Estrutura Tensorial Multi-Dimensional da Árvore Reversa de Collatz: Uma Proposta Ontológica via Matriz Multidimensional Fundamental

Carlos Alberto Terêncio de Bastos*

April 28, 2026

Abstract

Apresentamos uma reformulação tensorial multi-dimensional da árvore reversa do problema de Collatz $3n+1$, organizada em torno de uma matriz construtiva 8-dimensional cuja diagonal é a sequência dos ímpares positivos crescentes. Cada inteiro ímpar é mapeado a um ponto único em $\mathbb{Z}^8$ via coordenadas algébricas e dinâmicas: $(n, \sigma, q, \nu_3, \nu_2(3n+1), \text{freq}, P_{\max}, p_{\min})$, todas geradas por princípios aritméticos sobre inteiros. **A contribuição central é arquitetural** — a organização tensorial unificada — não a redescoberta de identidades individuais, várias das quais aparecem em formas equivalentes na literatura clássica de Collatz [4, 1, 8]. Apresentamos a matriz com seus geradores, demonstramos identidades estruturais conectando as dimensões, comparamos sistematicamente com princípios geradores universalmente aceitos para $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$, e formulamos uma *proposta ontológica* (Princípio 16) que expressa o racional estrutural compartilhado entre nossa formulação e geradores aceitos como Peano. Argumentamos por simetria de tratamento: objeções genéricas como o contraexemplo trivial aplicam-se uniformemente a todas formulações geradoras, e a aceitação de Peano como tautológica reflete convenção fundacional, não demonstração formal de não-existência de exclusões. A verificação computacional das identidades em 17,501 ímpares de magnitude $\sim 10^9$ é apresentada juntamente com a verificação histórica da conjectura por Barina (2020) em $n \leq 2^{68}$. Não afirmamos prova: oferecemos arcabouço estrutural cuja avaliação cabe à comunidade. Em apêndice ilustrativo, aplicamos a metodologia a três sistemas dinâmicos análogos sobre $\mathbb{N}^+$ —— um convergente em 6D demonstrável por indução, outro em 6D com forma fechada via estrutura binária, e um terceiro em 7D onde a cobertura falha demonstravelmente —— evidenciando que a formulação é dimensão-adaptativa e não constitui construção *ad hoc* para o caso de Collatz.

Palavras-chave: Conjectura de Collatz, problema $3n+1$, árvore reversa, estrutura tensorial multi-dimensional, foliação aritmética, distribuição diádica, princípios geradores, ontologia matemática.

Classificação MSC 2020: 11B83 (primária), 11A07, 37A45, 37P05, 03A05.

Contents

*Pesquisador independente. E-mail: caterencio@yahoo.com.br. LinkedIn: https://www.linkedin.com/in/carlos-alberto-terencio-bastos. DOI: 10.5281/zenodo.19865398.

1 Introdução

1.1 Contexto histórico

A conjectura conhecida como "problema $3n + 1$" afirma que para todo inteiro positivo n, a sequência iterada definida por

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ (3n+1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases} \tag{1}$$

eventualmente atinge o valor 1.

A atribuição histórica é debatida [3]. Embora frequentemente associada a Lothar Collatz a partir de 1937, o problema também aparece em correspondência atribuída a Kakutani, Ulam, Hasse e Thwaites em décadas posteriores. Reconhecemos esta multiplicidade de origens; usamos "Conjectura de Collatz" por convenção, sem implicar atribuição exclusiva.

1.2 Estado da arte

Verificações computacionais de Barina [6] estabeleceram a conjectura para todo $n \leq 2^{68} \approx 2{,}95 \times 10^{20}$, sem encontrar contraexemplo. Resultados teóricos parciais incluem:

- **Terras [4]:** a densidade de inteiros cuja trajetória eventualmente desce abaixo do valor inicial é igual a 1;
- **Krasikov [7]:** estimativas quantitativas sobre fração de ímpares satisfazendo a conjectura;
- **Eliahou [13]:** cotas inferiores não-triviais para comprimentos de ciclos hipotéticos;
- **Tao [5]:** quase todo inteiro tem trajetória logaritmicamente limitada;
- **Lagarias [2]:** estrutura p-ádica das órbitas;
- **Wirsching [8]:** tratamento sistemático como sistema dinâmico discreto;
- **Garner [12]:** análise heurística clássica da operação T e propriedades estatísticas das trajetórias;
- **Sinai [10]:** abordagem ergódica e estatística.

Cada resultado parcial estabelece convergência *em medida* ou *em densidade*; a conjectura pontual permanece aberta.

1.3 Reformulações multi-dimensionais existentes

Diversas reformulações estruturais foram propostas:

- **Conway [9]:** máquinas FRACTRAN, demonstrando indecidibilidade de generalizações;
- **Wirsching [8]:** operador de Collatz como sistema dinâmico em $\mathbb{Z}_2$;
- **Sinai [10]:** análise ergódica multi-dimensional via medidas invariantes;
- **Kontorovich-Lagarias [11]:** estatísticas de stopping times;
- **Tao [5]:** análise harmônica em $\mathbb{Z}_2$.

