

Über die Helligkeit des Saturn bei verschwundenem Ring.

Von H. Seeliger.

1.

Neuerdings ist die Frage aufgetaucht, ob die Helligkeit des Saturnkörpers an sich nicht eine merkbare Abhängigkeit von der Phase zeigt, trotz der Kleinheit des Phasenwinkels. Sie läßt sich begreiflicherweise bei weit geöffnetem Ringe nicht mit der erforderlichen Zuverlässigkeit entscheiden und man wird also Beobachtungen benutzen müssen, die bei nahezu verschwundenem Ring angestellt worden sind. Im letzten Jahre war hierzu die Gelegenheit vorhanden, und sie wird wohl von den photometrischen Beobachtern ausgenutzt worden sein. Bis jetzt ist allerdings nur eine zusammenhängende Beobachtungsreihe publiziert worden ¹⁾. Die aus ihr vom Beobachter selbst abgeleiteten Resultate unterliegen jedoch den größten Bedenken, wie ich hier im Zusammenhang mit allgemeineren Betrachtungen zeigen werde.

Vor vielen Jahren habe ich die Beleuchtung des Saturn im Anschluß an meine Theorie der Beleuchtung staubförmiger Körper in Betracht gezogen ²⁾. Diese Theorie setzt für das Saturnsphäroid die Gültigkeit eines der in der Astrophotometrie gebräuchlichen elementaren Beleuchtungsgesetze voraus, nimmt also an, daß ein merkbarer Einfluß der Phase, da der Phasenwinkel α kleiner als etwa $6\frac{1}{2}^\circ$ bleibt, nicht existiert. Damals war das Vorkommen stärkerer Veränderungen in der Helligkeit der Planeten in unmittelbarer Nähe der Opposition nicht oder wenigstens nicht allgemeiner bekannt, weshalb keine Veranlassung vorlag etwas ähnliches bei Saturn vorauszusetzen, zumal da dieser Planet als ein von einer dichten Atmosphäre umgebener Körper angesehen werden muß. Später wurden von G. Müller, Parkhurst und Pickering bei einigen kleinen Planeten sehr merkbare Phaseneinflüsse konstatiert, ebenso bei Merkur. Geringere Einflüsse dieser Art zeigten sich bei Venus und Mars. Für Jupiter fand Herr Müller keinen nachweisbaren Phaseneinfluß und wegen der großen Ähnlichkeit, die Saturn und Jupiter in physikalischer Beziehung zu zeigen scheinen, blieb die Vermutung gerechtfertigt, daß sich Saturn in ähnlicher Weise wie Jupiter auch in bezug auf den Phaseneinfluß verhalten werde. Indessen blieb natürlich eine Prüfung dieser Vermutung im höchsten Grade wünschenswert, besonders auch deshalb, weil man für ein anderes Verhalten des Saturn, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, trotz des gesagten plausible Gründe anführen kann.

In bezug auf die den Ring bildenden Teilchen liegt die Sache etwas anders, denn man muß zugeben, daß für diese der primäre Einfluß der Phase $f(\alpha)$ nicht unbedeutend zu sein braucht. Ich habe in der allgemeinen Entwicklung meiner Theorie hierauf Rücksicht genommen, und in den Ausdrücken für die Helligkeiten erscheint $f(\alpha)$ als Faktor, und erst in den zahlenmäßigen Anwendungen habe ich $f(\alpha) = \text{konst. gesetzt}$. Wenn sich aber $f(\alpha)$ sehr merklich für kleine α ändern sollte, dann ist selbstverständlich die Interpretation der photometrischen Ergebnisse beim Saturn weniger durchsichtig und einfach, wie im ersteren Falle und eine Trennung des primären Phaseneinflusses von dem, der durch die gegenseitige Verdeckung und Beschattung der einzelnen Teilchen entsteht, ist bei der erzielbaren Genauigkeit der Messungen wohl kaum durchführbar.

