraischen Functionen von Herrn Nöther und mir (VII. Band dieser Annalen) wird der Begriff der „Punktgruppen“ einer algebraischen Curve an die Spitze der Theorie gestellt. Einer solchen kommt insbesondere dann eine von den ausschneidenden Curven in gewissem Sinne unabhängige Existenz zu, wenn sie „Specialgruppe“ ist. Wir verstehen darunter eine Punktgruppe, welche den adjungirten Curven, die durch diese Punkte gehen, weniger Bestimmungsstücke entzieht, als die Anzahl der Punkte beträgt, die sie enthält. Eine Specialgruppe, die man auf einer Curve gefunden hat, steht jedoch nicht vereinzelt da, sondern lässt sich mit anderen zu einer Schaar von einer gewissen Mannigfaltigkeit zusammenfassen, der wiederum eine andere solche Schaar entspricht. Nach dem Riemann-Roch'schen Satz nämlich trifft jede adjungirte Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus einer Curve n^{ter} Ordnung eine Specialgruppe ausschneidet, diese in den Punkten einer weiteren Specialgruppe, die einer Schaar angehört, deren Mannigfaltigkeit durch die Zahl der Punkte der ersten Gruppe und die Mannigfaltigkeit ihrer Schaar bestimmt ist. Wir haben diesem Satz den Namen Riemann's, des eigentlichen Begründers einer Theorie der algebraischen Functionen, und des um dieselbe verdienten Roch geben zu sollen geglaubt, weil in den Arbeiten Beider sich wesentliche Bestandtheile dieses grundlegenden Satzes vorfinden. Riemann hat in seiner Theorie der Abel'schen Functionen (Borchardt's Journ. Bd. 54, § 5) den Zusammenhang zwischen den Bestimmungsstücken einer Specialgruppe und den Constanten der Function, die sie zu Unendlichkeitspunkten besitzt, für einen besonderen Fall aufgestellt und damit die Grundlage für Roch's (ibid. Bd. 64) allgemeine Abzählung der Constanten einer algebraischen Function ge-

liefert. Auch erkennt Riemann im Zusammenhang mit der Frage nach dem identischen Verschwinden der ϑ -Functionen (ibid. Bd. 65) in zwei ihm dort nahe gerückten Fällen das gegenseitige Entsprechen gewisser Schaaren von Specialgruppen. Aber es erübrigte, diese Gesichtspunkte in einen algebraischen Satz zusammenzufassen, welcher die Reciprocität der Specialgruppen allgemein feststellt, und dessen Fassung auf den Begriff der Punktgruppe mit allen seinen Merkmalen, Mannigfaltigkeit der Schaar, Unterscheidung ihrer beweglichen und festen Punkte u. s. w., sich gründet, wie man ihn in expliciter Form weder bei Riemann noch bei Roch vorfindet.

Es muss somit festgestellt werden, dass weder Riemann noch Roch den nach ihnen benannten Satz wirklich ausgesprochen haben, wiewohl neuere Schriftsteller ihn unter dem von uns vorgeschlagenen Namen acceptirt und zur Grundlage weiterer Untersuchungen gemacht haben, ohne dieses Umstandes zu gedenken. Allerdings tragen zu dieser Auffassung zwei Stellen unseres gemeinsamen Aufsatzes bei, in welchen Riemann und Roch die Entdeckung jenes Satzes unumschränkt zuerkannt oder doch nicht ausdrücklich genug das Neue hervorgehoben wird, das wir hinzugefügt. Uebrigens hat auch Herr Nöther schon seinerseits in einer Note im 97. Bd. des Journals von Kronecker unsere Ansprüche auf den Satz geltend gemacht.

Erhält durch den Riemann-Roch'schen Satz der Begriff der Specialgruppe eine ausgezeichnete Stellung in der Theorie der algebraischen Functionen überhaupt, so erscheint es um so mehr geboten, auf eine diesem Begriff noch anhaftende Unsicherheit hinzuweisen, die darin besteht, dass man die Existenz der Specialgruppen auf einer allgemeinen Curve bis jetzt nur durch eine summarische Abzählung der Gleichungen, von denen sie abhängen, nachgewiesen hat, ohne deren gegenseitige Vereinbarkeit zu prüfen. Dass hierbei eine Täuschung nicht ausgeschlossen ist, zeigt ein Beispiel, das ich unten anführen werde. Ich beabsichtige nun im Folgenden die Verträglichkeit der Gleichungen dadurch zu erweisen, dass ich den Weg angebe, auf dem sich die gemeinsamen Lösungen finden lassen, und, gewissermassen als Probe der Stichhaltigkeit des Verfahrens, für den allgemeinen Fall, nämlich wenn besondere Beziehungen zwischen den Moduln der vorliegenden Curve nicht bestehen, die Anzahl der gemeinsamen Lösungen des Gleichungssystems bestimme, welche das Problem der Specialgruppen mit sich bringt*). Die so gestellte Aufgabe verlangt eine vielverzweigte

*) Zwar ist die allgemeine Schlussformel, zu der ich hier gelange, bereits in der gemeinsamen Arbeit mit Herrn Nöther angegeben, auch in Salmon-Fiedler's Geometrie der höheren Curven (3. Aufl., S. 422) übergegangen. Aber sie blieb dort unbewiesen, weil damals die algebraischen Hilfsmittel für eine strenge und allgemeine Behandlung der Frage noch fehlten.

Vorbereitung, und bildet eigentlich nur das Bindeglied zwischen drei wesentlich verschiedenen Untersuchungen.

Der erste Theil dieser Abhandlung (Abschnitt II) umgrenzt die Bedingungen, welche das Verschwinden sämmtlicher Determinanten einer Matrix nach sich zieht, und enthält den Beweis für eine bereits bekannte Abzählungsformel. Der zweite (Abschn. III—V) beschäftigt sich mit der Bestimmung der Werthsysteme, die n Correspondenzen zwischen n Punkten einer Curve zugleich genügen. Dieselbe beruht auf den Ergebnissen einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung über die reducirte Resultante*) und einer anderen über die Gestalt einer Correspondenzgleichung**), knüpft an sie jedoch nicht unmittelbar an. Vielmehr nöthigte mich die Menge des Stoffes, ein Zwischenglied auszulassen und die einwandfreie Begründung von zwei hier benutzten Formeln, welche jedoch bereits seit Langem bekannt und auch von anderer Seite bestätigt sind, in einer späteren Arbeit nachfolgen zu lassen. Der dritte Theil endlich (VI, VII, VIII) enthält die Anwendung der beiden ersten auf das Problem der Specialgruppen im Falle einer Minimalzahl von Punkten, welchen Riemann im § 5 seiner „Abel'schen Functionen“ hervorhebt.

Ich muss, bevor ich in den Gegenstand eintrete, noch einer sehr bemerkenswerthen Methode gedenken, durch die neuerdings Herr Castelnuovo in einer Note (Bd. V der Berichte der Acad. dei Lincei, Sept. 1889), von der ich eben beim Abschliessen dieser Arbeit Kenntniss erhalte, das Ergebniss meines dritten Theiles: die Anzahl der Grenz-Specialgruppen (rationalen Involutionen), und darüber hinaus die Anzahl sämmtlicher Specialgruppen, die auf einer Curve vorkommen können, ermittelt. Man kann, wie ich früher einmal (d. Ann. Bd. 2) gezeigt habe, die Frage der Specialgruppen auf die nach den mehrfach schneidenden Sehnen (bezw. gewissen ebenen Räumen) von Curven in höheren Räumen zurückführen. Auf Grund nun der Forderung, dass der Schluss von zerfallenden auf nicht zerfallende Raumcurven für diese Art von Abzählungen berechtigt ist***), bestimmt Herr Castelnuovo an der Hand der von H. Schubert geschaffenen Abzählungsmethoden die gewünschte Zahl. Das Resultat des VIII. Abschnittes steht zwar, wie gesagt, an Allgemeinheit hinter der Formel des Herrn Castelnuovo zurück; dafür aber zeigt die hier gewählte algebraische Formulirung die Mittel zur

*) Abhdl. d. Münch. Acad. d. Wiss. II. Cl. Bd. XVII.

**) Diese Ann. Bd. 31.

***) Dieses Princip besitzt in der Gestalt, in der es Herr Castelnuovo verwendet, Aehnlichkeit mit den im VI. und VII. Abschnitt entwickelten Formeln, von denen es sich jedoch durch das (bei mir wechselnde) Vorzeichen unterscheidet, und scheint auf denselben Grundlagen wie diese Formeln zu beruhen.

jene willkürlich annehmbaren zu diesen gefunden werden können, so dass die angegebenen Gleichungen alle erfüllt sind.

Was die erste dieser Fragen angeht, so ergibt*) eine einfache Abzählung (wie auch die Ueberlegungen des II. Abschnitts), dass aus dem Verschwinden der Determinanten des Rechtecks:

$$r[P - (R - r + 1) + 1] = r(q + 1)$$

von einander unabhängige Gleichungen fließen. Hiernach scheint es, als ob unser Problem in dem Falle, dass $r(q + 1) \leq R$ ist, immer Lösungen besitzt. Indessen können sich unter Umständen Widersprüche einstellen, die sich dadurch kenntlich machen, dass die Anzahl der Lösungen gleich Null wird. Dies tritt z. B. in dem Fall:

$$R = 3, \quad q = 2, \quad r = 1$$

ein, wie man mittelst der Schlussformel des Abschn. VIII bestätigt. In der That liefert der Riemann-Roch'sche Satz eine weitere Bedingung für das Problem, welche in § 9 der erwähnten Abhandlung aufgestellt wird, und die diesen Fall ausschliesst. Die Anzahlbestimmung unterrichtet hier von dem Eintreten eines Widerspruchs. — Von dem so charakterisirten Problem beansprucht wegen seiner Beziehungen zur Modulfrage ein hervorragendes Interesse der von Riemann erwähnte Grenzfall, dass bei gegebenem P die Zahl R einen Maximalwerth annimmt. Wenn man sich auf adjungirte Curven $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung beschränkt, was in diesem Fall der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, und demnach die Zahl $P = p$, dem Geschlecht der Curve f setzt, wo denn der Riemann-Roch'sche Satz die weitere Beziehung zwischen r und q giebt (a. a. O. § 5):

$$(R - Q) = 2(r - q),$$

so tritt der erwähnte Fall ein, wenn (ibd. § 10):

$$1) \quad p \text{ eine gerade Zahl ist, für } R = \frac{3p}{2} - 3; \quad r = \frac{p}{2} - 1; \quad q = 1.$$

$$2) \quad \text{„ „ ungerade „ „ „ } R = \frac{3p-7}{2}; \quad r = \frac{p-3}{2}; \quad q = 1.$$

Die durch die r willkürlichen Punkte mitbestimmten $R - r$ weiteren Punkte sind selbstverständlich nicht eindeutig erhältlich. Es ist vielmehr eine schwierige Aufgabe, die Werthsysteme $x_i y_i$ zu finden, für welche alle $(p - 1)$ -reihigen Determinanten jenes Rechtecks von p Vertical- und R Horizontalreihen verschwinden, oder auch nur durch Abzählungen die Anzahl der Specialgruppen $G_R^{(r)}$ zu bestimmen, die zu r gegebenen Punkten gefunden werden können, derart, dass die durch sie gehenden adjungirten Curven noch eine ∞^1 -Schaar bilden. Durch den Riemann-Roch'schen Satz wird aber dieses Problem auf ein anderes

*) Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Determinanten, § 8.

zurückgeführt, welches weit leichter anzugreifen ist, nämlich das folgende:

Die Anzahl der Gruppen $G_Q^{(1)}$ von $Q = 2p - 2 - R$ Punkten zu bestimmen, die zu einem willkürlich annehmbaren Punkt gehören und so beschaffen sind, dass alle durch sie gehenden adjungirten Curven noch eine ∞^r -Schaar bilden. Wenn man einerseits r , andererseits $q = 1$ Punkt willkürlich auf f annimmt, so entspricht *jeder* Gruppe $G_R^{(r)}$, die zu den r Punkten als Specialgruppe von der angegebenen Eigenschaft gehört, nur *eine* Gruppe G_Q^1 , die jenen einen Punkt enthält, weil sich durch die $R + 1$ Punkte nur noch eine adjungirte Curve $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung legen lässt, und ebenso umgekehrt. Demnach entsprechen sich die Lösungen beider Probleme eindeutig, und ihre Anzahl ist die gleiche. Wir haben also gewisse Punkte $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_Q y_Q$, wo $Q = \frac{p}{2} + 1$, bzw. $= \frac{p+3}{2}$ ist, zu bestimmen, für welche die linearen Gleichungen:

$$\alpha_1 \varphi_1(x_i y_i) + \alpha_2 \varphi_2(x_i y_i) + \dots + \alpha_p \varphi_p(x_i y_i) = 0, \\ (i = 1, 2, \dots, Q)$$

in der Weise erfüllt sind, dass jede eine identische Folge der $Q - 1$ übrigen ist. Diese Bedingung zieht das Verschwinden der Q -reihigen Determinanten des Rechtecks nach sich:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \dots & \varphi_p(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \dots & \varphi_p(x_2 y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_Q y_Q) & \varphi_2(x_Q y_Q) & \dots & \varphi_p(x_Q y_Q) \end{vmatrix},$$

während noch die Gleichungen bestehen:

$$f(x_1 y_1) = 0; \quad f(x_2 y_2) = 0; \quad \dots \quad f(x_Q y_Q) = 0.$$

Das so formulierte Problem lässt sich mit *algebraischen* Hilfsmitteln erfolgreich behandeln, wie ich nun zeigen will.