1.4 Contribuição deste trabalho

Nossa proposta articula-se em torno de quatro contribuições:

1. **Arquitetura tensorial 8D explícita** da árvore reversa, organizando em estrutura unificada coordenadas algébricas e dinâmicas que aparecem dispersas na literatura;
2. **Identidades estruturais** que conectam as 8 dimensões e permitem análise multi-dimensional articulada (várias aparecem em formas equivalentes na literatura clássica; a contribuição é a *organização*, não a descoberta);
3. **Comparação sistemática** com geradores aceitos de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ (Peano, sucessão +2, fatorização), identificando o racional estrutural compartilhado;
4. **Proposta ontológica** (Princípio 16) formalizando o princípio gerador subjacente, oferecida à avaliação da comunidade.

Importante: explicitamos que o presente trabalho *não afirma prova formal da Conjectura de Collatz*. Oferecemos arcabouço estrutural e formalização de princípio cuja adoção como axioma resolveria a conjectura por construção, mas cujo estatuto formal convencional permanece em discussão.

1.5 Sobre a simplicidade da formulação

A formulação 8D é deliberadamente minimal: cada coordenada é gerada por um único princípio aritmético sobre inteiros, sem construções auxiliares. Esta simplicidade é metodológica — permite que o racional ontológico (Seção 7) se aplique uniformemente, sem hipóteses dependentes de formulações específicas. A novidade reside na *arquitetura unificada*, não nas peças individuais.

1.6 Gênese da formulação

A formulação tensorial 8D apresentada neste trabalho emergiu de um processo investigativo iterativo. Após estudo prolongado da Conjectura de Collatz através das abordagens tradicionais —— dinâmica forward, drift estatístico, análise modular —— buscou-se uma reformulação que tornasse a estrutura do problema visível em sua articulação multi-dimensional.

A intuição inicial foi escrever os ímpares positivos em ordem crescente como diagonal de uma matriz, e investigar quais coordenadas adicionais seriam necessárias para que a árvore reversa T^{-1}, partindo de 1, gerasse exatamente esta diagonal. Foi processo iterativo de testes: tentativas sucessivas com diferentes conjuntos de coordenadas auxiliares (modulares, estatísticas, dinâmicas), até convergir ao formato em que cada coordenada resulta de operações elementares sobre inteiros e a matriz inteira representa, em $\mathbb{Z}^8$, a construção do problema. Esta dimensionalidade —— 8 —— é específica de Collatz e reflete a riqueza aritmética particular daquele sistema;

outros sistemas dinâmicos análogos têm sua própria dimensionalidade canônica conforme a complexidade de suas operações, conforme ilustramos no Apêndice A.

O ponto de inflexão ocorreu na observação de que cada coordenada candidata, quando bem escolhida, resulta de operações aritméticas elementares sobre $\mathbb{Z}^+$ —— sem necessidade de extensão para $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ ou outros completamentos. **Os geradores são, em todas as 8 dimensões, definidos por inteiros.** Esta observação levou à formulação tensorial mínima apresentada, e à percepção subsequente de que o racional estrutural do trabalho coincide com princípios geradores universalmente aceitos para outras estruturas matemáticas fundamentais (Peano, sucessão +2, fatorização única).

A formulação resultante é deliberadamente simples. A simplicidade não é incidental —— é a propriedade que permite ao racional ontológico (Seção 7) aplicar-se uniformemente, sem dependência de construções auxiliares específicas.

1.7 Visão intuitiva

Antes do tratamento formal, oferecemos uma apresentação acessível da ideia central, dirigida a leitores não necessariamente especializados em teoria de números.

Imagine os ímpares positivos $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ dispostos em uma linha infinita —— a "diagonal" do nosso objeto matemático. Para cada ímpar nesta linha, associamos um conjunto de oito números inteiros que descrevem completamente seu comportamento sob a operação de Collatz: o próprio ímpar, o número de passos até atingir 1, o número de etapas "ímpares" nesta trajetória, sua valoração 3-ádica, e assim por diante. Cada um destes oito números é um inteiro exato, calculável diretamente.

A árvore reversa de Collatz pode ser visualizada como uma árvore que cresce a partir do número 1, ramificando-se conforme as regras inversas da operação T. Cada vez que a árvore se ramifica, novos ímpares são gerados, todos com suas oito coordenadas inteiras bem definidas.

A pergunta central da Conjectura de Collatz, traduzida nesta linguagem, torna-se: *esta árvore que cresce a partir de 1 alcança todos os ímpares positivos?* Empiricamente, em todos os casos verificados (mais de $2{,}9 \times 10^{20}$ inteiros), sim. A questão matemática é se isto pode ser estabelecido com rigor formal.

A analogia que talvez melhor capture a intuição estrutural é a de um sistema hidráulico: um cano com inclinação de descida tem capacidade comprovada de conduzir água sob pressão, e podemos demonstrar que nenhuma molécula escapa se o cano for íntegro. Nossa estrutura tensorial é semelhante: um "pipeline" infinito onde a cada nova ramificação gera-se um ímpar adicional, e empiricamente nenhum ímpar testado fica fora do sistema. A diferença entre a analogia física (onde a lei de conservação é demonstrável) e o sistema matemático de Collatz (onde a equivalente é a conjectura aberta) é precisamente o que este trabalho busca articular.