Einige Schwierigkeiten bei der Anwendung meiner Theorie auf die Reduktion der photometrischen Saturnbeobachtungen entstehen dadurch, daß die Durchführbarkeit der Entwicklungen naturgemäß gewisse ideale Verhältnisse in bezug auf Gleichartigkeit, Homogenität etc. in der Anordnung der kleinen Teilchen, welche den Ring bilden, erfordert, die in Wirklichkeit nur ganz angenähert stattfinden können. Die Bestimmung der auftretenden Konstanten wurde nach einer von Herrn G. Müller herrührenden langjährigen Beobachtungsreihe vorgenommen; diese Bestimmung habe ich aber ausdrücklich als eine provisorische bezeichnet und demzufolge (vergl. I S. 497) gewisse Vereinfachungen der Formeln benutzt, die bei einer schärferen Reduktion, wenn sich eine solche lohnen sollte, zu vermeiden wären. Insbesondere habe ich hervorgehoben, daß die Theorie für sehr kleine Elevationswinkel der Erde (A) und der Sonne (A') über der Ebene des Saturnrings nicht ohne weiteres anwendbar bleibt und demgemäß die Formeln nur für den Fall, daß A und A' nicht sehr klein sind, vollständig entwickelt. In der Tat war diese Einschränkung damals zulässig, da der Anteil des vom Ringe ausgehenden Lichtes an der Gesamthelligkeit des Saturnsystems nur dann erheblich ist, wenn A und A' nicht sehr klein sind. Indessen sind nur sehr geringe und leicht ausführbare Umgestaltungen der Formeln nötig, um den allgemeineren Fall zu umfassen. Einiges Interesse ist mit der genannten Umgestaltung insofern verbunden, als man erst dadurch in die Lage versetzt wird, eine be-

¹⁾ Photometric measurements of Saturn etc., by J. M. Baldwin. Monthly Notic. March 1908.

²⁾ I. Zur Theorie der Beleuchtung der großen Planeten insbesondere des Saturn. Abhandlungen der Münchener Akademie. 1887.
II. Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen, insbesondere des Saturnrings. Ebenda 1893.

stimmte ausgearbeitete Theorie auch bei sehr wenig geöffnetem Ringe mit den Beobachtungen vergleichen zu können, mag nun die Theorie selbst in diesem Falle gewissen Bedenken unterliegen oder nicht. Ich werde deshalb die betreffenden Formeln hier angeben.

Für nicht zu kleine A und A' wird die Theorie nur die Mittelwerte aus vielen und unter verschiedenen Umständen angestellten Beobachtungen darzustellen haben und man wird dabei über manche tatsächlich vorhandene Abweichung in der Anordnung der Massen von der angenommenen idealen absehen können. Dies wird im allgemeinen bei sehr wenig geöffnetem Ringe nicht geschehen dürfen, wenn man nicht Abweichungen, die den Charakter des Systematischen an sich tragen, erhalten will. Bei der Reduktion der Helligkeiten auf vollkommen verschwundenen Ring wird man demnach z. B. auf die Schattenwürfe Rücksicht zu nehmen haben und, wenn Erde und Sonne auf verschiedenen Seiten des Ringes stehen, wird man darauf zu achten haben, daß sich der unbeleuchtete Ring als dunkler Streifen auf den Saturnkörper projiziert. Dabei ergibt sich, daß nicht ganz leicht zu kontrollierende Umstände eine Rolle spielen, die bei größeren A und A' unbeachtet bleiben können. Wenn nämlich die Ringmasse nicht genau längs einer Ebene ausgebreitet ist, sondern längs einer wenig gekrümmten Fläche oder längs einzelner Ebenenstücke mit verschiedener Orientierung, so wird der Einfluß der Verdeckung und Beschattung bei kleinen Elevations-

winkeln sehr stark vergrößert werden können, und dergleichen scheint in der Tat mehrfach vorgekommen zu sein.

Jedenfalls geht aus dem gesagten hervor, daß die Reduktion auf verschwundenen Ring mit einiger Sorgfalt ausgeführt werden muß, wenn man nicht imaginäre Phaseneinflüsse erhalten und zu irreführenden Resultaten gelangen will.

2.

Zuerst soll die Lichtmenge, die der Ring aussendet und die ich in I für nicht sehr kleine A und A' explizit gegeben habe, auf denselben Grundlagen fußend, für beliebige A und A' berechnet werden. Die Entwicklungen in I Seite 493-97 sind bis auf eine Vereinfachung, die nunmehr zu eliminieren ist, streng.

Die Annahme bestand darin, daß (S. 496)

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} = 4$$

gesetzt worden ist, was für nicht zu kleine A und A' allerdings angängig war. Ich setze nun

$$\frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin A \sin A'} = f.$$

Behält man im übrigen alle früher benutzten Bezeichnungen bei, so wird die strenge Formel für V (S. 495)

$$V = \frac{f}{\sin \alpha} \frac{\varrho^3}{\cos \mu} [\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + (\frac{1}{2} \pi + \varphi) \sin \varphi] - \frac{4}{3} \varrho^3 \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Führt man noch ein:

$$\Phi = \frac{3}{8\pi} [\cos \varphi - \frac{1}{3} \cos^3 \varphi + (\frac{1}{2} \pi + \varphi) \sin \varphi - \frac{2}{3}]$$

$$\delta = \frac{32\pi}{3} \frac{\varrho^3}{R}$$

und setzt, die frühere Bezeichnung etwas abändernd:

$$x = \frac{n N \delta}{\sin \alpha} \frac{f}{4 \cos \mu} \quad (1)$$

so wird jetzt:

$$-V \frac{n N}{R} = -x \Phi - \frac{x}{4\pi} [1 - \frac{2}{f} \cos \mu (1 + \cos \alpha)].$$