II.

Bedingungen für das Verschwinden der Determinanten eines Rechtecks.*)

Wir beginnen mit der Aufstellung gewisser Gleichungen, welche die nothwendige und hinreichende Bedingung darstellen dafür, dass alle k -reihigen Determinanten eines „Rechtecks“ von Elementen (einer „Matrix“) mit k Horizontalreihen („Zeilen“) und $k + i$ Verticalreihen („Reihen“):

*) Das Nachfolgende enthält den Beweis der in § 1 meines Aufsatzes „Ueber Elimination u. s. w. (d. Ann. Bd. V) mitgetheilten Formeln.

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1_1 & 2_1 & 3_1 & \dots & (k+i)_1 \\ 1_2 & 2_2 & 3_2 & \dots & (k+i)_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1_k & 2_k & 3_k & \dots & (k+i)_k \end{array} \right\|$$

verschwinden, wobei die Elemente m_n Functionen von einer so grossen Anzahl von Veränderlichen sein mögen, dass das Problem einen Sinn hat.

Scheidet man aus den Reihen irgend $k+1$ aus und vereinigt sie wieder zu einem Rechteck (die Zahl der Zeilen ist immer gleich k angenommen, wenn nichts beigefügt wird), so bestehen zwischen den $k+1$ Determinanten, die aus dem neuen Rechteck durch Weglassen je einer Reihe hervorgehen, k Gleichungen, die man erhält, wenn man das Rechteck zu einem Quadrat von $k+1$ Zeilen und Reihen dadurch ergänzt, dass man eine der Zeilen wiederholt.

So führt das Rechteck:

$$\| 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1 \|_k,$$

(dessen k Zeilen aus der angeschriebenen durch Anhängen der k Indices $1 \ 2 \ \dots \ k$ entstehen), zu den $k+1$ identischen Gleichungen:

$$(1) \quad 1_\rho(2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) + 2_\rho(1 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) + \dots + (k+1)_\rho(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k) = 0,$$

wo $(2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1)$ die Determinante:

$$(2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) = \begin{vmatrix} 2_1 & 3_1 & 4_1 & \dots & (k+1)_1 \\ 2_2 & 3_2 & 4_2 & \dots & (k+1)_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2_k & 3_k & 4_k & \dots & (k+1)_k \end{vmatrix}$$

ist, und $\rho = 1, 2, 3, \dots k$ gesetzt werden kann. Ich schreibe in der Folge die Identitäten in der kürzeren Form:

$$(1a) \quad \sum 1_\rho(2 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) = 0. \quad (\rho = 1, 2, \dots k).$$

Wir wollen nun annehmen, dass irgend zwei Determinanten des Rechtecks:

$$\| 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+1 \|_k$$

verschwinden. Sei also z. B.:

$$(2 \ 3 \ \dots \ k+1) = 0; \quad (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k) = 0.$$

Dann bestehen wegen der Identitäten (1) die $k+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} & 2_\rho(1 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) + 3_\rho(1 \ 3 \ 4 \ \dots \ k+1) + \dots \\ & + k_\rho(1 \ 2 \ \dots \ k-1, k+1) = 0. \end{aligned}$$

Diese $k+1$ linearen Gleichungen zwischen den $k-1$ Determinanten sind aber nur erfüllbar, entweder: 1. wenn die $k-1$ Deter-

minanten alle Null sind, oder: 2. wenn alle $(k - 1)$ -reihigen Determinanten des Rechtecks von $k - 1$ Reihen und k Zeilen:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2_1 & 3_1 & \dots & k_1 \\ 2_2 & 3_2 & \dots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2_k & 3_k & \dots & k_k \end{array} \right\|,$$

das wieder abgekürzt durch:

$$\|2\ 3\ \dots\ k\|_k$$

bezeichnet werden möge, verschwinden.

Enthalten also beispielsweise alle Elemente zwei Veränderliche x, y , so verschwinden *alle* Determinanten *zugleich* für diejenigen Werthepaare, welche die zwei:

$$(2\ 3\ \dots\ k + 1), \quad (1\ 2\ 3\ \dots\ k)$$

zum Verschwinden bringen, aber *nicht* die Determinanten des Rechtecks:

$$\|2\ 3\ \dots\ k\|$$

auf Null reduciren. Der Ausdruck also, der gleich Null gesetzt die Werthe einer der beiden Variabeln ergibt, für die alle Determinanten verschwinden, (die „Resultante“ des Rechtecks) ist ein Quotient, dessen Zähler die Resultante aus jenen beiden Determinanten ist, und dessen Nenner gleich der Resultante aus den Gleichungen des Rechtecks mit 2 Verticalreihen weniger ist. Die Bildung der Letzteren ist aber im Allgemeinen eine leichtere Aufgabe, auf welche die Erstere somit zurückkommt. Man kann dieses Ergebniss noch in einer anderen Form ausdrücken, die wir im Folgenden vorziehen. Wenn man nämlich unter:

$$(1\ 2\ 3\ \dots\ k + 1)_k$$

die *Anzahl* der Lösungen (im obigen Fall: Werthepaare) versteht, welche alle Determinanten des entsprechenden Rechtecks zum Verschwinden bringen, (den Grad der „Resultante des Rechtecks“), ferner unter:

$$\{1\ 2\ 3\ \dots\ k\}_k (2\ 3\ 4\ \dots\ k + 1)_k\}$$

die Anzahl derjenigen, die gleichzeitig die beiden in $\{ \}$ eingeschlossenen Determinanten zu Null machen, so ist nach dem Gesagten:

$$(2) \quad (1\ 2\ 3\ \dots\ k + 1)_k = \{(1\ 2\ 3\ \dots\ k)_k (2\ 3\ 4\ \dots\ k + 1)_k\} - (2\ 3\ \dots\ k)_k.$$

Man kann nun weiterhin die Ermittlung der Lösungen, welche die Determinanten der Matrix:

$$\|1\ 2\ 3\ \dots\ k + 2\|_k$$

verschwinden machen, zurückführen auf die eben gelöste Aufgabe, und findet die Anzahl dieser Lösungen — unter Anwendung einer der

eben eingeführten Bezeichnungsweise analogen — durch die Formel ausgedrückt:

$$(3) \quad (1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+2)_k = \{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+1) (3 \ 4 \ \dots \ k+2)\} \\ - \{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k) (3 \ 4 \ \dots \ k+1)\} + (3 \ 4 \ \dots \ k),$$

wo wieder: $\{(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+1) (3 \ 4 \ \dots \ k+2)\}$ die Anzahl der Lösungssysteme (diesmal von wenigstens 3 Veränderlichen) bedeutet, die zugleich die Determinanten der eingeschlossenen Matrix und die einzeln bezeichnete Determinante zu Null machen, u. s. w. Anstatt jedoch diese Formel gesondert zu beweisen, wende ich mich gleich zu der allgemeinen Aufgabe, diejenigen Lösungssysteme zu finden, die alle Determinanten des Rechtecks:

$$\|1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+i\|_k$$

zum Verschwinden bringen, beziehungsweise die Anzahl:

$$(1 \ 2 \ 3 \ \dots \ k+i)_k$$

dieser Lösungen zu ermitteln, wo $k > i$ ist.

Hinsichtlich der Beschaffenheit der Elemente setze ich den sogenannten „allgemeinen“ Fall voraus, d. h. ich nehme an, dass das Verschwinden der einzelnen Determinanten der Rechtecke (von k Zeilen) wirklich so viele Bedingungen mit sich bringt, wie beispielsweise in dem Fall, dass die einzelnen Elemente ganze Functionen gleich hohen Grades mit unbestimmten Coefficienten aller Veränderlichen sind. — Die Zahl der Veränderlichen sei mindestens gleich $i+1$. Dann lässt sich zunächst zeigen, dass das Verschwinden aller Determinanten der beiden Rechtecke ($1 \leq g \leq i$):

$$(4) \quad \begin{cases} \|1 \ 2 \ 3 \ \dots \ i, i+1, \dots \ k, \dots \ k+g-1\|, \\ \|i+1, \dots \ k+g\| \end{cases}$$

mit $k+g-1$, bzw. $k+g-i$ Reihen und je k Zeilen (der untere Index k ist weggelassen worden), d. h. der k -reihigen des ersten, der $(k+g-i)$ -reihigen des zweiten Rechtecks, immer auch das Verschwinden der Determinanten der folgenden beiden Rechtecke — ich werde abkürzend auch von dem „Verschwinden der Rechtecke“ sprechen —:

$$(5) \quad \begin{cases} \|1 \ 2 \ 3 \ \dots \ i \ \dots \ k \ \dots \ k+g\|, \\ \|i+1 \ \dots \ k+g+1\| \end{cases}$$

nach sich zieht, ausser wenn die Determinanten des Rechtecks:

$$\|i+1 \ \dots \ k+g-1\|$$

zugleich Null werden.

Was das Letzte der Rechtecke (5) angeht, so verschwindet dasselbe offenbar immer dann, wenn das Letzte der (4) verschwindet.

haupt durch das Bestehen der (8) die (4) verschwinden, d. h. *alle* oben ausgeschlossenen Fälle. Denn, wenn das erste Rechteck (4) verschwinden soll, so muss unter Anderen gewiss auch das Rechteck (8a) verschwinden.

Wir schliessen hieraus, dass sämtliche Lösungen, die das System (4) zu Null machen, in zwei Theile zerfallen, nämlich:

- 1) Diejenigen, welche das System (5) zum Verschwinden bringen,
- 2) Diejenigen, für welche das System (8), (8a) zu Null wird.

Die letzteren zerfallen ihrerseits in derselben Weise wieder in Solche, welche das System (4) zu Null machen, und solche, für welche das System:

$$(9) \quad \parallel i + 1 \dots k + g - 2 \parallel$$

Null wird. Combinirt man dies mit einem System von $k + g - 3$ Reihen der Matrix (8a), also z. B. mit:

$$(9a) \quad \parallel 1 \ 2 \ 3 \dots k + g - 3 \parallel,$$

so verhält sich (9), (9a) gegenüber (8), (8a) wiederum ebenso, wie das letztere System gegenüber (4), und wie dieses gegenüber (5), u. s. f. Man gelangt durch Verlängerung dieser Kette zuletzt zu einer Einzeldeterminante und einem Rechteck:

$$(10) \quad (1 \ 2 \ 3 \dots k), \parallel i + 1, \dots k + 1 \parallel,$$

aus deren Verschwindungswerthen wieder diejenigen auszuscheiden sind, für welche die Determinanten des Rechtecks:

$$(11) \quad \parallel i + 1, \dots k \parallel$$

alle verschwinden. Weil nun umgekehrt die letztere Bedingung das Verschwinden *beider* Rechtecke (10) nach sich zieht, so bricht das Verfahren hier ab.

Man kann das Ergebniss desselben darstellen durch eine Gleichung für die Anzahl $(1 \ 2 \ 3 \dots k + i)_k$ der Lösungen, welche die k -reihigen Determinanten des Rechtecks:

$$\parallel 1 \ 2 \ 3 \dots k + i \parallel_k$$

zum Verschwinden bringen. Man ermittelt zunächst die Anzahl:

$$\{(1 \ 2 \ 3 \dots k + i - 1)_k (i + 1, \dots k + i)_k\}$$

der Werthsysteme, die zugleich die Determinanten der Rechtecke (bezw. die Einzeldeterminante):

$$\parallel 1 \ 2 \ 3 \dots k + i - 1 \parallel, (i + 1, \dots k + i)$$

zum Verschwinden bringen (für $g = i$ in (4), (5)), zieht davon ab die Anzahl:

$$\{(1 \ 2 \ 3 \dots k + i - 2)_k (i + 1, \dots k + i - 1)_k\}$$

derer, für welche die den Klammern entsprechenden Rechtecke zu Null werden, *nachdem zuvor* die Zahl:

$$\{(1\ 2\ 3, \dots k+i-3)_k (i+1, \dots k+i-2)_k\}$$

ermittelt und abgezogen ist (diese Zahl tritt also mit positivem Vorzeichen in die Formel ein), u. s. w. *Man erhält so die Schlussformel:*

$$\begin{aligned} (11) \quad -(123 \dots k+i)_k &= \{(123 \dots k+i-1)_k (i+1, \dots k+i)_k\} \\ &\quad - \{(123 \dots k+i-2)_k (i+1, \dots k+i-1)_k\} \\ &\quad + \{(123 \dots k+i-3)_k (i+1, \dots k+i-2)_k\} \\ &\quad - \dots (-1)^i (i+1, \dots k)_k. \end{aligned}$$

Hiernach wird insbesondere:

$$\begin{aligned} (123)_2 &= \{(12)_2 (23)_2\} - (2)_3, \\ (1234)_3 &= \{(123)_3 (234)_3\} - (23)_3, \\ (12345)_3 &= \{(1234)_3 (345)_3\} - \{(123)_3 (34)_3\} + (3)_3 \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Für die Anwendung auf die Rechtecke des Specialgruppenproblems kann man die Formel (11) noch in eine einfachere Gestalt bringen. In diesem Falle nämlich unterscheiden sich die einzelnen Verticalreihen der Rechtecke nur durch den Index in der Bezeichnung: $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_p$ der eingehenden ganzen Functionen, sind aber für die Abzählung, da die φ alle von dem gleichen Grad $m-3$ sind, gleichwerthig. Es genügt also dann, statt die Reihen einzeln zu benennen, die Rechtecke nur durch die Anzahl der eingehenden Verticalreihen zu kennzeichnen. *Mit dieser Abkürzung geht die Formel (11) über in die folgende:*

$$\begin{aligned} (12) \quad (k+i) &= \{k+i-1, k\} - \{k+i-2, k-1\} \\ &\quad + \{k+i-3, k-2\} - \dots (-1)^i (k-i), \end{aligned}$$

in welcher Gestalt sie unten angewandt wird.