2 Preliminares e Notação

Definição 1 (Operadores de Collatz).

$$\begin{aligned} P : 2\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+, &\quad P(n) = n/2, \\ O : 2\mathbb{Z}^+ + 1 \to \mathbb{Z}^+, &\quad O(n) = (3n+1)/2. \end{aligned}$$

A operação combinada T é a função de Collatz unitária.

Definição 2 (Função Syracuse). Para n ímpar:

$$S(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}. \tag{2}$$

Definição 3 (Árvore reversa).

$$T^{-1}(s) = \{2s\} \cup \left\{ \tfrac{2s-1}{3} : (2s-1) \equiv 0 \pmod 3,\ \tfrac{2s-1}{3} > 1 \text{ ímpar} \right\}. \tag{3}$$

A árvore reversa $\mathcal{A}$ é o fecho de $\{1\}$ sob T^{-1}.

Observação 4 (Equivalência forward-reversa). A Conjectura de Collatz é equivalente à afirmação $\mathcal{A} = \mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$. Esta equivalência é trivial pela natureza inversa de T^{-1}: $n \in \mathcal{A} \iff$ existe $d \geq 0$ tal que $T^d(n) = 1 \iff$ trajetória forward de n atinge 1. A formulação reversa não é nova matemática: é o lado dual da formulação forward.

3 Construção Explícita da Matriz Tensorial 8D

3.1 A diagonal: ímpares crescentes

A *diagonal* da matriz é $\mathbf{d} = (1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots)$, gerada classicamente por iteração da regra $\{x_0 = 1,\ R(n) = n + 2\}$.

3.2 Por que apenas ímpares?

A escolha dos ímpares como diagonal do tensor 8D não é arbitrária —— é uma redução estrutural natural do problema. Justificamos formalmente:

Proposição 5 (Suficiência da restrição a ímpares). *A Conjectura de Collatz é equivalente à afirmação restrita a ímpares: para todo ímpar positivo n, a trajetória $\{T^k(n)\}_{k\geq 0}$ atinge 1 em número finito de passos.*

Proof. Seja $n \in \mathbb{N}^+$ par. Então $n = 2^a \cdot m$ com $a \geq 1$ e m ímpar. Aplicando a operações P consecutivas: $T^a(n) = m$. A trajetória de n atinge 1 se e somente se a trajetória de m atinge 1. Logo, basta estabelecer a conjectura para ímpares. □

Em termos da matriz tensorial: para cada par $n = 2^a \cdot m$, suas oito coordenadas derivam trivialmente das de m:

$$\begin{gathered} \sigma(n) = \sigma(m) + a, \quad q(n) = q(m), \quad \nu_3(n) = \nu_3(m), \\ \nu_2(3n+1) = \nu_2(3 \cdot 2^a m + 1) \quad \text{(redutível pelas regras de valoração)}, \\ P_{\max}(n) = P_{\max}(m), \quad p_{\min}(n) = 2 \text{ (trivial para par)}. \end{gathered}$$

Os pares são, neste sentido, *redundantes* no tensor: cada par é unicamente determinado pelo ímpar correspondente em sua trajetória forward, mais a quantidade $a = \nu_2(n)$ de operações P consecutivas iniciais. Restringir o tensor a ímpares preserva integralmente a informação dinâmica do sistema, com economia notacional substancial.

Esta redução é clássica em Collatz [4, 1]: a função de Syracuse S (Definição 2.2) opera precisamente sobre ímpares, mapeando ímpar a ímpar e absorvendo as operações P intermediárias na valoração $\nu_2(3n+1)$. Nossa formulação tensorial herda esta redução natural.

3.3 Coordenadas tensoriais por ímpar

Para cada ímpar n, associamos um vetor $\mathbf{x}(n) \in \mathbb{Z}^8$:

$$\mathbf{x}(n) = \big(n,\ \sigma(n),\ q(n),\ \nu_3(n),\ \nu_2(3n+1),\ \mathrm{freq}(n),\ P_{\max}(n),\ p_{\min}(n)\big). \tag{4}$$

Cada coordenada é gerada por princípio aritmético sobre inteiros:

- n: o ímpar (gerador $\{1, +2\}$);

- $\sigma(n)$: comprimento da trajetória forward até atingir 1 (inteiro ≥ 0);
- $q(n)$: número de operações O até 1 (inteiro ≥ 0);
- $\nu_3(n)$: valoração 3-ádica de n;
- $\nu_2(3n+1)$: valoração 2-ádica de $3n+1$;
- $\text{freq}(n)$: número de ímpares $m \leq N$ cuja trajetória contém n;
- $P_{\max}(n)$: maior primo na trajetória de n;
- $p_{\min}(n)$: menor primo divisor de n.

Em todas as 8 dimensões, os valores são inteiros gerados por operações aritméticas elementares sobre $\mathbb{Z}^+$.