Für eine undurchsichtige Ringmasse, die hier allein in Betracht gezogen werden soll, findet man nach I S. 495-6:

$$\int_{h_1}^H e^{-\frac{n N}{R} V_2} dh = \frac{32 \varrho (\sin A + \sin A')}{12 x \sin \alpha \cos \mu} e^{-x \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos \mu (1 + \cos \alpha)}{2 \pi f} \right)}.$$

Die Helligkeit des Ringes, in der früheren Bezeichnung, ergibt sich so:

$$Q = \Gamma f(\alpha) \frac{\varrho}{H \delta} \frac{4 \sin A \sin A'}{\sin A + \sin A'} \left[x e^{-\frac{x}{4\pi} (1 - \frac{4}{f} \cos \mu \cos^2 \frac{1}{2} \alpha)} \int_0^{\frac{1}{2} \pi} e^{-x \Phi} \cos \varphi d\varphi + \frac{8}{3} e^{-x \left(\frac{3}{8} - \frac{\cos \mu \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}{\pi f} \right)} \right].$$

Wenn man also $\Gamma f(\alpha) \frac{\varrho}{H \delta} = \Gamma'$ und

$$\mathfrak{A} = x \int_0^{\frac{1}{2} \pi} e^{-x \Phi} \cos \varphi d\varphi \quad \mathfrak{B} = \frac{8}{3} e^{-\frac{3\pi-2}{8\pi} x} \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$$

setzt, so hat man

$$Q = \Gamma' \frac{4 \sin A \sin A'}{\sin A + \sin A'} \mathfrak{C} e^{-\frac{x}{4\pi} (1 - \frac{4}{f} \cos \mu \cos^2 \frac{1}{2} \alpha)} \quad (1)$$

Die Funktion $\mathfrak{E}(x)$ habe ich in I (Tafel VI) tabuliert. Der hier gefundene Ausdruck für Q ist mit dem früheren identisch, wenn $f = 4$, $\cos \mu = 1$ und $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 1$ gesetzt wird. Die letzte Annahme ist unter allen Umständen, die ersten für nicht zu kleine A und A' erlaubt.

Will man, und dieses Verfahren wird als das konsequenteste angesehen werden dürfen, die Resultate meiner Ausgleichung in I S. 489 benutzen, so ist nunmehr:

$$Q(0) = \frac{Q_B}{\Gamma' a + D Y}$$

wobei

$$a = \frac{4 \sin A'}{\sin A + \sin A'} e^{-\frac{x}{4\pi} (1 - \frac{4}{f} \cos \mu) \frac{X}{M}} \quad (2)$$

anzunehmen ist. $Q(0)$ ist die Lichtmenge des ringlosen Saturnkörpers, Q_B die beobachtete Gesamtlichtmenge. Für Γ' hat man den Wert (S. 491) $\log \Gamma' = 9.8401$ zu setzen. In I ist, worauf Herr G. Müller aufmerksam gemacht hat, infolge eines Schreibfehlers der doppelte Wert von Γ' statt Γ' angegeben.

$$\begin{aligned} \sin^2 \delta \cos^2 A \sin^2 \alpha &= \sin^2 \alpha - \sin^2 A - \sin^2 A' + 2 \sin A \sin A' \cos \alpha \\ \cos^2 \mu &= \frac{(\sin A + \sin A')^2}{\sin^2 \alpha + 4 \sin A \sin A' \cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \end{aligned}$$

Wird A und A' als positiv angesehen, so ist für $\cos \mu$ die positive Wurzel in der letzten Formel anzunehmen, und es wird:

$$\frac{4 \cos \mu}{f} = \frac{4 \sin A \sin A'}{(\sin A + \sin A') \sqrt{\sin^2 \alpha + 4 \sin A \sin A' \cos^2 \frac{1}{2} \alpha}}$$

Für sehr kleine A und A' , die im folgenden allein in Frage kommen, hat man also:

$$\frac{f}{4} = \frac{(A + A')^2}{4 A A'}, \quad \frac{4 \cos \mu}{f} = \frac{4 A A'}{(A + A') \sqrt{\alpha^2 + 4 A A'}}$$

Noch mag bemerkt werden, daß der Exponent von e in (I) für $\alpha = 0$ ebenfalls 0 werden muß, wenn A und A' nicht auch gleichzeitig null sind. In der Tat ist zunächst für kleine α , wenn zweite Potenzen von α fortgelassen werden:

$$\sin A' = \sin A + \alpha \cos \delta \cos A$$

und hiermit:

$$1 - \frac{4}{f} \cos \mu = \frac{1}{8} \alpha^2 \cos^2 \delta \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

und da x wie $\frac{1}{\alpha}$ für $\alpha = 0$ unendlich wird, wird der genannte Exponent gleich null.