III.

Correspondenzen, die zwischen mehreren Punkten einer Curve bestehen.

Das zu behandelnde System von Gleichungen, durch welches das Verschwinden der Determinanten des in der Einleitung aufgestellten Rechtecks seinen Ausdruck findet, bereitet der Frage nach der von überflüssigen Factoren freien Resultante nicht unerhebliche Schwierigkeiten, weil zwischen den Paaren von Veränderlichen, die in den Elementen des Rechtecks auftreten, je eine Gleichung besteht, die aussagt, dass die ihnen entsprechenden Punkte auf der Curve f liegen.

Im Allgemeinen enthalten die aus den Rechtecksbedingungen, wie sie der vorstehende Abschnitt liefert, fließenden Gleichungen alle Variabelnpaare, die das Problem mit sich führt. Es entsteht somit

sowie für $k = 3$ und $k = 4$ schon früher von mir und Anderen behandelt worden*). Inzwischen habe ich die allgemeine Formel gefunden und eine auf den Fall $k = 2$ sich stützende Begründung derselben, die in den folgenden Abschnitten enthalten ist. Ich beginne mit einer Zusammenstellung der auf den Fall von zwei Correspondenzen mit zwei Variabelnpaaren bezüglichen Formeln, deren Ableitung ich jedoch für eine andere Gelegenheit aufsparen muss.

Zwischen drei Punkten k, r, s (mit den Coordinaten $x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s$) der Curve $f = 0$, für die also:

$$f(x_k y_k) = 0, \quad f(x_r y_r) = 0, \quad f(x_s y_s) = 0$$

ist, mögen zwei Correspondenzen bestehen:

$$\varphi(x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) = 0,$$

$$\psi(x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) = 0,$$

deren „Werthigkeiten“ wir beziehungsweise durch:

$$\varphi_{kr}, \psi_{kr}, \varphi_{ks}, \psi_{ks}, \varphi_{rs}, \psi_{rs}$$

bezeichnen. Also für z. B. $x_k = x_r, y_k = y_r$ verschwindet φ mitsammt den 1., 2., . . . $(\varphi_{kr} - 1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten nach x_k, y_k , während die $\varphi_{kr}^{\text{ten}}$ nicht alle zugleich verschwinden.

Die gemeinsamen Werthepaare (Schnittpunkte) der Gleichung $\varphi = 0$, als Curvengleichung für die Coordinaten $x_k y_k$ (bezw. $x_r y_r, x_s y_s$) aufgefasst, mit $f = 0$, bestehen aus:

1. Auf f festliegenden, d. h. von der Lage der Punkte r, s , bezw. k, s , und k, r unabhängigen Punkten $(\alpha), (\beta) \dots$ (mit den Coordinaten $a_\alpha b_\alpha, a_\beta b_\beta, \dots$), die auch singuläre Punkte von f sein können. In den nachfolgenden Anwendungen ist das Verhalten der Correspondenzen das von „adjungirten“ Curven. Wir nennen diese festen Punkte: *Ausnahmepunkte*. Ihre Annahme wird durch jene Anwendungen erfordert.

2. Aus veränderlichen aber rational bekannten Schnittpunkten, nämlich $x_k = x_r, y_k = y_r; x_k = x_s, y_k = y_s$ und $x_r = x_s, y_r = y_s$.

3. Aus im Allgemeinen rational nicht trennbaren, mit r, s veränderlichen „freien“ Schnittpunkten.

Die Anzahl der letzteren sei

$$\varphi_k \text{ (bezw. } \varphi_r, \varphi_s) \text{ für } \varphi = 0; \quad \psi_k (\psi_r, \psi_s) \text{ für } \psi = 0.$$

Dann ist:

$$\varphi_k = n \cdot [\varphi_k] - \sum_{\alpha} \alpha \cdot \varphi_k^{(\alpha)} - \varphi_{kr} - \varphi_{ks},$$

*) Ibid. Bd 6, S. 33; ferner die abweichende Darstellung in Clebsch-Lindemann, analyt. Geom. d. Ebene S. 720.

wenn $[\varphi_k]$ die Ordnung (der Grad) von φ hinsichtlich der Coordinaten von (k) , n die Ordnung von f , α die Vielfachheit von f in einem Ausnahmepunkt, in welchem $\varphi_k^{(\alpha)}$ die Vielfachheit von $\varphi(x_k y_k) = 0$ ist, Σ die Summe über alle Ausnahmepunkte bedeutet, in denen $\varphi(x_k y_k)$ verschwindet, endlich φ_{kr} , φ_{ks} , φ_{rs} die Vielfachheit der in (2) erwähnten Schnittpunkte („Werthigkeiten“) ist. Analog ist:

$$\varphi_r = n[\varphi_r] - \sum \alpha \varphi_r^{(\alpha)} - \varphi_{rk} - \varphi_{rs}.$$

Wenn man aus den Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$ die Grössen $x_k y_k$ eliminirt, so lässt sich die von fremden Lösungen freie Resultante nur durch einen (im Allgemeinen selbst mit Hülfe von $f = 0$ nicht ausführbaren) Quotienten aus mehreren Correspondenzen zwischen r , s darstellen*), den man jedoch bezüglich seines Verhaltens gegenüber f als eine einzige Correspondenz auffassen kann, wobei nöthigenfalls selbst negative Zahlen als Werthigkeit nicht ausgeschlossen sind**). Dieser Quotient („gebrochene Correspondenz“):

$$\Omega(x_r y_r, x_s y_s) = 0$$

oder kürzer:

$$\Omega(r, s) = 0$$

hat, als Function von (r) (der Coordinaten $x_r y_r$) aufgefasst:

$$\Omega_r = \varphi_r \psi_k + \psi_r \varphi_k - 2p \varphi_{kr} \psi_{kr}$$

„freie“ Schnittpunkte***) mit $f = 0$, und besitzt in $(r) = (s)$ einen:

$$\Omega_{rs} = \varphi_{rs} \psi_k + \psi_{rs} \varphi_k - \varphi_{kr} \psi_{ks} - \varphi_{ks} \psi_{kr}$$

-fachen Punkt. p bedeutet das Geschlecht der Curve f . Die Zahlen Ω_r und Ω_{rs} sind als Differenzen der entsprechenden Zahlen für Zähler und Nenner des Bruches Ω aufzufassen†).

*) Clebsch-Lindemann, Geometrie, 6. Abtheilung, IV, S. 731, S. 747.

**) Vergl. Hurwitz, über Correspondenzen, d. Ann. Bd. XXVIII, S. 561, sowie die Abh. d. Verf. in d. Ann. Bd. VII, S. 611 ff., und Bd. XXXI, S. 405.

***) Es ist nicht ausgeschlossen, dass auch von diesen freien Punkten in besonderen Fällen einige in die Ausnahmepunkte rücken, so z. B. immer in einen solchen, für den in beiden Correspondenzen die Vielfachheit je kleiner als die Werthigkeit ist, was übrigens in den folgenden Anwendungen nicht vorkommt. Wir würden alsdann auch diese als *freie* Schnittpunkte rechnen.

†) S. d. Abhdl. d. Verf. in Bd. VI, S. 42, S. 46 und Bd. VII, S. 611 d. Ann., sowie Clebsch-Lindemann, Geometrie, S. 734. — Allgemein hat in jedem α -fachen Punkt von f , der $\varphi_k^{(\alpha)}$ -facher bez. $\psi_k^{(\alpha)}$ -facher Ausnahmepunkt von φ und ψ ist, Ω einen:

$$\varphi_k^{(\alpha)} \psi_k + \psi_k^{(\alpha)} \varphi_k - \varphi_{kr} \psi_k^{(\alpha)} - \psi_{kr} \varphi_k^{(\alpha)} - \varphi_{kr} \psi_{kr} (\alpha - 1)$$

-fachen Punkt. — Ich führe noch den *Grad* $[\Omega_r]$ des Quotienten Ω (als Differenz der Gradzahlen von Zähler und Nenner aufgefasst) hinsichtlich $x_r y_r$ an (unter n den Grad von f , $[\varphi_r]$ den von φ in $x_r y_r$ u. s. w. verstanden):

$$[\Omega_r] = [\varphi_r] \psi_k + [\psi_r] \varphi_k - \varphi_{kr} [\psi_k] - \psi_{kr} [\varphi_k] - \varphi_{kr} \psi_{kr} (n - 1).$$

Die gebrochene Correspondenz $\Omega(x_r y_r, x_s y_s) = 0$ will ich in der Folge, als Resultat der Elimination von (k) aus $\varphi = 0, \psi = 0$ mit $(\varphi\psi)^{(k)}$ oder kürzer $(\varphi\psi)$ bezeichnen. Entsprechend werden dann die Zahlen für die freien Schnittpunkte mit f und die Werthigkeit der Resultante Ω durch:

$$(1) \quad \begin{cases} (\varphi\psi)_r^{(k)} = \Omega_r = \varphi_r \psi_k + \psi_r \varphi_k - 2p \varphi_{kr} \psi_{kr}, \\ (\varphi\psi)_s^{(k)} = \Omega_s = \varphi_s \psi_k + \psi_s \varphi_k - 2p \varphi_{ks} \psi_{ks}, \\ (\varphi\psi)_{rs}^{(k)} = \Omega_{rs} = \varphi_{rs} \psi_k + \psi_{rs} \varphi_k - \varphi_{kr} \psi_{ks} - \varphi_{ks} \psi_{kr} \end{cases}$$

dargestellt, wo hier, wie in der Folge der obere Index die eliminirten Variablen angiebt. Uebrigens ist:

$$(\varphi\psi)_r^{(k)} = (\varphi\psi)_k^{(r)}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die gegebenen Correspondenzen φ, ψ selbst „gebrochene“ sind, weil die entsprechenden Ausdrücke sich aus den bilinearen für Zähler und Nenner einzeln hergestellten durch Addition und Subtraction zusammensetzen lassen.

In Anlehnung an diese Formeln die ich wie gesagt als bekannt voraussetze, kann man nun sogleich den nächst höheren Fall behandeln, wo drei Correspondenzen zwischen vier Variablenreihen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 y_1, x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) &= 0, \\ \psi(x_1 y_1, x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) &= 0, \\ \chi(x_1 y_1, x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) &= 0, \end{aligned}$$

und für die durch Elimination von (1) und (k) aus diesen Gleichungen und:

$$f(x_1 y_1) = 0, \quad f(x_k y_k) = 0$$

entstehende (gebrochene) Correspondenz:

$$\Omega(r, s) = 0$$

die Zahlen Ω_r und Ω_s bestimmen, welche den Grad und die Werthigkeit angeben. Ich beschränke mich zu diesem Behufe auf den Fall, dass in einer der Correspondenzen, z. B. $\varphi = 0$, eines der Variablenpaare, etwa $x_1 y_1$, gar nicht auftritt, und bestimme jene Zahlen für diesen besonderen Fall, indem ich auf dem früher angegebenen Wege $x_1 y_1$ aus $\psi = 0, \chi = 0$ eliminire, ferner aus der so erhaltenen (gebrochenen) Correspondenz:

$$\Phi(k, r, s) = 0,$$

in Verbindung mit:

$$\varphi(k, r, s) = 0$$

und $f = 0$ die Variablen (k) wegschaffe. Aus den für diese Resultante

bestimmten Zahlen $(\varphi\Phi)_r$ und $(\varphi\Phi)_{rs}$ leitet man nun die dem *allgemeinen* Fall entsprechenden Zahlen ab durch Zufügen derjenigen Glieder, die aus Gründen der *symmetrischen* Gestalt dieser Formeln zu ergänzen sind.