3.4 Tabela ilustrativa

A Tabela 1 apresenta os primeiros pontos do tensor 8D, ilustrando concretamente a forma das coordenadas tensoriais para alguns ímpares pequenos.

n	σ	q	ν_3	$\nu_2(3n+1)$	freq	d_{BFS}	$P_{\max}$	$p_{\min}$
1	0	0	0	2	49999	0	1	1
3	5	2	1	1	15	5	5	3
5	4	1	0	4	46916	4	5	5
7	11	5	0	1	9567	11	17	7
9	13	6	2	2	13	13	17	3
11	7	2	0	3	23786	7	17	11
13	6	1	1	6	12	6	17	13
21	6	1	1	6	12	6	7	3
27	70	41	3	1	11	70	1619	3
31	67	39	0	1	4671	67	1619	31

Table 1: Primeiros pontos do tensor 8D: cada linha é um ímpar com 8 coordenadas inteiras exatas.

3.5 Equivalência forward-reversa pontual

Proposição 6 ($d_{\text{BFS}} = \sigma$)**.** *Para todo ímpar n com $\sigma(n)$ finito, $d_{\text{BFS}}(n) = \sigma(n)$.*

Proof. Trivial pela definição inversa: $n \in T^{-d}(\{1\}) \iff T^d(n) = 1$. □

Esta proposição é elementar; sua importância é *conceitual*: explicita que árvore reversa e trajetória forward são literalmente as duas faces do mesmo grafo. Não há "problema do reverso" separável do "problema forward".

A seção seguinte apresenta as identidades estruturais que conectam as 8 dimensões do tensor. Cada identidade pode ser lida em dois níveis: como afirmação aritmética sobre inteiros (acessível mesmo a leitores não-especializados) e como propriedade tensorial que articula coordenadas distintas em estrutura coerente. As demonstrações são deliberadamente curtas: cada uma decorre de manipulação aritmética elementar, refletindo a simplicidade da formulação.

3.6 Fatoração canônica do problema

Apresentamos agora interpretação que, a nosso ver, articula com precisão a natureza da formulação tensorial 8D: ela constitui uma *fatoração canônica* do problema de Collatz em componentes algebraicamente distintos.

Como a função T é determinística, toda a informação da trajetória forward de n está contida em n sozinho —— a trajetória é função de n. As 8 coordenadas tensoriais não acrescentam informação ao problema; constituem *decomposição organizada* da informação que n já contém implicitamente.

Esta decomposição admite tripartição natural:

Coordenadas locais (aritméticas estáticas). As coordenadas n, $\nu_3(n)$, $\nu_2(3n+1)$ e $p_{\min}(n)$ são *funções aritméticas locais* de n, computáveis em tempo $O(\log n)$ por inspeção direta da estrutura aritmética de n. Não requerem desdobramento da trajetória de Collatz —— são propriedades *estáticas* extraíveis algebricamente.

Coordenadas globais (dinâmicas iterativas). As coordenadas $\sigma(n)$, $q(n)$ e $P_{\max}(n)$ são *funções dinâmicas globais* de n, requerendo desdobramento da trajetória de Collatz para sua determinação. São propriedades *dinâmicas* extraíveis pela iteração de T.

Coordenada relacional (combinatória global). A coordenada $\mathrm{freq}(n)$ é *função relacional*, computada sobre o conjunto de trajetórias de outros ímpares —— mede quantas trajetórias atravessam n. É propriedade *combinatória* relativa à estrutura de árvore.

Esta tripartição não é arbitrária. Ela espelha a separação fundamental entre três tipos de informação no problema:

- **Informação aritmética** (estática, decifrável de n via inspeção);
- **Informação dinâmica** (extraída da iteração de T);
- **Informação combinatória** (relativa à árvore como objeto coletivo).

A árvore reversa T^{-1} percorre essa fatoração no sentido inverso: parte de coordenadas locais conhecidas (caracterizadas pelas regras modulares do Teorema 7) e reconstrói coordenadas globais via ramificação até atingir o conjunto-target $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$.

Implicação ontológica

Sob esta leitura, os 8 geradores da matriz tensorial não são postulados externamente —— são *derivados da fatoração canônica do problema*. Cada um corresponde a um aspecto algebricamente distinto da informação que n contém:

- Geradores 1–4 (locais): valoração 2-ádica, valoração 3-ádica, fatoração inicial, identidade —— todos extraíveis aritmeticamente;
- Geradores 5–7 (globais): comprimento de trajetória, contagem de operações ímpar, máximo da trajetória —— todos extraíveis dinamicamente;
- Gerador 8 (relacional): frequência —— extraível combinatoriamente sobre a árvore.

A formulação tensorial 8D é, em sentido preciso, *fatoração trivial* do problema forward —— trivial no sentido técnico de que nenhuma informação nova é introduzida, e profunda no sentido de que torna visível estrutura algebricamente articulada que estava implícita na função T. Os 8 geradores são, portanto, *ontológicos no sentido estrito*: dependem apenas de inteiros e operações elementares, e correspondem a aspectos canônicos da informação que o problema já contém.

4 Identidades Estruturais

Apresentamos identidades conectando as dimensões do tensor. Várias são clássicas ou folclóricas em Collatz; nossa contribuição é organizá-las como propriedades tensoriais coerentes.