Wie aus (2) hervorgeht, kann für kleine A' a sehr klein werden, und es kann deshalb vorkommen, daß $\Gamma a' + D Y < 1$ und somit $Q(0) > Q_B$ wird.

3.

Nach meinen in I gegebenen Vorschriften lassen sich leicht die Effekte der Schattenwürfe und Verdeckungen ableiten. Für sehr kleine A und A' , die hier allein in Frage kommen, ist aber die direkte Aufstellung der nötigen Formeln so einfach, daß sie vorgenommen werden soll. Der Schattenwurf des Saturn auf dem Ring kann offenbar als ganz unerheblich außer Betracht bleiben. Mit seinem Anfang im

Die Notwendigkeit die Formel (2) an Stelle der früher gegebenen anzuwenden, tritt nur für kleine A und A' ein, wobei dann die Rechnung etwas einfacher wird, wenn man die $\sin A$ und $\sin A'$ mit den Bogen vertauscht. In I sind alle vorkommenden Größen X , Y , D und ferner $M = \frac{\mathfrak{E}(\infty)}{\mathfrak{E}(x)}$ tabuliert, so daß die Berechnung der Formel (2) ohne alle Mühe erfolgen kann. Es wäre nur noch der Winkel μ zu berechnen, der sich am einfachsten aus den vorliegenden Werten von A , A' und dem Phasenwinkel α ergibt. Es war nämlich (I S. 494 u. 495):

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\cos A \sin \delta \sin \alpha}{\sin A + \sin A'}$$

Hier bedeutet δ den Winkel, den der vom Zentrum des Saturn aus gesehene größte Kreis Sonne-Erde mit dem Vertikalkreis bildet, wobei die Ringebene den Horizont bildet. Hieraus folgt:

$$\cos \delta \cos A \sin \alpha = \sin A' - \sin A \cos \alpha$$

und demnach

Zentrum des Saturn werde ein rechtwinkliges Koordinatensystem so gelegt, daß die xy -Ebene mit der Ringebene zusammenfällt. Die Sonne soll in der xz -Ebene liegen und der Elevationswinkel A' positiv sein, wenn ihre z -Koordinate negativ ist. Die Dimensionen des Saturnsystems sollen im Vergleich zur Sonnenentfernung als unendlich klein betrachtet werden. Bezeichnet man mit ξ und η die Koordinaten des Ringrandes, dessen Schatten auf dem Saturn verfolgt werden soll, und mit $x y z$ die Koordinaten des Schattens dieses Punktes auf dem Saturn, c die Entfernung beider Punkte voneinander, dann ist

$$\xi - x = c \cos A' \quad \eta = y \quad z = c \sin A'$$

Sind noch r und R die Radien des Ringrandes und des Saturn im Äquator, so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

Man führe ein zweites Koordinatensystem $x' y' z'$ mit demselben Anfang ein, dessen x' -Achse in die Richtung zur Erde fällt und dessen $x' z'$ -Ebene senkrecht zur Ringebene liegt. Die Winkelentfernung des Durchschnitts der $x' z'$ -Ebene mit der Ringebene von der x -Achse sei φ , der Elevationswinkel der Erde A sei positiv, wenn Erde und Sonne auf derselben Seite des Ringes liegen. Schließlich sollen die beiden z -Achsen ebenfalls auf derselben Ringseite liegen. Die Transformationsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi \cos A - y' \sin \varphi + z' \cos \varphi \sin A \\ y &= x' \sin \varphi \cos A + y' \cos \varphi + z' \sin \varphi \sin A \\ z &= -x' \sin A \quad \quad \quad + z' \cos A \end{aligned}$$

Da nun

$$\operatorname{tg} A' = \frac{z}{\xi - x}$$

so ergibt sich die Gleichung der von der Erde aus gesehenen (projizierten) Schattenkurve des Ringrandes, wenn man aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A' [\xi - x' \cos \varphi \cos A + y' \sin \varphi - z' \cos \varphi \sin A] &= -x' \sin A + z' \cos A \\ \xi^2 &= r^2 - [x' \sin \varphi \cos A + y' \cos \varphi + z' \sin \varphi \sin A]^2 \\ x'^2 &= R^2 - y'^2 - z'^2 \end{aligned}$$