Die Rechtfertigung für dieses Verfahren beruht auf der Einsicht in *einige allgemeine Eigenschaften der Resultante* aus mehreren Correspondenzgleichungen, die wir zunächst zusammenstellen wollen. Gegeben seien $k+1$ Correspondenzgleichungen zwischen den $k+2$ Variabelnpaaren $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ky_k, x_r y_r, x_s y_s$ (kurz $(1)(2)\dots k, r, s$):

$$\varphi = 0, \psi = 0, \chi = 0, \omega = 0, \dots, \vartheta = 0,$$

wo noch die Gleichung:

$$f = 0$$

für jedes Paar der Veränderlichen erfüllt ist. Wir verstehen unter der *Resultante aus diesen Correspondenzgleichungen* die linke Seite der durch Elimination von $(1)(2)\dots(k)$ entstehenden Correspondenz:

$$P(x_r y_r, x_s y_s) = 0,$$

welche als Function von (r) aufgefasst ausser in den Ausnahmepunkten die Curve f nur noch in solchen Punkten (r) trifft, zu welchen Systeme $(1)(2)\dots(k)$ gefunden werden können, die allen Correspondenzen zugleich genügen. Bezeichnet man eines der Werthsysteme von $(1)(2)\dots(k)$, welches den ersten k Correspondenzen allein (also allen mit Ausnahme von ϑ) bei beliebig gegebenem r, s genügt und keinen Ausnahmepunkt enthält, mit (h) , so ist die Resultante P darstellbar in der Form einer symmetrischen Function aller Werthsysteme h , nämlich durch das Product:

$$P = \frac{\Theta_0 \Pi \vartheta^{(h)}}{\Theta_1},$$

wo $\Pi \vartheta^{(h)}$ das Product über alle $\vartheta^{(h)}$ ($\vartheta^{(h)}$ die Function ϑ geschrieben in einem der Werthsysteme (h)) ist, Θ_0 aber und Θ_1 ganze Functionen der Coefficienten der Correspondenzen φ, ψ, \dots (*ausser* ϑ) sind, von denen Θ_0 dazu dient, den Nenner in $\Pi \vartheta^{(h)}$ wegzuheben, und in Producte von Potenzen zerfällt, deren Exponenten die *Gradzahlen* $[\vartheta_1], [\vartheta_2] \dots [\vartheta_k]$ von ϑ hinsichtlich x_1y_1, x_2y_2, \dots sind, während Θ_1 in Producte zerfällt von Potenzen, deren Exponenten*) sind:

1. Die *Vielfachheitszahlen*, die das Verschwinden von ϑ hinsicht-

*) Vorausgesetzt ist hierbei, dass, abgesehen von den Ausnahmepunkten, die Correspondenzen alle zugleich nur für *discrete* Werthsysteme der Variabeln $1, 2, \dots, r$ (bei gegebenem s) verschwinden, dass also, geometrisch zu reden, in den durch die Variabelnpaare bestimmten höheren Räumen *continuirliche* Gebilde wie Curven, Flächen, \dots nicht allen gemeinsam sind.

lich der Variablen (1) (2), ... in den Ausnahmepunkten α, β, \dots angeben: $\vartheta_1^{(\alpha)}, \vartheta_2^{(\alpha)}, \dots, \vartheta_1^{(\beta)}, \vartheta_2^{(\beta)}, \dots$

2. Die *Werthigkeitszahlen* $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \dots, \vartheta_{1k}, \dots$. Im Uebrigen sind $\Theta_0 \Theta_1$ von den der Correspondenz ϑ zugehörigen Zahlen unabhängig.

Ich übergehe hier den Beweis für die Richtigkeit dieser Darstellung der Resultante P , die, der Form nach unsymmetrisch, doch in der Ausrechnung die erforderliche Symmetrie hinsichtlich aller den $k + 1$ Correspondenzen zugehörigen Coefficienten besitzt, und verweise deshalb auf meinen Aufsatz über die reducirte Resultante.

Die Symmetrie von P hinsichtlich der Correspondenzen zieht eine symmetrische Gestalt nach sich auch der *Formeln* für den *Grad* $[P_r]$ von P hinsichtlich $x_r y_r$, für die *Werthigkeitszahl* P_{rs} , sowie für diejenigen Zahlen, welche die Höhe des Verschwindens in den Ausnahmepunkten α, β, \dots ausdrücken: $P_r^{(\alpha)}, P_s^{(\alpha)}; P_r^{(\beta)}, P_s^{(\beta)}; \dots$ was dann auch noch für die *Zahl der freien Schnittpunkte* P_r von $P = 0$ mit $f = 0$ gilt, welche sich linear und homogen aus diesen Grössen zusammensetzt:

$$P_r = [P_r]n - \sum \alpha P_r^{(\alpha)} - P_{rs},$$

und entsprechend für P_s . Aus der angeführten Darstellung von P folgt aber, dass in die Ausdrücke $[P_r], P_r^{(\alpha)}, P_{rs}$ und P_r von den der Correspondenz zugehörigen Zahlen nur die Gradzahlen $[\vartheta_1], [\vartheta_2], \dots$ die Werthigkeitszahlen ϑ_{ik} und die Vielfachheitszahlen $\vartheta_1^{(\alpha)}, \vartheta_2^{(\alpha)}, \dots$ (bezw. also deren lineare Combinationen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$, wo

$$\vartheta_i = [\vartheta_i]n - \sum \alpha \vartheta_i^{(\alpha)} - \vartheta_{1i} - \vartheta_{2i} - \dots$$

ist) eingehen können. Was den Nenner Θ_1 angeht, so ist dies nach dem Gesagten unmittelbar klar, und der Zähler $\Theta_0 \Pi \vartheta^{(h)}$ theilt diese Eigenschaft mit der angegebenen Form der Resultante aus irgendwelchen Gleichungen, die *keine* gemeinsamen Lösungssysteme besitzen.

Man beweist nunmehr leicht, dass die Ausdrücke $[P], \dots$

1) nothwendig *lineare homogene Functionen der Grössen* $[\vartheta_i], \vartheta_i^{(\alpha)}, \vartheta_{ik}$ (oder auch der ϑ_i) sind. Denn vermöge ihrer algebraischen Bedeutung besitzen diese Grössen die Eigenschaft, dass sie, wenn man für die Correspondenz ϑ die λ^{te} Potenz einer ebensolchen η setzt:

$$\vartheta = \eta^\lambda,$$

in das λ -fache der entsprechenden Zahlen für η übergehen. Andererseits verwandelt sich dann auch die Resultante P in die λ^{te} Potenz der Resultante R aus $\varphi, \psi, \dots, \eta$, d. h. die Zahlen $[P_r], \dots$ werden das λ -fache der entsprechenden $[R_r], \dots$. Sieht man also die Zahl P_{rs} als Functionszeichen an, so wird:

$$P_{rs}(\lambda[\eta_i], \lambda\eta_i^{(\alpha)}, \dots) = \lambda \cdot P_{rs}([\eta_i], \eta_i^{(\alpha)}, \dots).$$

Diese Functionalgleichung bestimmt aber P_{rs} als lineare homogene

Function der Grössen $[\eta_i]$, ..., und analoges gilt für die Zahlen $[P_r]$, $P_r^{(\alpha)}$, P_r , q. e. d. Da sich dieselben den anderen Correspondenzen gegenüber ebenso verhalten, so folgt, dass sie homogene lineare Ausdrücke in den entsprechenden Zahlen für jede einzelne Correspondenz $\varphi, \psi, \dots \delta$ sind.

Wir beweisen noch eine *zweite* Eigenschaft dieser Ausdrücke. Die unteren Indices an den Zahlen $[\partial_i]$, ∂_{pq} , $\partial_i^{(\alpha)}$, ∂_i sind den einzelnen Variabelnpaaren $x_i y_i$, $x_p y_p$, $x_q y_q$, ... zugeordnet. Wir behaupten nun:

2) *Dass in jedem Glied der Ausdrücke $[P_r]$, ... alle Indices der zu eliminirenden Variablen $1, 2, \dots k$, sowie diejenigen des Ausdrucks selbst (r , bez. s), wirklich mindestens einmal auftreten müssen.* Denn würde in einem Glied z. B. der Index 1 fehlen, so könnte es eintreten, dass das Variabelnpaar $x_1 y_1$ überhaupt gar nicht vorkommt, ohne dass der Werth dieses Gliedes sich auf Null reducirt. Aber wenn $x_1 y_1$ allenthalben ausfiel, so würden im Allgemeinen die $k+1$ Correspondenzen zwischen nur k Punkten von f $2, 3, \dots k, r$ mit einander unverträglich sein. Die Zahlen $[P]$, ... müssen also in diesem Fall verschwinden, was nur so möglich ist, dass der Index 1 in jedem Glied auftritt. Ein ähnlicher Schluss gilt für die Zahlen r, s .

Die beiden erwähnten Eigenschaften *ermöglichen nun die Bildung der allgemeinen Ausdrücke für $[P_r]$, P_{rs} , $P_r^{(\alpha)}$, P_r an der Hand eines Recursionsverfahrens.* Man geht nämlich von dem besonderen Fall aus, dass in einer der Correspondenzen, z. B. φ , die Variablen (1) (2) ... $(k-1)$ nicht vorkommen, bestimmt die gewünschten Ausdrücke für diesen Fall mit Hilfe der Formel für den nächstniedereren von nur k Variablen und fügt dann die fehlenden Glieder aus Symmetriegründen zu, indem man z. B. aus dem Vorkommen eines Gliedes wie $\varphi_k \psi_{rs} \chi_{pq} \dots$ auf die ausgefallenen Glieder: $\varphi_{pq} \psi_{rs} \chi_k \dots \varphi_{pq} \psi_k \chi_{rs} \dots$ u. s. w. schliesst. Nach dem Gesagten ist leicht zu ersehen, dass man auf diesem Wege zu allen überhaupt möglichen Gliedern gelangt. Denn weil die Variablen k, r und s in φ auftreten, also der specielle Fall alle Glieder der linearen homogenen Function mit $[\varphi_k]$, $\varphi_k, \dots [\varphi_r]$, $\varphi_r, \dots [\varphi_s]$, $\varphi_s, \dots \varphi_{kr}, \dots$ liefert, so kann, da wegen der Eigenschaft (2) die Indices k, r, s in allen Gliedern vorkommen, überhaupt kein Glied ausgefallen sein, für welches nicht andererseits ein Musterglied vorhanden ist. Zahlencoefficienten und die von f herrührenden Factoren sind dann jedesmal zu übertragen.

Wenn nun aber aus den dem speciellen Fall entsprechenden Ausdrücken durch Zufügen bloss der symmetrischen Glieder die allgemeinen Formeln ableitbar sind, so muss umgekehrt ein symmetrisch hinsichtlich der $\varphi, \psi, \dots \delta$ gebildeter Ausdruck von den angegebenen Eigenschaften, der für:

$$\begin{aligned} [\varphi_1] &= [\varphi_2] = \dots = [\varphi_{k-1}] = 0, \\ \varphi_1^{(\alpha)} &= \varphi_2^{(\alpha)} = \dots = \varphi_{k-1}^{(\alpha)} = \varphi_1^{(\beta)} = \dots = 0, \\ \varphi_{pq} &= 0, \quad (q = 1, 2, \dots, k, r, s; \quad p = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned}$$

auf jenen speciellen sich reducirt, die allgemeine Formel darstellen.

Ich werde im nächsten Abschnitt zeigen, dass diese Bedingungen von den beiden nachfolgenden Formeln*) erfüllt werden, durch welche der Ausdruck für die Anzahl $P_r = (\varphi \psi \chi \dots \vartheta)_r^{(12\dots k)}$ der freien Schnittpunkte der resultirenden Correspondenz $P(rs) = 0$ mit $f = 0$, sowie der für die Werthigkeit $P_{rs} = (\varphi \psi \chi \dots \vartheta)_{rs}^{(12\dots k)}$ (wo der obere Index jedesmal die eliminirten Veränderlichen angiebt) zurückgeführt wird auf die entsprechenden Ausdrücke für nur je k Correspondenzen, aus denen $k-1$ Variable eliminirt werden:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} P_r &= (\varphi \psi \chi \dots \vartheta)_r^{(12\dots k)} = S \varphi_r (\psi \chi \dots \vartheta)_k^{(12\dots k-1)} \\ &\quad - p \sum_{i=1}^{i=k} S \varphi_{ir} (\psi \chi \dots \vartheta)_{ir}^{(12\dots k-1)}, \\ P_{rs} &= (\varphi \psi \chi \dots \vartheta)_{rs}^{(12\dots k)} = S \varphi_{rs} (\psi \chi \dots \vartheta)_k^{(12\dots k-1)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=k} S \varphi_{ir} (\psi \chi \dots \vartheta)_{is}^{(12\dots k-1)}. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet p das Geschlecht von f , S die Summe über alle $k+1$ durch Vertauschung von φ mit $\psi \chi \dots \vartheta$ aus dem angeschriebenen Glied entstehenden Glieder.

IV.

Correspondenzen zwischen mehreren Punkten einer Curve. Fortsetzung.

Die Symmetrie der am Schluss des vorigen Abschnitts aufgestellten Ausdrücke hinsichtlich der $k+1$ Correspondenzen $\varphi \psi \dots \vartheta$ liegt auf der Hand**). Es bleibt zu erweisen, dass für den Fall, dass in der Correspondenz φ die Variablen $1, 2, \dots, k-1$ nicht auftreten, φ also von der Form ist:

$$\varphi(x_k y_k, x_r y_r, x_s y_s) = 0$$

jene Formeln übergehen in solche, die, unter Annahme ihrer Gültigkeit

*) Die Formeln für $[P]$ und $[P_r^{(\alpha)}]$, die sich leicht mit denselben Hilfsmitteln entwickeln lassen, sind im Folgenden nicht erforderlich und weggelassen.