4.1 Caracterização modular dos pontos de bifurcação

Teorema 7 (Identidade modular). *Para todo $s \in \mathbb{N}^+$ com $s > 2$:*

$$\left|T^{-1}(s)\right| = 2 \iff s \equiv 2 \pmod 3. \tag{5}$$

Proof. $T^{-1}(s) \supseteq \{2s\}$. O elemento adicional $(2s-1)/3$ pertence a $T^{-1}(s)$ se: (i) $(2s-1) \equiv 0 \pmod 3$ — equivalente a $s \equiv 2 \pmod 3$; (ii) $(2s-1)/3$ é ímpar — automático pois $2s-1$ e 3 são ímpares; (iii) $(2s-1)/3 > 1$ — equivalente a $s > 2$. □

4.2 Distribuição diádica

Teorema 8 (Distribuição diádica). *Para n ímpar uniformemente amostrado em $\{1, 3, \ldots, 2N - 1\}$:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big[\nu_2(3n+1) = v\big] = \frac{1}{2^v}. \tag{6}$$

Proof. $\nu_2(3n+1) = v \iff 3n+1 \equiv 2^v \pmod{2^{v+1}}$. Como $\gcd(3, 2^{v+1}) = 1$, isto define classe residual única módulo 2^{v+1} entre os ímpares, com densidade 2^{-v}. □

4.3 Decomposição combinatória de σ

Teorema 9 (Decomposição). *Para todo ímpar n com trajetória finita ($T_{\text{orig}} : n \mapsto 3n+1$ se ímpar, $n/2$ se par), denotando $m_1, \ldots, m_q$ os ímpares > 1 visitados:*

$$\sigma_{\text{orig}}(n) = q(n) + \sum_{i=1}^{q} \nu_2(3m_i + 1). \tag{7}$$

Proof. Cada m_i contribui uma operação O, seguida de $\nu_2(3m_i+1)$ operações P até o próximo ímpar. Total: $q + \sum_{i=1}^{q} \nu_2(3m_i+1)$. □

4.4 Foliação por valoração 3-ádica

Teorema 10 (Foliação ν_3). *Para todo ímpar n, após a primeira operação O na trajetória, todos os ímpares subsequentes têm $\nu_3 = 0$.*

Proof. $T(m) = (3m+1)/2$ para m ímpar. $3m \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3m+1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow \nu_3(3m+1) = 0$. Divisão por 2 não afeta ν_3. P subsequentes preservam. □

Corolário 11 (Redução). *A Conjectura de Collatz é equivalente à afirmação restrita: para todo ímpar n com $\nu_3(n) = 0$, a trajetória atinge 1 em finitos passos.*

4.5 Identidade Terras-Lagarias

Teorema 12 (Forma fechada Terras-Lagarias). *Para todo ímpar n com trajetória finita até 1:*

$$\sigma_{\text{orig}}(n) \cdot \log 2 - q(n) \cdot \log 3 = \log n + E_n, \tag{8}$$

onde $E_n = \sum_{i=1}^{q} \log\left(1 + \frac{1}{3m_i}\right) > 0$.

Proof. Aplicação iterada de $\log T_{\text{orig}}(m_i) = \log 3 + \log m_i + \log(1 + 1/(3m_i))$ e telescopagem. □

4.6 Posicionamento histórico das identidades

Várias destas identidades aparecem em formas equivalentes na literatura clássica de Collatz:

- **Teorema 8** (distribuição diádica) é resultado conhecido, atribuível a observações implícitas em Lagarias [1] e tratamentos sistemáticos em Wirsching [8];
- **Teorema 9** (decomposição $\sigma = q + \sum \nu_2$) é folclórico em Collatz, aparecendo em discussões de Terras [4] e Wirsching [8];
- **Teorema 10** (foliação ν_3) é observação elementar; o Corolário 11 aparece implícito em Lagarias [1];
- **Teorema 12** é essencialmente a identidade de Terras [4], reescrita;
- **Teorema 7** (caracterização modular) é simples mas ainda não vimos formulado explicitamente nesta forma; pode ser folclórico.

Nossa contribuição não é redescobrir essas identidades, mas reorganizá-las como coordenadas independentes de uma estrutura tensorial unificada. A novidade está na arquitetura — ler estas relações simultaneamente como propriedades de um único objeto matemático em $\mathbb{Z}^8$ — e não nas peças individuais. A simplicidade é deliberada: cada coordenada é gerada por princípio aritmético elementar, permitindo que o racional estrutural seja examinado sem dependência de construções auxiliares.

5 Geradores de Inteiros e Ímpares: Comparação Sistemática

Esta seção examina sistematicamente como inteiros e ímpares são tradicionalmente *gerados* em matemática. A motivação é simples: queremos mostrar que o tipo de geração que nossa árvore reversa de Collatz oferece não é estranho à matemática estabelecida —— ao contrário, compartilha o mesmo princípio fundamental de regras geradoras determinísticas sobre inteiros que aceitamos sem questionamento em outros contextos.

Reforçamos, pelo argumento da Subseção 3.6, que os 8 geradores da matriz tensorial não são escolhidos arbitrariamente —— são *derivados* da fatoração canônica do problema de Collatz em coordenadas locais, globais e relacional. Esta derivação confere aos geradores caráter ontológico: cada um corresponde a aspecto algebricamente distinto da informação que n contém, sendo expressável em operações elementares sobre inteiros.

5.1 Princípios geradores como base da matemática

Exemplo 13 (Peano). $\mathbb{N}$ é definido como o fecho de $\{0, S\}$, $S(n) = n+1$. Cobertura tautológica.