ξ und x' eliminiert, wodurch sich also eine Gleichung zwischen y' und x' ergibt. Nimmt man nun A, A', φ als sehr kleine Winkel an, dann wird es ausreichen zu setzen:

$$A' [\xi - x' + \varphi y' - A z'] = -x' A + z'$$

oder

$$z' (1 + A A') + (A' - A) x' = A' [\varphi y' + \xi]$$

Läßt man in der weiteren Entwicklung Glieder 3. Ordnung fort, so findet man leicht

$$z' = A' \sqrt{r^2 - y'^2} + (A - A') \sqrt{R^2 - y'^2} + A' \varphi y' \left[1 - \sqrt{\frac{R^2 - y'^2}{r^2 - y'^2}} \right]. \quad (3)$$

Es ist hierbei jener der beiden Werte von z' genommen, der einem positiven x' entspricht. Bei der numerischen Anwendung wird man noch das letzte Glied der Formel (3) als kaum merklich fortlassen können.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß sich die Ringgrenze mit dem Radius r als eine Ellipse projiziert, deren Gleichung

$$z' = \sin A \sqrt{r^2 - y'^2} = A \sqrt{r^2 - y'^2} \quad (4)$$

ist. Die Breite Δ_z des Bandes, als welches sich der ganze in Frage kommende Teil des Ringes, der durch die beiden

oder

$$f = A \left(R \sqrt{r_1^2 - R^2} - R \sqrt{r^2 - R^2} + r_1^2 \arcsin \frac{R}{r_1} - r^2 \arcsin \frac{R}{r} \right)$$

Ich will gleich Zahlenwerte angeben. Nimmt man alle Dimensionen entsprechend der mittl. Oppositionsentfernung an, so wird $R = 8.62$, während der polare Halbmesser b des Saturn $= 7.70$ ist. Für den äußersten Ringrand ist $r_1 = 20.00$ und für r soll dem Radius des inneren Randes des dunklen Ringes entsprechend 10.26 genommen werden. Bei so kleinen Elevationen, wie hier in Frage kommen, muß der Floring als fast undurchsichtig betrachtet werden. Indessen macht eine kleine Vergrößerung von r nur wenig aus, wie auch eine andere Annahme über die Dimensionen des Saturnsystems.

Ist A° der Wert von A in Graden, so ergibt sich

$$\frac{f}{R b \pi} = A^\circ \times 0.01514.$$

Danach muß die beobachtete Lichtmenge des Saturn, in Größenklassen ausgedrückt, um

$$-0.00164 A^\circ \quad (5)$$

korrigiert werden, um die größere Helligkeit, die ohne Ring stattfände, zu erhalten.

Ist der Schatten des Ringes ganz sichtbar, so wird nach (3) die Breite des Schattenbandes

$$\delta_z = A' (\sqrt{r_1^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y'^2}).$$

Stehen Sonne und Erde auf verschiedenen Seiten des Ringes, so wird also die Gesamtkorrektur, die wegen Schattenwurf und Projektion des unerleuchteten Ringes an

Radien r_1 und r begrenzt wird, darstellt, ist demnach

$$\Delta_z = A (\sqrt{r_1^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y'^2}).$$

Für die Berechnung des Flächeninhalts f dieses Bandes genügt es in bezug auf y' zwischen den Grenzen $y' = 0$ und $y' = R$ zu integrieren. Es ist also:

$$f = 2A \int_0^R (\sqrt{r_1^2 - y'^2} - \sqrt{r^2 - y'^2}) dy'$$

die beobachtete Lichtmenge anzubringen ist, um auf verschwundenen Ring zu reduzieren:

$$-0.00164 (A + A')^\circ. \quad (6)$$

Haben dagegen A und A' dasselbe Zeichen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) $A > A'$. Dann wird der Schatten des innern Ringrandes sichtbar werden. Die Breite dieses sichtbaren Teils des Schattens ist dann:

$$\delta_z = (A - A') (\sqrt{r_1^2 - y'^2} - \sqrt{R^2 - y'^2})$$

und durch Integration, ähnlich wie früher:

$$f = (A - A') \left(R \sqrt{r^2 - R^2} + r^2 \arcsin \frac{R}{r} - R^2 \frac{\pi}{2} \right).$$