**) Nicht unmittelbar lässt sich die Symmetrie dieser Ausdrücke hinsichtlich der k Variablen $1, 2, \dots, k$ erkennen. Für den Nachweis derselben wären ähnliche Umformungen wie in Nr. V nöthig.

für bloss k Correspondenzen mit $k + 1$ Variabelnpaaren, sich auf directem Weg aufstellen lassen.

Eliminirt man in dem letzterwähnten Fall die Variabeln $1, 2, \dots, k-1$ aus den Correspondenzgleichungen $\psi, \chi, \dots, \vartheta$ in Verbindung mit $f=0$, so gelangt man zu einer Gleichung:

$$\Phi(k, r, s) = 0.$$

Eliminirt man aus dieser und:

$$\varphi(k, r, s) = 0; \quad f = 0$$

etwa (k) , so erhält man für die Resultante $R(x_r y_r, x_s y_s) = 0$ vermöge der Ausdrücke (1) in III die Zahlen:

$$R_r = (\varphi \Phi)_r^{(k)} = \varphi_r \Phi_k + \varphi_k \Phi_r - 2p \varphi_{kr} \Phi_{kr},$$

$$R_{rs} = (\varphi \Phi)_{rs}^{(k)} = \varphi_{rs} \Phi_k + \varphi_k \Phi_{rs} - \varphi_{kr} \Phi_{ks} - \varphi_{ks} \Phi_{kr},$$

oder, in der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$R_r = \varphi_r (\psi \chi \dots \vartheta)_k^{(12 \dots k-1)} + \varphi_k (\psi \chi \dots \vartheta)_r^{(12 \dots k-1)} - 2p \varphi_{kr} (\psi \chi \dots \vartheta)_{kr}^{(12 \dots k-1)},$$

$$R_{rs} = \varphi_{rs} (\psi \chi \dots \vartheta)_k + \varphi_k (\psi \chi \dots \vartheta)_{rs} - \varphi_{kr} (\psi \chi \dots \vartheta)_{ks} - \varphi_{ks} (\psi \chi \dots \vartheta)_{kr},$$

wo in der zweiten Formel der obere Index, der die eliminirten Variabeln angibt, weggelassen wurde.

Dies sind die gesuchten Vergleichsformeln.

Andererseits lassen sich nun die Formeln (2) für P_r und P_{rs} am Schlusse des vorigen Abschnitts mit Hilfe der Bedingungen, die das Nichtvorkommen der Variabeln $1, 2, \dots, k-1$ in φ ausdrücken:

$$\varphi_\lambda = 0; \quad \varphi_{\lambda\mu} = 0; \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k-1; \mu = 1, 2, \dots, k, r, s)$$

in folgende Form bringen — wenn man durch Einschliessen in eckige Klammern das Resultat der Einführung dieser Bedingungsgleichungen ausdrückt*):

$$[P_r] = \varphi_r (\psi \chi \dots \vartheta)_k + [\dot{S} \psi_r (\varphi \chi \dots \vartheta)_k] - p \varphi_{kr} (\psi \chi \dots \vartheta)_{kr} - p \sum_1^{k-1} [\dot{S} \psi_{ir} (\varphi \chi \dots \vartheta)_{ir}] - p [\dot{S} \psi_{kr} (\varphi \chi \dots \vartheta)_{kr}],$$

$$[P_{rs}] = \varphi_{rs} (\psi \chi \dots \vartheta)_k + [\dot{S} \psi_{rs} (\varphi \chi \dots \vartheta)_k] - \varphi_{kr} (\psi \chi \dots \vartheta)_{ks} - \sum_1^{k-1} [\dot{S} \psi_{ir} (\varphi \chi \dots \vartheta)_{is}] - [\dot{S} \psi_{kr} (\varphi \chi \dots \vartheta)_{ks}].$$

*) Eine Verwechslung mit den oben durch ebensolche Klammern bezeichneten Gradzahlen ist wohl ausgeschlossen.

wo die Summe \dot{S} dasselbe bedeutet, wie oben S , unter Ausschluss jedoch des Buchstabens φ (der also an seiner Stelle bleibt, während $\psi, \chi \dots \vartheta$ wechseln). Um in diesen Ausdrücken die Summe

$$\dot{S} \psi_r (\varphi \chi \dots \vartheta)_k$$

und die analogen als explicite Functionen der φ darzustellen, bestimme man die dem Resultat der Elimination von $1, 2, \dots k-2$ aus den Correspondenzen $\chi, \omega, \dots \vartheta$:

$$(\chi \omega \dots \vartheta)^{(12 \dots k-2)} = \Phi' (k-1, k, r, s)$$

entsprechenden beiden charakteristischen Zahlen:

$$\begin{aligned} \Phi'_{k-1} &= (\chi \omega \dots \vartheta)_{k-1}, \\ \Phi'_{k-1, k} &= (\chi \omega \dots \vartheta)_{k-1, k}. \end{aligned}$$

Wird alsdann (k) aus:

$$\begin{aligned} \Phi' &= 0, \\ \varphi (k-1, k, r, s) &= 0 \end{aligned}$$

eliminiert, indem man sich vorbehält, erst *nachträglich* die Bedingungen:

$$\varphi_{k-1} = 0, \quad \varphi_{k-1, k} = 0$$

einzuführen, so erhält man für die Resultante:

$$\Phi (k, r, s) = (\varphi \chi \omega \dots \vartheta)^{(1, 2 \dots k-1)},$$

vermittelst der Formeln (1) des vorigen Paragraphen, unter Einführung der erwähnten Bedingungen, die Zahlen:

$$\begin{aligned} [(\varphi \Phi')_k] &= [(\varphi \chi \dots \vartheta)^{(12 \dots k-1)}] = \varphi_k \Phi'_{k-1} = \varphi_k (\chi \omega \dots \vartheta)^{(12 \dots k-2)}_{k-1}, \\ [(\varphi \Phi')_{kr}] &= [(\varphi \chi \dots \vartheta)^{(12 \dots k-1)}]_{kr} = \varphi_{kr} \Phi'_{k-1} = \varphi_{kr} (\chi \omega \dots \vartheta)^{(12 \dots k-2)}_{k-1}. \end{aligned}$$

Daher wird endlich:

$$\begin{aligned} [\dot{S} \psi_r (\varphi \chi \dots \vartheta)^{(12 \dots k-1)}] &= \varphi_k \dot{S} \psi_r (\chi \omega \dots \vartheta)^{(12 \dots k-2)}_{k-1}, \\ [\dot{S} \psi_{rs} (\varphi \chi \dots \vartheta)_k] &= \varphi_k \dot{S} \psi_{rs} (\chi \omega \dots \vartheta)_{k-1}, \\ [\dot{S} \psi_{kr} (\varphi \chi \dots \vartheta)_{kr}] &= \varphi_{kr} \dot{S} \psi_{kr} (\chi \omega \dots \vartheta)_{k-1}, \end{aligned}$$

wo wieder in den letzten beiden Formeln der obere Index weggelassen wurde.

Ebenso erhält man

$$[(\varphi \chi \dots \vartheta)_{ir}] \quad (i = 1, 2 \dots k-1).$$

Z. B. für $i = 1$ eliminire man zunächst aus $\chi, \omega, \dots \vartheta$ die Variablen $2, 3, \dots k-1$ und bilde eine Resultante von der Form:

$$\Phi'' (1, k, r, s) = 0,$$

Eliminiert man k aus dieser und:

$$\varphi(1, k, r, s) = 0$$

unter dem Vorbehalt, nachträglich $\varphi_1 = 0$, $\varphi_{1k} = 0$ zu setzen, so erhält man für die Resultante die Zahlen:

$$\begin{aligned} [(\varphi\Phi'')_{1r}^k] &= [\varphi\chi\omega \dots \vartheta]_{1r} = [\varphi_{1r}\Phi''_k + \varphi_k\Phi''_{1r} - \varphi_{kr}\Phi''_{1k} - \varphi_{1k}\Phi''_{kr}] \\ &= \varphi_k\Phi''_{1r} - \varphi_{kr}\Phi''_{1k} \\ &= \varphi_k(\chi\omega \dots \vartheta)_{1r}^{(23\dots k-1)} - \varphi_{kr}(\chi\omega \dots \vartheta)_{1k}^{(23\dots k-1)}. \end{aligned}$$

Daher schliesslich:

$$S\psi_{1r}(\varphi\chi \dots \vartheta)_{1r} = \varphi_k S\psi_{1r}(\chi\omega \dots \vartheta)_{1r}^{(23\dots k-1)} - \varphi_{kr} S\psi_{1r}(\chi\omega \dots \vartheta)_{1k}^{(23\dots k-1)}$$

und die entsprechenden aus dieser durch Vertauschung von 1 mit 2, 3, ..., $k-1$.

Setzt man diese Werthe in den obigen Ausdruck für $[P_r]$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} [P_r] &= \varphi_r(\psi\chi \dots \vartheta)_k + \varphi_k S\psi_r(\chi\omega \dots \vartheta)_{k-1} - p\varphi_{kr}(\psi\chi \dots \vartheta)_k \\ &\quad - p\left\{ \varphi_k \sum_1^{k-1} S\psi_{ir}(\chi\omega \dots \vartheta)_{ir} + \varphi_{kr} \sum_1^{k-1} S\psi_{ir}(\chi\omega \dots \vartheta)_{ik} \right\} \\ &\quad - p\varphi_{kr} S\psi_{kr}(\chi\omega \dots \vartheta)_{k-1}. \end{aligned}$$

Hier ist der Coefficient von φ_k :

$$S\psi_r(\chi\omega \dots \vartheta)_{k-1} - p \sum_1^{k-1} \psi_{ir}(\chi\omega \dots \vartheta)_{ir},$$

also nach der ersten der Formeln (2) des vorigen Abschnitts, angewandt auf den Fall $k-1$ statt k , gleich $(\psi\chi \dots \vartheta)_r$, ferner der Coefficient von $p\varphi_{kr}$ gleich:

$$\begin{aligned} -(\psi\chi \dots \vartheta)_{kr} &- \left\{ S\psi_{kr}(\chi\omega \dots \vartheta)_{k-1}^{(12\dots k-2)} - \sum_1^{k-1} S\psi_{ir}(\chi\omega \dots \vartheta)_{ik} \right\} \\ &= -2(\psi\chi \dots \vartheta)_{kr}. \end{aligned}$$

Also stimmt die erhaltene Formel für $[P_r]$ mit der oben auf directem Wege abgeleiteten für R_r überein. Ganz ebenso reducirt sich $[P_{r,s}]$ auf $R_{r,s}$. Hiermit ist die Lücke in dem Beweis der Formeln (2) des vorigen Abschnitts ausgefüllt.

Die explicite Darstellung der Correspondenzformeln für die Fälle $k=2$, $k=3$ ist von mir sowie von Herrn Lindemann mit einem directen Beweis an den oben angegebenen Orten früher schon gegeben worden. — Für das Folgende genügt es, die Recursionsformel zu kennen. Ich wende dieselbe nunmehr auf einen besonderen Fall an.

Symmetrisch gestaltete Correspondenzen.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = \dots = \varphi_k = \varphi_r = \varphi_s = \varphi, \\ \psi_1 &= \psi_2 = \dots = \psi_k = \psi_r = \psi_s = \psi, \\ . &. \\ \varphi_{12} &= \varphi_{13} = \dots = \varphi_{rs} = \varphi', \\ \psi_{12} &= \psi_{13} = \dots = \psi_{rs} = \psi', \\ . &. \end{aligned}$$
$$(k+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k(k+1),$$
$$\frac{1}{(k+1)!} (\varphi \psi \dots \vartheta)_r = \frac{1}{(k+1)!} (\varphi \psi \dots \vartheta)_k = \dots = (\varphi \psi \dots \vartheta),$$

$$\frac{1}{k!} (\varphi \psi \dots \vartheta)_{ir} = (\varphi \psi \dots \vartheta)' \quad (\text{für } i = 1, 2, \dots, k, s)$$
$$(2a) \quad \begin{aligned} (k+1)(\varphi\psi \dots \vartheta) &= S\varphi(\psi\chi \dots \vartheta) - pS\varphi'(\psi\chi \dots \vartheta)', \\ (\varphi\psi \dots \vartheta)' &= S\varphi'(\psi\chi \dots \vartheta) - S\varphi'(\psi\chi \dots \vartheta)'. \end{aligned}$$
$$(\varphi\psi)' = \varphi\psi' + \psi\varphi' - 2\varphi'\psi'.$$

Wir bedürfen für das Nächstfolgende noch einer Abkürzung. Unter:

$$(\overline{\varphi\psi\dots\vartheta})$$

möge der Werth des Ausdrucks $(\varphi\psi\dots\vartheta)$, geschrieben in:

$$\varphi = \varphi', \psi = \psi', \dots \vartheta = \vartheta', p = 1$$

anstatt:

$$\varphi, \quad \psi, \quad \dots \quad \vartheta, \quad p$$

verstanden werden, also:

$$(\overline{\varphi\psi\dots\vartheta}) = (\varphi\psi\dots\vartheta)_{\varphi=\varphi', \psi=\psi', \dots \vartheta=\vartheta', p=1}.$$

Man überträgt diese Bezeichnungsweise auch auf den Ausdruck für die Werthigkeit, sowie auf eine beliebige Anzahl von Correspondenzen, so dass also z. B.:

$$\overline{\varphi} = \varphi - \varphi',$$

$$\overline{\varphi'} = \varphi',$$

$$(\overline{\varphi\psi}) = (\varphi - \varphi')(\psi - \psi') - (p - 1)\varphi'\psi',$$

$$(\overline{\varphi\psi})' = (\varphi - \varphi')\psi' + (\psi - \psi')\varphi' - 2\varphi'\psi'$$

u. s. w.

ist.