Exemplo 14 (Sucessão +2). $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}} = \{1, +2\}$-fecho: $1 \to 3 \to 5 \to 7 \to \ldots$, "1 mais infinitos 2". Cobertura tautológica.

Exemplo 15 (Fatorização). Pelo teorema fundamental da aritmética, $\{1, \times p\ \forall p \in \mathbb{P}\}$-fecho atinge todo natural. Cobertura por teorema.

5.2 A árvore reversa como gerador alternativo de ímpares

A regra T^{-1} partindo de 1 com dois braços:

- $P^{-1} : s \mapsto 2s$ (sempre);
- $O^{-1} : s \mapsto (2s-1)/3$ (quando $s \equiv 2 \pmod 3$, $s > 2$).

A Tabela 2 sintetiza a comparação entre os principais princípios geradores discutidos.

Gerador	Regra	Estatuto
Peano de $\mathbb{N}$	$\{0, S\}$	Tautológico (definição)
+2 em ímpares	$\{1, +2\}$	Tautológico (definição)
Fatorização	$\{1, \times p\}$	Teorema (Aritmética Fund.)
Árvore reversa Collatz	$\{1, T^{-1}\}$	**Conjectura de Collatz**

Table 2: Princípios geradores. Todos: regra determinística sobre inteiros, alcance $\aleph_0$, dimensões livres infinitas. Diferença reside no estatuto formal convencionado.

5.3 Observação chave

Em todos os geradores convencionalmente aceitos, a aceitação de cobertura procede por:

1. **Definição** (Peano, +2): o target é definido como o fecho;
2. **Demonstração** (fatorização): teorema explícito.

A árvore reversa é caso intermediário: target tem definição independente, e cobertura é tese a investigar.

5.4 Cardinalidade compartilhada e o critério ontológico de aceitação

Observamos um ponto fundamental que articula nosso argumento estrutural. Antes, registramos o pano de fundo: todos os geradores discutidos nesta seção produzem conjuntos de cardinalidade $\aleph_0$. Em particular, $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$, e a questão de Collatz reformula-se: vale $\mathcal{A} = \mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$?

Os ímpares positivos $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ admitem múltiplas matrizes geradoras, todas universalmente aceitas como definicionais —— mesmo diferindo dramaticamente no número de geradores envolvidos. Listamos exemplos:

- **Matriz peaniana:** $\{1, +2\}$ —— um gerador (operação +2) atuando sobre base inicial $\{1\}$. Simbolicamente: $1 + 2 + 2 + 2 + \cdots$.
- **Matriz por complemento:** $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}^+\}$ —— gerador derivativo a partir dos pares ($2k$ para todo k), seguido de subtração unitária.
- **Matriz por classes primais:** união dos ímpares primos com os ímpares compostos derivados multiplicativamente de cada primo ímpar (compostos derivados de 3, de 5, de 7, e assim por diante). Esta matriz tem *infinitos geradores* —— um para cada primo, mais a classe dos primos ímpares.
- **Matriz tensorial 8D:** $\{1, T^{-1}\}$ articulado sobre 8 dimensões coordenadas, conforme apresentado neste trabalho.

Todas estas matrizes geradoras produzem o mesmo conjunto $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$, com cardinalidade $\aleph_0$. Diferem em número de geradores (1, 1, infinitos, 8, respectivamente), em estrutura (sequencial, derivativa, união, multidimensional), e em complexidade superficial. Mas a comunidade matemática *aceita todas* como geradoras legítimas dos ímpares positivos —— sem demanda de demonstração formal de cobertura.

Este padrão revela o *critério genuíno* de aceitação. Não é o número de geradores envolvidos —— pode ser 1, 8 ou infinitos. Não é a cardinalidade do output —— todas produzem $\aleph_0$. É a **natureza ontológica** dos geradores: cada um deles é uma operação aritmética sobre inteiros, sem dependência de construções extrínsecas, e o conjunto produzido é *constituído ontologicamente* pelo fecho das aplicações.

Aplicado à matriz tensorial 8D: cada um dos oito geradores é tão elementar e ontológico quanto a operação +2 —— são valorações p-ádicas, contagens de iterações, divisões por 2, multiplicações por 3 mais 1, indexações de primos. Todas operam sobre $\mathbb{Z}^+$ produzindo valores inteiros exatos. Não há nada *nas características ontológicas dos geradores* que distinga nossa matriz das matrizes peaniana, derivativa ou por classes primais.

A questão estruturalmente relevante é, portanto: *por que aceitamos as três primeiras matrizes geradoras como tautológicas e tratamos a quarta como conjectura?*

A resposta histórica é convencional. As três primeiras foram incorporadas a definições estabelecidas de $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$, ou são equivalentes diretas a tais definições. A matriz tensorial 8D, embora opere com geradores igualmente ontológicos, é formulação mais recente, e a equivalência com $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ é tese substantiva.

Esta diferença é convencional, não estrutural. O critério adequado de aceitação não é o número de geradores, nem a antiguidade da formulação, mas sim a *natureza ontológica* dos geradores e a coerência da estrutura. Uma matriz pode ter 1, 8 ou infinitos geradores —— se cada um é operação aritmética elementar sobre inteiros, e o conjunto produzido satisfaz as condições estruturais do Princípio 16, a matriz tem o mesmo estatuto ontológico das matrizes geradoras tradicionalmente aceitas.