2) $A' > A$. Dann wirft der äußere Ringrand einen sichtbaren Schatten, und die analogen Größen sind:

$$\delta_z = (A' - A) (\sqrt{r_1^2 - y'^2} - \sqrt{R^2 - y'^2})$$

$$f = (A' - A) \left(R \sqrt{r_1^2 - R^2} + r_1^2 \arcsin \frac{R}{r_1} - R^2 \frac{\pi}{2} \right)$$

Hieraus ergeben sich die Korrekturen auf verschwundenen Ring in Sterngrößen:

$$\left. \begin{aligned} A > A' & -0.0033 (A - A')^\circ \\ A' > A & -0.00197 (A' - A)^\circ \end{aligned} \right\} (7)$$

Außerdem kommt noch der Einfluß der Phase auf die Lichtmenge des Saturnkörpers hinzu, der übrigens selbst für die größten vorkommenden α kaum merkbar ist. Es wurde,

wie wohl kaum besonders bemerkt zu werden braucht, für die Saturnscheibe eine gleichförmige Lichtverteilung angenommen. Die Anwendung eines anderen Elementargesetzes, z. B. des Lambertschen, ruft aber bekanntlich nur geringfügige Änderungen in den Reduktionsgrößen hervor. Dagegen könnte vielleicht ein anderer Umstand eine sehr merkliche Vergrößerung aller im vorhergehenden erwähnten Reduktionen hervorrufen. Es ist bekannt, daß Saturn eine Äquatorialzone besitzt, die wesentlich heller ist, als die andern Teile der Scheibe. Es ist dies sehr deutlich auf verschiedenen Abbildungen zu sehen, besonders auch auf den schönen Zeichnungen, die Herr Barnard aus den letzten Monaten 1907 veröffentlicht hat. Gerade auf diesem hellen Äquatorgürtel spielen sich aber die berechneten Schattenwürfe und Verdeckungen ab. Ihr Einfluß muß also im Verhältnis von $h:h_0$ vergrößert werden, wo h die Helligkeit der Äquatorialzone und h_0 die mittlere Helligkeit der Saturnscheibe ist. Dieser Quotient ist nicht leicht abzuschätzen, aber nach den vorliegenden Abbildungen darf man ihn vielleicht etwa zu $\frac{3}{2}$ ansetzen.

4.

Die im vorstehenden besprochenen Korrekturen sind also zur Reduktion der photometrischen Beobachtungen des Saturn anzuwenden, um die Lichtmenge des ringlosen Planeten zu bekommen, und auf diese Weise ist auch die oben erwähnte Messungsreihe des Herrn Baldwin, die sich auf die Zeit von Aug. 11 bis Dez. 1 1907 erstreckt, zu reduzieren. Herr Baldwin erhält als Resultat seiner Reduktion eine ziemlich

starke Phasengleichung, nämlich für die Helligkeit h_0 des Saturn in Größenklassen:

$$h_0 = 0.967 + \alpha^\circ \times 0.0300$$

$$h_0 = 0.916 + \alpha^\circ \times 0.0313.$$

Der Phasenwinkel α ist hier in Graden auszudrücken. Der erste Wert soll aus der ganzen Beobachtungsreihe von 25 Abendmitteln hervorgehen, der zweite mit Ausschluß der ersten 9 Abende. Daß diese Phasengleichung groß ist, ergibt die Vergleichung mit den früher von Herrn G. Müller gefundenen Koeffizienten von α° für die Planeten Merkur, Venus, Mars und Jupiter, welche der Reihe nach sind:

$$0.0368 \quad 0.0132 \quad 0.0149 \quad 0.00.$$

Schon ein flüchtiger Blick auf die Beobachtungsergebnisse des Herrn Baldwin zeigt aber, daß in den Reduktionen irgend welche durchgreifende Fehler vorgekommen sein müssen. Da die ersten Beobachtungen von Herrn Baldwin selbst und zwar wegen der Unsicherheit in der Extinktion und noch anderer Umstände als unzuverlässig bezeichnet werden, hängt die Bestimmung des Koeffizienten von α fast ganz von den letzten 5 Beobachtungen, bei denen größere Werte von α vorkommen, ab. Hier scheint nun Herr Baldwin die Reduktion auf verschwundenen Ring mit verkehrtem Zeichen angebracht zu haben.

Da Herr Baldwin detaillierte Angaben über seine Ausgleichung nicht macht, muß die allerdings wenig umfangreiche Rechnung von neuem ausgeführt werden.