Zwischen den so definirten Ausdrücken bestehen nun die folgenden Beziehungen, die für die Anwendung fundamental sind:

$$(3) \quad \begin{cases} (\overline{\varphi\psi\chi\dots\vartheta}) = \varphi(\psi\chi\dots\vartheta) - p\varphi'(\psi\chi\dots\vartheta)', \\ (\overline{\varphi\psi\dots\vartheta})' = (\varphi\psi\dots\vartheta) - (\overline{\varphi\psi\dots\vartheta}). \end{cases}$$

Diese Recursionsformeln für symmetrische Correspondenzen sind weit einfacherer Natur, als die früheren (2) III, und lassen fernere Transformationen zu, die dem Angriff auf alle Probleme, welche auf solche Correspondenzgleichungen führen, ein weites und vielseitiges Feld eröffnen.

Es handelt sich zunächst um den Beweis dieser Formeln. Für den Fall $k = 1$ folgen sie sofort aus einer Zusammenstellung derjenigen für $(\varphi\psi)$, $(\varphi\psi)'$, $(\varphi\overline{\psi})$. — Wir schliessen nun von k auf $k + 1$.

Vermöge der (2a) hat man:

$$(A) \quad (k + 1)(\overline{\varphi\psi\chi\dots\vartheta}) = \varphi(\psi\chi\dots\vartheta) + \dot{S}\psi(\varphi\chi\dots\vartheta) \\ - p\varphi'(\psi\chi\dots\vartheta)' - p\dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta)',$$

$$(B) \quad (\overline{\varphi\psi\chi\dots\vartheta})' = \varphi'(\psi\chi\dots\vartheta) + \dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta) \\ - \varphi'(\psi\chi\dots\vartheta)' - \dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta)',$$

wo wieder unter \dot{S} die Summe aller aus dem angeschriebenen Glied durch Vertauschung von ψ mit $\chi, \dots \vartheta$ (φ bleibt an seiner Stelle) entstandenen Terme zu verstehen ist. Nimmt man die Formeln (3)

als bewiesen an für den Fall von irgend k Correspondenzen, wie $\varphi, \chi, \dots \vartheta$, so hat man:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi(\varphi\chi\omega\dots\vartheta) &= \varphi S\psi(\chi\omega\dots\vartheta) - p\varphi' S\psi(\chi\omega\dots\vartheta)', \\ \dot{S}\psi'(\varphi\chi\omega\dots\vartheta) &= \varphi S\psi'(\chi\omega\dots\vartheta) - p\varphi' S\psi'(\chi\omega\dots\vartheta)';\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi'(\overline{\varphi\chi\dots\vartheta}) &= (\varphi - \varphi') S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta}) - (p-1)\varphi' S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta})' \\ &= \varphi S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta}) \\ &\quad - \varphi' \cdot \{S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta}) + (p-1) S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta})'\}.\end{aligned}$$

Hiernach wird:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta)' &= \dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta) - \dot{S}\psi'(\overline{\varphi\chi\dots\vartheta}) \\ &= \varphi S\psi' \{(\chi\dots\vartheta) - (\overline{\chi\dots\vartheta})\} \\ &\quad + \varphi' \{S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta}) - p S\psi'(\chi\dots\vartheta) \\ &\quad \quad + (p-1) S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta})'\}.\end{aligned}$$

Daher endlich nach einer kleinen Reduction:

$$\begin{aligned}\dot{S}\psi(\varphi\chi\dots\vartheta) - p\dot{S}\psi'(\varphi\chi\dots\vartheta)' \\ &= \varphi \cdot k(\psi\chi\dots\vartheta) - p\varphi' k \{(\psi\chi\dots\vartheta) - (\overline{\psi\chi\dots\vartheta})\} \\ &= k \{ \varphi(\psi\chi\dots\vartheta) - p\varphi'(\psi\chi\dots\vartheta)' \}.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Formel (A) ist somit das $(k+1)$ -fache dieses letzten Klammerausdrucks und die *erste* der Formeln (3) hierdurch bewiesen, weil sie für $k=1$ gilt.

Dieselbe lässt sich nun beim Beweis der *zweiten* verwenden. Sieht man wiederum diese für k Correspondenzen als richtig an, so erhält man vermöge (B):

$$\begin{aligned}(\text{Ba}) \quad (\varphi\psi\chi\dots\vartheta)' &= \varphi'(\overline{\psi\chi\dots\vartheta}) \\ &\quad + \dot{S}\psi' \{(\varphi - \varphi')(\overline{\chi\dots\vartheta}) - (p-1)\varphi'(\overline{\chi\dots\vartheta})'\}.\end{aligned}$$

Aber weil (2a, V):

$$(\psi\chi\dots\vartheta)' = S\psi' \{(\chi\dots\vartheta) - (\overline{\chi\dots\vartheta})'\}$$

ist, so wird:

$$S\psi'(\overline{\chi\dots\vartheta})' = (\psi\chi\dots\vartheta)' - (\overline{\psi\chi\dots\vartheta})'.$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen erkennt man aber sogleich, dass die rechte Seite von (Ba) mit der von:

$$\begin{aligned}
(\varphi \psi \dots \vartheta) - \overline{(\varphi \psi \dots \vartheta)} &= \varphi(\psi \dots \vartheta) - p \varphi'(\psi \dots \vartheta)' \\
&- \{(\varphi - \varphi')[(\psi \dots \vartheta) - (\psi \dots \vartheta)']\} \\
&- (p-1) \varphi'[(\psi \dots \vartheta)' - \overline{(\psi \dots \vartheta)'}] \}
\end{aligned}$$

übereinstimmt, womit die letzte der Formeln (3), nachdem der Fall $k=1$ oben erledigt worden, bewiesen ist.

VI.

Symmetrisch gebildete Correspondenzen. Andere Gestalt der Correspondenzformel.

Ich hebe noch eine andere Gattung von bemerkenswerthen Formeln hervor, die aus denen (3) durch Umformung sich ableiten. So z. B. ist für 4 Correspondenzen:

$$\begin{aligned}
(\varphi \psi \chi \omega) &= (\varphi \psi \chi) \omega - p (\varphi \psi \chi)' \omega' \\
&= \omega \cdot [(\varphi \psi) \chi - p (\varphi \psi)' \chi'] - p \omega' \cdot [(\varphi \psi) \chi' + (\varphi \psi)' \chi - 2 (\varphi \psi)' \chi' \\
&\quad - 2(p-1) \varphi' \psi' \chi'] \\
&= (\varphi \psi)(\chi \omega) - p (\varphi \psi)'(\chi \omega)' + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} (\varphi \psi)''(\chi \omega)''
\end{aligned}$$

wenn man:

$$(\varphi \psi)'' = (\varphi \psi)' - \overline{(\varphi \psi)'} = 2 \varphi' \psi'$$

u. s. w. einführt.

Diese Formel gestattet eine Anwendung auf solche Fälle, wo eine *Gruppierung* der vorhandenen vier Correspondenzen zu je *zweien erwünscht* erscheint. In ähnlicher Weise lässt sich die Formel für mehr Correspondenzen, beliebigen Gruppierungen entsprechend, in folgender Weise umgestalten.

Sind die gegebenen Correspondenzen (alle symmetrisch gebildet hinsichtlich der Variabeln):

$$\varphi = 0; \psi = 0; \dots \vartheta = 0; \varepsilon = 0; \xi = 0 \dots \mu = 0,$$

und bedeuten $(\varphi \psi \dots \vartheta)$, $(\varepsilon \xi \dots \mu)$ die Ausdrücke für die Anzahl der den g Correspondenzen $\varphi, \psi \dots \vartheta$ und den $h: \varepsilon, \xi \dots \mu$ zukommenden gemeinsamen Lösungen, wenn von den $g+h$ veränderlichen Punkten auf $f=0$ h bzw. g beliebige fest angenommen werden, $(\varphi \psi \dots \vartheta)'$ die Werthigkeit der durch Elimination von $g-1$ Variabeln resultirenden Correspondenz, oder, wie wir unter Benutzung der Bezeichnung (s. vor. Abschnitt):

$$\overline{(\varphi \psi \dots \vartheta)} = (\varphi \psi \dots \vartheta)_{\varphi=\varphi', \psi=\psi', \dots, p-1}$$

kürzer definiren können:

$$(\varphi \psi \dots \vartheta)' = (\varphi \psi \dots \vartheta) - \overline{(\varphi \psi \dots \vartheta)};$$

setzt man analog:

$$(\varphi \psi \dots \vartheta)'' = (\varphi \psi \dots \vartheta)' - (\overline{\varphi \psi \dots \vartheta})',$$

u. s. w., wo:

$$(\overline{\varphi \psi \dots \vartheta})' = [(\varphi \psi \dots \vartheta)']_{\varphi-\varphi', \psi-\psi', \dots, p-1}$$

ist, also die Reihenfolge der Operationen $(\overline{})$ und $()'$ vertauschbar, so lässt sich der Ausdruck für die Anzahl $(\varphi \psi \dots \mu)$ der gemeinsamen Lösungen aller Correspondenzen $\varphi = 0, \psi = 0, \dots, \mu = 0$ als Summe von Producten aus den entsprechenden Zahlen für einerseits nur:

$$\varphi, \psi, \dots, \vartheta,$$

und andererseits denen für den Rest:

$$\varepsilon, \xi, \dots, \mu,$$

durch folgende Formel*) darstellen:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} (\varphi \psi \dots \mu) &= (\varphi \psi \dots \vartheta)(\varepsilon \xi \dots \mu) - \binom{p}{1} (\varphi \psi \dots \vartheta)' (\varepsilon \xi \dots \mu)' \\ &+ \binom{p}{2} (\varphi \psi \dots \vartheta)'' (\varepsilon \xi \dots \mu)'' \\ &- \binom{p}{3} (\varphi \psi \dots \vartheta)''' (\varepsilon \xi \dots \mu)''' + \dots \end{aligned} \right.$$

wo:

$$\binom{p}{i} = \frac{p(p-1) \dots (p-i+1)}{1 \cdot 2 \dots i},$$

p das Geschlecht der Curve f ist, und die Reihe an der Stelle abbricht, wo zuerst einer der mit oberen Indices versehenen Klammerausdrücke verschwindet.

Die Formeln (4) lassen sich als eine Eigenschaft gewisser durch (3) definirten *Functionen* auffassen und unabhängig von ihrer algebraischen oder geometrischen Bedeutung wie folgt beweisen. Wir verstehen unter: $()'$ und: $(\overline{})$ gewisse auf die in der Klammer vorkommenden Ausdrücke angewandte Operationen, zwischen denen die Beziehung besteht:

$$()' = () - (\overline{}),$$

so dass also:

$$a' = a - \bar{a}; \quad b' = b - \bar{b}; \quad \text{u. s. w.}$$

Die Operation \bar{a} möge auf ein *Product* wirken in der Weise, dass:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

Dann ist:

*) Diese Formel, sowie einige andere der hier publicirten Ergebnisse habe ich bereits im Sommer 1885 Herrn Klein brieflich mitgetheilt.

$(ab)' = ab - \overline{ab} = ab - (a-a')(b-b') = ab' + ba' - a'b'.$
 Ferner sei:

$$\bar{p} = p - 1;$$

und, unter $\binom{p}{i}$ einen Binomialcoefficienten verstanden:

$$\overline{\binom{p}{i}} = \binom{p-1}{i}.$$

Dann ist:

$$\binom{p}{i}' = \binom{p}{i} - \binom{p-1}{i} = \binom{p-1}{i-1}$$

ein Ausdruck, der gleich 1 ist für $i=0$, und verschwindet, wenn an Stelle von $i-1$ eine negative Grösse tritt. Hiernach ist die Operation $()'$, auf das Product angewandt:

$$(C) \quad \left(\binom{p}{i} ab \right)' = \binom{p-1}{i-1} ab + \binom{p-1}{i} (ab' + ba' - a'b').$$

Wir setzen $(a')' = a'' = a^{(2)}$, u. s. w. und nehmen noch an:

$$\overline{a^{(g)}} = a^{(g)}; \quad \overline{b^{(h)}} = b^{(h)},$$

also:

$$a^{(g+1)} = 0; \quad b^{(h+1)} = 0;$$

ferner $g \geq h$.