O Princípio 16 propõe que esta assimetria de aceitação seja revisada à luz do critério ontológico apropriado: regras geradoras determinísticas sobre inteiros, produzindo coordenadas exatas em todas as dimensões, sem mecanismos identificáveis de exclusão, merecem o mesmo tratamento independentemente do número de geradores envolvidos ou da época histórica de sua formulação.

6 Verificação Computacional

6.1 Escala dos testes

Verificamos as identidades em três escalas:

- Pequena: ímpares $n \leq 10^4$ (5,000 ímpares);
- Média: amostras em $[1, 10^6]$;
- Grande: 17,501 ímpares em [963,964,743; 963,999,743] ($\sim 10^9$).

A verificação *da conjectura* em si foi realizada por Barina [6] até $n \leq 2^{68} \approx 2{,}95 \times 10^{20}$. Nossa verificação em 10^9 confirma as *identidades estruturais* (Teoremas 7–12); a confirmação empírica da conjectura pertence à literatura citada.

6.2 Resultados das identidades

Quantidade	**Valor**
Total de ímpares testados ($\sim 10^9$)	17,501
Coordenadas σ, q, ν_3, $\nu_2(3n+1)$ finitas	17,501 (100%)
Falhas no Teorema 7 (modular)	0
Erro relativo Teorema 8 ($v \leq 8$)	$< 0{,}05\%$
Falhas no Teorema 9	0
Falhas no Teorema 10	0
Falhas no Teorema 12	0
f_1 (fração $V_i = 1$) máximo observado	0,644

Table 3: Verificação computacional das identidades estruturais.

Esta seção apresenta a contribuição filosófica central do trabalho: um princípio estrutural que, se aceito como axioma, resolveria a Conjectura de Collatz por construção. Reconhecemos que a aceitação ou não deste princípio é decisão da comunidade matemática, não consequência da nossa formulação. Nossa proposta é articular o princípio com clareza suficiente para que sua avaliação seja possível.

A intuição subjacente é simples: matemáticos aceitam, sem demonstração formal, que regras geradoras simples como "começar em 0 e somar 1" geram todos os números naturais. Esta aceitação é convencional, ancorada em axiomas (Peano). O Princípio que apresentamos pergunta se uma aceitação análoga é cabível para outras regras geradoras que satisfaçam condições estruturais explícitas —— condições que, no caso de Collatz reverso, são empiricamente verificadas em escala massiva.

7 Proposta Ontológica

7.1 Enunciado do princípio

Princípio 16 (Geração livre sem obstrução)**.** Sejam X um conjunto enumerável infinito definido axiomaticamente sem referência circular à regra R ou seu complemento, e $R : X \to \mathcal{P}(X)$ uma regra geradora multivalorada determinística com $x_0 \in X$. Suponha:

1. Cada aplicação de R produz elementos em X com coordenadas inteiras exatas em todas as dimensões algébricas naturais;
2. Não existe propriedade aritmética derivável de tais coordenadas que exclua qualquer $x \in X$ específico do fecho;
3. As dimensões coordenadoras são todas independentemente infinitas;
4. A taxa de crescimento da árvore $R^d(x_0)$ é assintoticamente positiva ($\Omega(c^d)$, $c > 1$).

Sob estas condições, o fecho $\bigcup_{d\geq 0} R^d(x_0) = X$.

7.2 Aplicação à árvore reversa de Collatz

Conjectura 17 (Cobertura tensorial)**.** Aplicando o Princípio 16 a $X = \mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$, $R = T^{-1}$, $x_0 = 1$, todas as condições são verificadas: (1) coordenadas inteiras exatas (Seção 3); (2) ausência empírica de propriedade excludente; (3) dimensões livres infinitas; (4) crescimento $(4/3)^d$ por nível [1]. Sob aceitação do Princípio 16, $\mathcal{A} = \mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$, equivalente à Conjectura de Collatz.

7.3 Argumentos favoráveis ao princípio

(F1) Coincidência com axiomas aceitos. Para $\mathbb{N}$ via Peano e $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ via $\{1, +2\}$, o Princípio 16 reduz-se a tautologias definicionais universalmente aceitas.

(F2) Plenitude estrutural. A matemática frequentemente adota princípios de plenitude (axioma da escolha, princípio do bem-ordenamento). O Princípio 16 é desta família.

(F3) Suporte empírico massivo. A conjectura está verificada em 10^{20} ímpares por Barina [6]; nossas identidades, em 10^9 sem falhas.

(F4) Ausência de mecanismo de exclusão. Investigação sistemática (Seção 6) não identifica propriedade aritmética que selecione subconjunto de ímpares como "fora" do fecho.

(F5) Matemática como filosofia formalizada. Todos os fundamentos matemáticos repousam sobre escolhas filosóficas (axiomas ZFC, lei do terceiro excluído, axioma do infinito). A introdução do Princípio 16 como axioma estrutural é decisão da mesma natureza.

(F6) Equivalência ida-volta. Pela Observação 4, a árvore reversa e a trajetória forward são duas faces da mesma estrutura. Estabelecer cobertura reversa é matematicamente idêntico a estabelecer convergência forward.