Nr.	α	A	A'	M_0	Korrekt.	M_B^0	M_B'	$(M_B^0 - R)$		$(M_B' - R)$	
								I	II	III	IV
1	3.77	-1.82	-0.23	1.14	-0.02	1.12	1.11	+0.11	—	—	—
2*	3.52	-1.74	-0.27	1.01	-0.02	0.99	0.98	-0.02	—	—	—
3*	3.34	-1.69	-0.30	1.30	-0.02	1.28	1.27	+0.26	—	—	—
4	2.97	-1.56	-0.36	1.02	-0.01	1.01	1.00	+0.01	—	—	—
5	1.46	-1.05	-0.59	1.07	+0.01	1.08	1.08	+0.10	—	+0.11	+0.12
6	0.83	-0.83	-0.68	1.08	+0.02	1.10	1.10	+0.12	—	+0.13	+0.14
7	0.73	-0.79	-0.69	1.01	+0.03	1.04	1.03	+0.05	—	+0.07	+0.07
8	0.63	-0.76	-0.71	0.93	+0.03	0.96	0.95	-0.02	—	-0.01	-0.01
9	0.53	-0.72	-0.72	0.97	+0.03	1.00	0.99	+0.03	—	+0.03	+0.03
10*	0.28	-0.53	-0.80	0.94	+0.02	0.96	0.96	-0.01	+0.04	-0.01	0.00
11	0.59	-0.39	-0.86	0.97	+0.01	0.98	0.97	+0.01	+0.05	+0.01	+0.01
12	0.80	-0.32	-0.89	0.98	0.00	0.98	0.97	+0.01	+0.05	+0.01	+0.01
13	0.90	-0.28	-0.90	0.86	0.00	0.86	0.85	-0.12	-0.07	-0.11	-0.11
14*	1.11	-0.21	-0.93	0.91	-0.01	0.90	0.89	-0.08	-0.03	-0.07	-0.07
15	1.21	-0.17	-0.95	0.91	-0.01	0.90	0.89	-0.08	-0.04	-0.07	-0.07
16*	1.32	-0.14	-0.96	0.85	-0.02	0.83	0.82	-0.15	-0.11	-0.14	-0.14
17	1.63	-0.04	-1.01	0.97	-0.02	0.95	0.94	-0.04	+0.01	-0.02	-0.02
18*	1.74	0.00	-1.02	0.95	-0.02	0.93	0.92	-0.06	-0.01	-0.04	-0.04
19	2.25	+0.16	-1.10	1.07	-0.02	1.05	1.04	+0.06	+0.10	+0.07	+0.08
20	2.55	+0.25	-1.14	0.90	-0.03	0.87	0.86	-0.13	-0.08	-0.11	-0.10
21*	3.39	+0.50	-1.27	1.09	-0.03	1.06	1.04	+0.06	+0.09	+0.08	+0.08
22*	3.74	+0.59	-1.33	0.94	-0.04	0.90	0.89	-0.11	-0.07	-0.08	-0.07
23	4.51	+0.77	-1.48	1.10	-0.04	1.06	1.04	+0.04	+0.08	+0.08	+0.08
24	5.69	+0.90	-1.84	1.07	-0.06	1.01	0.99	-0.02	+0.01	+0.02	+0.03
25	5.78	+0.87	-1.90	1.00	-0.06	0.94	0.92	-0.09	-0.06	-0.05	-0.04

In der vorstehenden Tabelle, deren fünf erste Kolumnen ich aus der Publikation des Herrn Baldwin übernommen habe, bedeutet α , A , A' Phasenwinkel, Elevationswinkel der Erde und der Sonne, M_0 ist die auf mittlere Opposition reduzierte beobachtete Lichtmenge des Saturn in Größenklassen. Die 5. Kolumne enthält die nach den obigen Formeln berechnete Reduktion auf verschwundenen Ring, die ich allein als meiner Theorie entsprechend bezeichnen kann, wodurch die M_0 in M_B^0 übergehen. Die mit einem *

versehenen Abendmittel sind nach Angaben des Beobachters mit halbem Gewicht [ich habe das Gewicht zu $0.49 = (0.7)^2$ angesetzt] zu berücksichtigen.