Definirt man endlich, unter der Voraussetzung:

$$c'' = 0$$

die weitere Operation:

$$(D) \quad \{a, c\} = ac - pa'c',$$

so gelangt man durch wiederholte Anwendung derselben zu einer Formel, die unter den obigen Annahmen über a, b in die Gestalt gebracht werden kann:

$$(5) \quad \{a, b\} = ab - \binom{p}{1} a'b' + \binom{p}{2} a''b'' - \binom{p}{3} a'''b''' + \dots + (-1)^h \binom{p}{h} a^{(h)} b^{(h)} \\ = \sum_0^h (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} b^{(i)}.$$

Zunächst nämlich ist, wenn $c'' = 0$:

$$\{a, c\}^{(i)} = a^{(i)} c + i c' a^{(i-1)} - 2i a^{(i)} c' - (p-i) a^{(i+1)} c'.$$

Für $i=0$ geht diese Formel in (D) über. Man beweist ihre Richtigkeit leicht mittelst eines Schlusses von i auf $i+1$ unter Anwendung von (C).

Wir nehmen nun weiter (5) als bewiesen an, und zeigen, dass der Ausdruck $\{\{a, b\}, c\}$ wieder auf die Form (5) gebracht werden

kann, jedoch in der Anordnung: $\{a, \{b, c\}\}$. Dann ist die Giltigkeit von (5) auch für $h + 1$ nachgewiesen, weil erst:

$$\{b, c\}^{(h+2)}$$

verschwindet, und für $h = 1$ (5) auf (D) zurückkommt.

Man kann den Ausdruck:

$$\{a, b\}' = \left[\sum_0^h (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} b^{(i)} \right]'$$

mit Hilfe von (C) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \{a, b\}' &= \frac{1}{p} \sum_0^h (-1)^i a^{(i)} \binom{p}{i} [i b^{(i)} + (p-i) b^{(i+1)}] \\ &\quad + \frac{1}{p} \sum_1^{h+1} (-1)^{i-1} a^{(i)} \binom{p}{i} i [-b^{(i)} + b^{(i-1)}]. \end{aligned}$$

Wegen:

$$b^{(h+1)} = b^{(h+2)} = 0$$

lässt sich die erste Summe zwischen den Grenzen 0 und $h + 1$ nehmen, und man erhält durch Vereinigung beider Summen:

$$\{a, b\}' = \frac{1}{p} \sum_0^{h+1} (-1)^i a^{(i)} \binom{p}{i} [-i b^{(i-1)} + 2i b^{(i)} + (p-i) b^{(i+1)}].$$

Daher wird:

$$\begin{aligned} \{\{a, b\}, c\} &= c \cdot \{a, b\} - p c' \cdot \{a, b\}' \\ &= \sum_0^{h+1} (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} [c b^{(i)} + i c' b^{(i-1)} - 2i c' b^{(i)} - (p-i) c' b^{(i+1)}] \\ &= \sum_0^{h+1} (-1)^i \binom{p}{i} a^{(i)} \cdot \{b, c\}^{(i)} = \{a, \{b, c\}\}, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Auf die hiermit bewiesene Formel (5) kommt aber die (4) zurück, wenn:

$$(\varphi \psi \dots \vartheta) = a, \quad (\varepsilon \xi \dots \mu) = b$$

und:

$$\{a, b\} = (\varphi \psi \dots \mu)$$

gesetzt wird. Diese letzte Vergleichung ist gestattet, nachdem gezeigt ist, dass die Operation $\{ \}$ eine associative ist. In der That sind die Formel (D) und die früheren Annahmen hinsichtlich der Operationen $()'$ und $(\overline{})$ keine anderen, als die in (3) (Abschn. V) aufgestellten, und aus der Voraussetzung, dass die Zahl der Correspondenzen

$\varphi, \psi \dots \vartheta$ ist, folgt, weil $a = (\varphi \psi \dots \vartheta)$ eine homogene Function g^{ter} Ordnung der $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \dots \vartheta'$ ist, dass deren $(g+1)^{\text{te}}$ Differenz $a^{(g+1)}$ verschwindet. Dasselbe gilt für die $(h+1)^{\text{te}}$ Differenz von b . Dies ist aber eben die Bedingung, die oben noch eingeführt wurde, und somit ist die Formel (4) gleichfalls bewiesen.

VII.

Lösung des Problems der Specialgruppen.

Das Vorstehende gewährt nun die Mittel, um das in I. formulirte Problem zu lösen. Algebraisch zu reden, handelt es sich um Bestimmung der Systeme von Werthepaaren $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots x_k y_k$, welche sämtliche k -reihigen Determinanten des Rechtecks:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \dots & \varphi_{k+i}(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \dots & \varphi_{k+i}(x_2 y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_k y_k) & \varphi_2(x_k y_k) & \dots & \varphi_{k+i}(x_k y_k) \end{vmatrix}$$

zum Verschwinden bringen, während die Gleichungen bestehen:

$$f(x_1 y_1) = 0, \quad f(x_2 y_2) = 0 \dots f(x_k y_k) = 0.$$

Wir schicken der allgemeinen Erledigung der Frage den Fall $i = 1$ einer Matrix mit einer Verticalreihe mehr, als Horizontalreihen auftreten, voraus. Das Problem stellt für die k Punkte der Curve zwei Bedingungen, also sind 2 durch die übrigen $k - 2$ (beliebig wählbaren) bestimmt. Auf wieviel verschiedene Arten? erfährt man auf dem durch die Formeln des § 2 angegebenen Wege:

$$(k+1) = (k, k) - (k-1),$$

wonach zuerst die Anzahl (k, k) von Punktpaaren auf f , für welche irgend 2 Determinanten des Rechtecks (sie mögen ϑ, ψ heissen) verschwinden, zu bestimmen ist. Man hat hier den Fall von zwei Correspondenzen zwischen den Punkten (1), (2), $\dots k$ von f . Eliminirt man aus $\vartheta = 0, \psi = 0$ etwa $x_k y_k$ mit Hilfe von $f = 0$, so besitzt die Resultante als Curvengleichung hinsichtlich irgend eines der nicht eliminirten Variablenpaare aufgefasset mit $f = 0$ noch:

$$(\vartheta \psi) = (\vartheta)(\psi) - p(\vartheta)'(\psi)'$$

„freie“ Schnittpunkte, wo (ϑ) die Anzahl der mit (1) beweglichen Schnittpunkte von $\vartheta = 0$ mit $f = 0$ ist, die nicht in die Ausnahmepunkte und nicht in die übrigen rational angebbaren Punkte fallen, also:

$$(\vartheta) = ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - (k - 1) - \sigma,$$

$$(\psi) = ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - (k - 1) - \sigma,$$

indem die in ϑ und ψ auftretenden Ausdrücke $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k$, die wir hinsichtlich jeder der Variablen vom Grad s annehmen, sich nach der früheren Annahme zu f adjungirt verhalten, d. h. in jedem α -fachen Punkte von f $\alpha - 1$ -fache Punkte haben und etwa durch σ einfache Ausnahmepunkte von f noch alle hindurchgehen. Ferner ist $(\vartheta)'$ die Werthigkeit von ϑ , d. h. die Vielfachheit des Verschwindens von ϑ , wenn eines der $x_i y_i$ gleich einem anderen wird, also hier:

$$(\vartheta)' = (\psi)' = 1.$$

Setzt man:

$$ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - k - \sigma = M,$$

so wird:

$$(\vartheta) = (\psi) = M + 1,$$

und man hat:

$$(k, k) = (\vartheta\psi) = (M + 1)^2 - p.$$

Um noch die in der obigen Formel vorkommende Zahl $(k - 1)$ (sowie allgemein die für $(k - i)$ der Formel (12) von II) zu bestimmen, bedarf es nicht der Correspondenzformel. Denn die Werthsysteme, für die alle Determinanten des (auf der schmalen Seite stehenden) Rechtecks verschwinden:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \dots & \varphi_{k-1}(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \varphi_2(x_2 y_2) & \dots & \varphi_{k-1}(x_2 y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_k y_k) & \varphi_2(x_k y_k) & \dots & \varphi_{k-1}(x_k y_k) \end{vmatrix},$$

erhält man, wenn man irgend eine der k Determinanten, z. B. die durch Weglassen der letzten Horizontalreihe entstehende, gleich Null setzt. Sie liefert, sofern etwa die $k - 2$ ersten Punkte als gegeben angesehen werden, für den $(k - 1)^{\text{ten}}$ noch:

$$ns - \sum \alpha(\alpha - 1) - (k - 2) - \sigma = M + 2$$

freie Punkte $x_{k-1} y_{k-1}$. Die gleichen Werthepaare würden sich aber für $x_k y_k$ ergeben, wenn man statt der letzten die vorletzte Zeile wergiesse. Diejenigen freien *Punktepaare* $k - 1, k$, welche beide Determinanten zugleich zu Null machen, sind also, unter Weglassung der zusammenfallenden, die:

$$\frac{(M + 2)(M + 1)}{2}$$

Paare, die sich aus jenen $M + 2$ bilden lassen. Für sie verschwinden ausserdem von selbst alle Determinanten der Matrix, welche die zwei letzten Reihen enthalten. Es ist also:

$$(k - 1) = \frac{(M + 2)(M + 1)}{2} = \binom{M + 2}{2}.$$

Unter Einsetzung dieses Werthes und des für (k, k) erhält man für die Anzahl der Lösungen des Problems im Falle $i = 1$:

$$(7) \quad (k+1) = (k+1)_k = (M+1)^2 - p - \binom{M+2}{2} \\ (k+1)_k = \binom{M+1}{2} - p.$$

Wir wenden uns nun sogleich zu der allgemeinen Aufgabe, die Anzahl $(k+i)$ der Systeme von $i+1$ Punkten der Curve f so zu bestimmen, dass sie zusammen mit $k-i-1$ gegebenen derselben Curve die Determinanten der Matrix (6) sämmtlich zum Verschwinden bringen. Die Schlussformel (12) in II. führt diese Frage zurück auf die Berechnung der einzelnen Summanden des Ausdrucks:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} (k+i) &= \{k+i-1, k\} - \{k+i-2, k-1\} + \{k+i-3, k-2\} - \dots \\ &\quad + (-1)^{i-1} \{k, k-i+1\} + (-1)^i (k-i) \\ &= - \sum_{\varrho=1}^{i+1} (-1)^\varrho \{k+i-\varrho, k-\varrho+1\} + (-1)^i (k-i). \end{aligned} \right.$$

Bezüglich der Berechnung von $(k-i)$ kann ich auf die oben vorgenommene von $(k-1)$ verweisen. Genau dieselben Ueberlegungen führen auf die Formel:

$$(9) \quad (k-i) = \frac{(M+i+1)(M+i)\dots(M+1)}{1 \cdot 2 \dots i+1} = \binom{M+i+1}{i+1},$$

die der Reihe nach auf die Fälle $i = 1, 2, \dots, i$ anzuwenden sein wird. Die Summanden in (8) sind einzeln mit Hilfe der Formel (5) des vorigen Paragraphen zu berechnen und zwar:

$$(9a) \quad \{k+i-\varrho, k-\varrho+1\} = \sum_{\tau=0}^{i-\varrho+1} (-1)^\tau \binom{p}{\tau} (k+i-\varrho)^{(\tau)} (k-\varrho+1)^{(\tau)},$$

wo die obere Grenze h gleich der kleineren der Zahlen ϱ und $i-\varrho+1$ ist, weil $(k+i-\varrho)$, $(k-\varrho+1)$ Aggregate von $i-\varrho+1$, bzw. ϱ (symmetrisch gebildeten) Correspondenzen bedeuten, diese letzteren Zahlen also die Stelle von g und h in VI. vertreten. Die Werthigkeitszahlen dieser Correspondenzen sind alle gleich 1, und sämmtliche Zahlen (ϑ) , (ψ) , \dots (der freien Punkte) sind gleich $M+1$. — Ist ι irgend eine der Zahlen $i, i-1, \dots$, so hat man, in den Bezeichnungen von VI:

$$(k+\iota)' = (k+\iota) - (\overline{k+\iota}); \quad (k-\iota)' = (k-\iota) - (\overline{k-\iota}),$$

wo $(\overline{k+\iota})$ gleich $(k+\iota)$, geschrieben in $M-1$, $p-1$ statt in M , p ist, und ebenso:

$$(k-\iota)' = \binom{M+\iota+1}{\iota+1} - \binom{M+\iota}{\iota+1} = \binom{M+\iota}{\iota},$$

daher, nach τ -facher Wiederholung dieser Operation:

$$(E) \quad (k + \iota)^{(\tau)} = \binom{M + \iota - \tau + 1}{\iota - \tau + 1}.$$

Ich habe nun an der Hand dieser Beziehungen *den folgenden Ausdruck für die allgemeine Zahl* $(k + \iota)$ (in ausführlicher Schreibweise) $(k + \iota)_k$ *gefunden*:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} (k + \iota)_k &= \sum_0^A (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \binom{M - 2\lambda + 1}{\iota - 2\lambda + 1} = \\ &= \binom{M + 1}{\iota + 1} - \binom{p}{1} \binom{M - 1}{\iota - 1} + \binom{p}{2} \binom{M - 3}{\iota - 3} \\ &\quad - \binom{p}{3} \binom{M - 5}{\iota - 5} + \dots, \end{aligned} \right.$$

wo die obere Grenze für λ :

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{\iota + 1}{2} & \text{für } \iota \text{ ungerade,} \\ \frac{\iota}{2} & \text{für } \iota \text{ gerade} \end{cases}$$

ist. Ich beweise deren Richtigkeit durch einen Schluss von $i - 1$ auf i , indem ich sie für $\iota = 0, 1, 2, \dots, i - 1$ als bewiesen ansehe.