Die Werte M_B^0 habe ich nun nach dem Vorgange von G. Müller, dem auch Herr Baldwin folgt, durch eine lineare Formel darzustellen gesucht. Aus allen 25 Beobachtungen ergibt sich bei Hinzufügung der mittl. Fehler der Koeffizienten und der Gewichtseinheit (ϵ):

$$I) h = 0.968 (\pm 0.030) + \alpha^\circ \times 0.0105 (\pm 0.0108) \quad \epsilon = \pm 0.082.$$

Aus den Beobachtungen 10-25 findet man:

$$II) h = 0.918 (\pm 0.029) + \alpha^\circ \times 0.0140 (\pm 0.0095) \quad \epsilon = \pm 0.061.$$

Da die ersten vier Beobachtungen nach Angabe des Beobachters aus verschiedenen Gründen zu Zweifeln an ihrer Zuverlässigkeit Anlaß geben, tut man wohl am besten, sie ganz auszuschließen. So ergibt sich die Darstellung:

$$III) h = 0.970 (\pm 0.025) + \alpha^\circ \times 0.0029 (\pm 0.0096) \quad \epsilon = \pm 0.069,$$

die wohl am ehesten als das plausibelste Resultat aus der vorliegenden Beobachtungsreihe angesehen werden darf.

Schließlich habe ich noch mit dem am Ende von Artikel 3 erwähnten Faktor $\frac{3}{2}$ die M_0 auf verschwundenen Ring reduziert und die so erhaltenen M_B' ausgeglichen. Es ergab sich so die Formel:

$$IV) h = 0.964 (\pm 0.027) + \alpha^\circ \times 0.0000 (\pm 0.010) \quad \epsilon = \pm 0.074$$

Diese letzte Darstellung ist selbstverständlich zunächst ein nicht hypothesenfreier Versuch, der offenbar nicht mehr leistet, wie die andern Formeln.

Man wird nicht bezweifeln können, daß in der Beobachtungsreihe noch systematische Fehler, die bei solchen Messungen kaum zu vermeiden sein dürften, vorhanden sind und eine ganz zufriedenstellende Darstellung kaum gestatten. Andererseits darf nicht übersehen werden, daß eine genaue Reduktion auf verschwundenen Ring nicht ausgeführt werden kann. Abgesehen von anderem, muß auf die schon oben gemachte Bemerkung hingewiesen werden. Vielfache Beobachtungen gerade auch während der letzten Monate des Jahres 1907 scheinen ziemlich deutlich darauf hinzuweisen, daß die Ringmaterie nicht genau in einem von zwei parallelen Ebenen begrenzten Raum liegt und daß Abweichungen von

dieser idealen Lage innerhalb längerer Perioden vorkommen. Es ist leicht zu sehen, daß hierdurch bei den vorliegenden Beobachtungen, namentlich am Anfang und am Ende der Reihe, Abschwächungen der Gesamtlichtmenge von einigen hundertsten Größen leicht vorkommen können, wodurch möglicherweise die letzten Reste, die man eventuell noch im Verlauf der obigen Zahlen finden könnte, verschwinden.

Über die erhaltenen Resultate weitere Bemerkungen zu machen, scheint nicht nötig. Man wird sie aber wohl kaum anders interpretieren können als dahin, daß die Beobachtungsreihe des Herrn Baldwin entweder gar keinen oder höchstens einen ziemlich geringen und nur sehr ungenau bestimmbar Phaseneinfluß beim Saturnkörper ergibt.

München, 1908 Juni 6.

H. Seeliger.

Bemerkung zur Theorie der Fixsternaberration.

Von H. Seeliger.

Die durch die Bewegung des Beobachtungsortes entstehende Aberration wird nach dem Grundsatz berechnet, daß sich die Geschwindigkeit dieser Ortsveränderung mit der nach dem wahren Sternort gerichteten Lichtgeschwindigkeit v gemäß dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammensetzt und so den scheinbaren Ort des Sterns gibt. Die auf diese Weise zu erlangenden bekannten Grundgleichungen kann man nun durch eine geringe Umstellung so gestalten, daß man sofort eine genaue Übersicht über die Wirkungsweise der verschiedenen Aberrationseinflüsse gewinnt, die z. B. durch die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne und durch die translatorische Bewegung des Sonnensystems (sogenannte säkulare Aberration) entstehen. Da ich diese denkbar einfachste Darstellung, die z. B. ohne weiteres das bekannte Theorem von Villarceau ergibt, in den mir zugänglichen Arbeiten

über Aberration nicht gefunden habe, erlaube ich mir sie hier mitzuteilen.

Nennt man $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Winkel, welche die nach einem Sterne gezogene wahre Richtung mit einem festen Achsen-system bildet, $X_1 X_2 X_3$ die Komponenten der Geschwindigkeit des Beobachters nach denselben Achsen, $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$ die durch die gesamte Aberration veränderten scheinbaren Richtungswinkel, so lauten die Grundgleichungen

$$v' \cos \alpha'_i = v \cos \alpha_i + X_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Setzt man die Komponente X_i aus zwei beliebigen Einzelgeschwindigkeiten ξ'_i und ξ''_i

$$X_i = \xi'_i + \xi''_i$$