Zunächst ist wieder $(k + \iota)'$, $(k + \iota)''$, ..., $(k + \iota)^{(\tau)}$ im Anschluss an die Formel (10) zu bilden. Vermöge der (C) des § VI wird:

$$\begin{aligned} (k + \iota)' &= \sum_0^A (-1)^\lambda \left[\binom{p}{\lambda} \binom{M - 2\lambda + 1}{\iota - 2\lambda + 1} \right]' = \\ &= \sum_0^A (-1)^\lambda \left[\binom{p}{\lambda} \binom{M - 2\lambda}{\iota - 2\lambda} + \binom{p - 1}{\lambda - 1} \binom{M - 2\lambda}{\iota - 2\lambda + 1} \right], \end{aligned}$$

wo immer:

$$(F) \quad \binom{a}{0} = 1; \quad \binom{a}{-1} = \binom{a}{-2} = \dots = 0$$

vorausgesetzt ist. Man kann dem Ausdruck in der Klammer [] durch Anwendung der Formeln:

$$\begin{aligned} \binom{p}{\lambda} &= \binom{p - 1}{\lambda - 1} + \binom{p - 1}{\lambda}, \\ \binom{M - 2\lambda}{\iota - 2\lambda} + \binom{M - 2\lambda}{\iota - 2\lambda + 1} &= \binom{M - 2\lambda + 1}{\iota - 2\lambda + 1} \end{aligned}$$

die Gestalt geben:

$$\left[\binom{p - 1}{\lambda - 1} \binom{M - 2\lambda + 1}{\iota - 2\lambda + 1} + \binom{p - 1}{\lambda} \binom{M - 2\lambda}{\iota - 2\lambda} \right],$$

oder, unter Beiziehung ohnedies verschwindender Glieder und Aenderung des Summationsbuchstabens der ersten Summe:

$$\begin{aligned}(k + i)' &= \sum_0^{A_1} (-1)^{\lambda-1} \binom{p-\lambda}{\lambda} \left[\binom{M-2\lambda-1}{i-2\lambda-1} - \binom{M-2\lambda}{i-2\lambda} \right] = \\ &= \sum_0^{A_1} (-1)^{\lambda} \binom{p-\lambda}{\lambda} \binom{M-2\lambda-1}{i-2\lambda},\end{aligned}$$

wo nun:

$$\Lambda_1 = \begin{cases} \frac{i}{2} \\ \frac{i-1}{2} \end{cases}$$

ist. Dieser Ausdruck hat dieselbe Form, wie (10), und nach τ -maliger Wiederholung des Processes folgt:

$$(G) \quad (k + i)^{(\tau)} = \sum_0^{A_1} (-1)^{\lambda} \binom{p-\tau}{\lambda} \binom{M-2\lambda-2\tau+1}{i-2\lambda-\tau+1},$$

wo wegen der Gleichungen (F) die Formel von selbst an der richtigen Stelle abbricht, so dass die obere Grenze weggelassen werden konnte.

Geht man nun mit den Ausdrücken (E), (G) in die Formel (9a) ein, mit dieser und (9) in (8), so kommt eine dreifache Summe, die sich so schreiben lässt:

$$\begin{aligned}(k + i)_k &= - \sum_{q=1}^{q=i} (-1)^q \sum_{\tau=0}^{\tau=p} (-1)^{\tau} \binom{p}{\tau} \binom{M+q-\tau}{q-\tau} \\ &\quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p-\tau} (-1)^{\lambda} \binom{p-\tau}{\lambda} \binom{M-2\tau-2\lambda+1}{i-q-\tau-2\lambda+1} + \\ &\quad + (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1}.\end{aligned}$$

Da diese Summe da abbricht, wo einer der Factoren Null ist, so ist die Summationsfolge vertauschbar, die Summenzeichen können vorausgesetzt werden, und die Factoren vereinigt. Nun ist:

$$\binom{p}{\tau} \binom{p-\tau}{\lambda} = \binom{p}{\lambda+\tau} \binom{\lambda+\tau}{\tau}.$$

Setzt man daher:

$$\lambda + \tau = \sigma,$$

so wird:

$$\begin{aligned}(k + i)_k &= (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1} - \\ &- \sum_{q=1}^{q=i} \sum_{\sigma=0}^{\sigma=p} \sum_{\tau=0}^{\tau=p} (-1)^{q+\sigma} \binom{p}{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} \binom{M+q-\tau}{q-\tau} \binom{M-2\sigma+1}{i-q+\tau-2\sigma+1}.\end{aligned}$$

Zieht man aus der Summe das Glied heraus, für welches $\tau = 0$, $\sigma = 0$, und folglich

$$\binom{p}{\sigma} \binom{\sigma}{\tau} = \binom{p}{\tau} \binom{p-\tau}{\lambda} = 1$$

ist, so lässt sich dies mit dem vor dem Summenzeichen stehenden zu:

$$\begin{aligned} A &= (-1)^i \binom{M+i+1}{i+1} - \sum_{\varrho=1}^{e=i} (-1)^{\varrho} \binom{M+\varrho}{\varrho} \binom{M+1}{i-\varrho+1} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{e=i} (-1)^{\nu} \binom{M+\nu+1}{\nu+1} \binom{M+1}{i-\nu} \end{aligned}$$

vereinigen, und in: $(k+i)_k = A - B$ ist der Rest: B die dreifache Summe, nur dass σ von der unteren Grenze 1 ab geht. Wir verwandeln in B die untere Grenze für ϱ in 0, indem wir ein Glied addiren und subtrahiren, das diesem Werth entspricht, und für welches denn auch $\tau = 0$ sein muss, wenn das Glied nicht von selbst verschwinden soll. Nach Einführung eines neuen Summationsbuchstabens:

$$\nu = \varrho - \tau$$

erhält man so:

$$\begin{aligned} B &= - \sum_{\sigma=1} (-1)^{\sigma} \binom{p}{\sigma} \binom{M-2\sigma+1}{i-2\sigma+1} + \\ &+ \sum_{\sigma=1} \sum_{\nu=0}^{e=i-\tau} (-1)^{\nu+\sigma} \binom{p}{\sigma} \binom{M+\nu}{\nu} \binom{M-2\sigma+1}{i-\nu-2\sigma+1} \sum_{\tau=0} (-1)^{\tau} \binom{\sigma}{\tau}, \end{aligned}$$

wo die untere Grenze für ν aus: $(-\tau)$ in: 0 verwandelt wurde, weil

$$\binom{M+\nu}{\nu}$$

für negative ν verschwindet. Die Grösse $\tau = \sigma - \lambda$ ist aus ähnlichem Grunde immer $\leq \sigma$ zu nehmen. Aber der Werth des zweiten Gliedes in B ist Null, weil für $\sigma \geq \tau \geq 0$:

$$\sum_{\tau=0} (-1)^{\tau} \binom{\sigma}{\tau} = 0.$$

B reducirt sich also auf das erste Glied rechts. Was A angeht, so beweist man mit Hilfe bekannter Relationen zwischen Binomialcoefficienten, wie wir in IX. zeigen werden, dass die Summe A ausführbar ist, nämlich:

$$A = \binom{M+1}{i+1}.$$

Demnach wird:

$$(k + i)_k = A - B = \sum_{\sigma=0}^p (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma} \binom{M - 2\sigma + 1}{i - 2\sigma + 1}$$

in Uebereinstimmung mit der Formel (10), w. z. b. w.

VIII.

Algebraische Functionen, die in einer Maximalzahl von Punkten der Curve Null und unendlich werden.

Diese Functionen sind Quotienten von ganzen Functionen $(n - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die sich adjungirt verhalten und in den Punkten *einer der Specialgruppen* $G_Q^{(1)}$, für die Q ein Minimum ist, verschwinden. Man hat, um die Anzahl dieser Gruppen zu finden, die Formel (10) des vorigen Abschnitts auf den Fall anzuwenden, dass:

$$s = n - 3; \quad \sigma = 0; \quad k + i = p,$$

also:

$$M = n(n - 3) - \sum \alpha(\alpha - 1) - k = 2p - 2 - k$$

ist, und, in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen des I. Abschnitts:

$$k = Q; \quad M = 2p - 2 - k = R; \quad i = r,$$

zu setzen, während $q = 1$ ist. Dann ist *die Anzahl der Gruppen* $G_Q^{(1)}$ *von* Q *Punkten einer Curve vom Geschlecht* p , *welche zu einem willkürlich angenommenen dieser Punkte so bestimmbar sind, dass durch* $G_Q^{(1)}$ *eine* r -*fach unendliche Schaar von adjungirten Curven* $(n - 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung geht, gleich:*

$$[p]_Q = [Q + r]_Q = \sum_{\sigma=0}^p (-1)^\sigma \binom{p}{\sigma} \binom{R + 1 - 2\sigma}{r + 1 - 2\sigma}.$$

Diese Formel wurde zuerst in der Abhandlung von Herrn Nöther und mir im VII. Bd. dieser Ann. S. 296 ohne Beweis veröffentlicht. Ein Vergleich derselben mit der des Herrn Castelnuovo lehrt, dass die Summation ausführbar sein muss. In der That bestehen (je nachdem p gerade oder ungerade, also $Q = \frac{p}{2} + 1$ oder $= \frac{p+3}{2}$ ist) die folgenden merkwürdigen Beziehungen:

$$[p]_{\frac{p}{2}+1} = \sum_{v=0}^p (-1)^v \binom{p}{v} \binom{\frac{3p}{2} - 2 - 2v}{\frac{p}{2} - 2v} = \frac{1}{\frac{p}{2}} \binom{p}{\frac{p}{2} - 1},$$

$$[p]_{\frac{p+3}{2}} = \sum_{v=0}^p (-1)^v \binom{p}{v} \binom{\frac{3p-5}{2} - 2v}{\frac{p-1}{2} - 2v} = \frac{2}{p-1} \binom{p}{\frac{p-3}{2}}.$$

Den Nachweis derselben erbringe ich in der nachstehenden Note. — Mit weniger Aufwand an Rechnung beweist man im Folgenden eine andere Beziehung zwischen Binomialcoefficienten.

IX.

Eine Relation zwischen Binomialcoefficienten.

Es handelt sich um den nachträglichen Beweis der in VII. a. E. benutzten Identität:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=i} (-1)^{\nu} \binom{M+\nu+1}{\nu+1} \binom{M+1}{i-\nu} = \binom{M+1}{i+1}.$$

Man kann dem Ausdruck unter dem Summenzeichen die Form geben:

$$\begin{aligned} \binom{M+\nu+1}{\nu+1} \binom{M+1}{i-\nu} &= \binom{M+\nu+1}{M} \left\{ \binom{M}{M+1-i+\nu} + \binom{M}{M+\nu-i} \right\} \\ &= \binom{M+\mu}{i} \binom{i}{\mu} + \binom{M+\mu}{i+1} \binom{i+1}{\mu}, \end{aligned}$$

wo:

$$\nu + 1 = \mu$$

gesetzt wurde. Man hat also, wenn S die zu bestimmende Summe ist:

$$S = - \sum_{\mu=1}^{\mu=i+1} (-1)^{\mu} \binom{M+\mu}{i} \binom{i}{\mu} - \sum_{\mu=1}^{\mu=k} (-1)^{\mu} \binom{M+\mu}{k} \binom{k}{\mu}$$

für:

$$k = i + 1.$$

Weil ferner:

$$\binom{i}{i+1} = 0$$

ist, so braucht die erste Summe bloss bis $\mu=i$ ausgedehnt zu werden. Fügt man noch je ein Glied zu, das dem Werth $\mu=0$ entspricht, so wird, indem man es wieder abzieht:

$$\begin{aligned} S &= -f(i) - f(k) + \binom{M}{i} + \binom{M}{k} \\ &= -f(i) - f(k) + \binom{M+1}{i+1}, \end{aligned}$$

wenn:

$$\sum_0^i (-1)^{\mu} \binom{M+\mu}{i} \binom{i}{\mu} = f(i)$$

gesetzt wird. Diese Summe lässt sich nun auswerthen, indem man das allgemeine Glied als den i^{ten} Differentialquotienten einer passend bestimmten Potenz von x , genommen für $x=1$, auffasst, und die

Summe auf die Berechnung des i^{ten} Differentialquotienten einer Potenz des Binoms $1 - x$ zurückführt. In der That ist:

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{dx^i} \sum_0^i (-1)^\mu \binom{i}{\mu} x^{M+\mu} \right]_{x=1} \\ &= \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{dx^i} x^M (1-x)^i \right]_{x=1} = (-1)^i. \end{aligned}$$

Entsprechend wird $f(k) = (-1)^{i+1}$, also:

$$f(i) + f(k) = 0,$$

hiernach:

$$S = \binom{M+1}{i+1}, \quad \text{w. z. b. w.}$$