(F7) Caráter ontológico legítimo. O Princípio 16 é afirmação ontológica específica —— sobre cobertura de estrutura geradora determinística em $\mathbb{N}$. Princípios deste tipo têm precedente em matemática fundacional: o Axioma do Infinito afirma a existência de conjunto infinito sem necessidade de generalizar para outras estruturas; o Axioma de Pares afirma a existência de $\{a, b\}$ para quaisquer a, b, sem pretender resolver problemas além desta construção; o Axioma de Regularidade exclui conjuntos contendo a si mesmos, com aplicação focal específica. A adoção de axiomas ontológicos não exige aplicabilidade ampla —— exige coerência interna, relevância à estrutura em questão, e iluminação dos objetos descritos. Esta é distinção importante entre princípios fundacionais gerais (Escolha, Indução) e princípios ontológicos específicos: o primeiro tipo organiza vastas porções da matemática; o segundo legitima classes particulares de construções.

7.4 Argumentos cautelares

(C1) Diferença lógica entre definição e teorema. Em Peano, $\mathbb{N}$ é *definido* como fecho. Em Collatz, $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ tem definição independente, e a igualdade com o fecho de T^{-1} é proposição substantiva.

(C2) Geradores podem ter alcances distintos. Cardinalidade $\aleph_0$ não garante alcance idêntico: $\{1, +2\}$ gera ímpares; $\{1, +6\}$ gera apenas $\{1, 7, 13, \ldots\}$.

(C3) Verificação empírica é finita. 10^{20} casos é forte mas não substitui demonstração de impossibilidade de exceção em $\mathbb{N}^+$ inteiro.

(C4) Estatuto formal do princípio. O Princípio 16 não é derivável de ZFC sem hipóteses adicionais. Sua aceitação cabe à comunidade.

7.5 Sobre a objeção do contraexemplo trivial

Argumenta-se que conjuntos como $X = \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$, com regra $R(n) = n + 1$ partindo de 0, refutam princípios geradores: o fecho não inclui n_0, embora todas as condições estruturais aparentem satisfeitas.

A cláusula introdutória do Princípio 16 ("X definido axiomaticamente sem referência circular à regra R ou seu complemento") exclui este contraexemplo, pois $\mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ define-se precisamente por exclusão. Mas observamos um ponto adicional, fundamental:

Esta objeção aplica-se uniformemente a todas as formulações geradoras, incluindo Peano. Considere $X = \mathbb{N} \setminus \{7\}$ com regra $S(n) = n + 1$ partindo de 0: a regra S aplicada iteradamente a partir de 0 não atinge 7 (pois $6 + 1 = 7 \notin X$). A objeção não é específica a Collatz reverso —— é objeção genérica à noção de cobertura por regra geradora.

Aceitamos Peano como tautológica não por demonstração formal de não-existência de tais exclusões, mas por **convenção fundacional**: o conjunto-target é definido pela regra, não testado contra ela. Aplicar critério mais estrito ao caso de Collatz —— exigindo demonstração de cobertura quando para Peano aceita-se por convenção —— constitui assimetria de exigência.

O Princípio 16 propõe tratamento simétrico: regras geradoras determinísticas sobre inteiros, satisfazendo as condições estruturais explícitas (1)–(4), merecem mesma aceitação que princípios geradores convencionais. **Isto não constitui demonstração formal** de cobertura no caso de Collatz —— constitui argumento de coerência fundacional.

7.6 Sobre o caráter ontológico do princípio

Princípios ontológicos —— aqueles que afirmam existência ou cobertura em estruturas matemáticas específicas —— têm precedente legítimo e estabelecido. O Axioma do Infinito em ZFC postula a existência de um conjunto infinito sem necessidade de generalização para outros casos; o Axioma de Pares afirma que para todo a, b existe $\{a, b\}$, com aplicação restrita a uma operação construtiva; o Axioma de Regularidade exclui conjuntos contendo-se a si mesmos, resolvendo paradoxos de auto-referência sem pretender escopo amplo.

A natureza destes axiomas é distinta dos princípios fundacionais gerais (Escolha, Indução, Substituição), que organizam estruturas amplas da matemática. Os ontológicos legitimam *classes específicas de objetos ou construções*, e sua adoção é justificada por:

- Coerência com o sistema axiomático adotado;
- Relevância à estrutura matemática descrita;
- Iluminação conceitual dos objetos legitimados;
- Ausência de contradição com axiomas estabelecidos.

O Princípio 16 é desta natureza ontológica: afirmação sobre cobertura de estruturas geradoras determinísticas em $\mathbb{N}$. A aplicação central é a árvore reversa de Collatz; outras aplicações (e.g., generalizações para mapas $ax + b$ específicos) são linhas de investigação possíveis, mas a legitimidade do princípio não depende de aplicabilidade ampla. Como o Axioma do Infinito não precisa resolver outros problemas além de legitimar conjuntos infinitos, o Princípio 16 não precisa resolver outros problemas além de legitimar a cobertura de estruturas geradoras que satisfaçam suas condições estruturais.

A analogia apropriada para avaliar este princípio é com axiomas ontológicos específicos —— não com princípios fundacionais gerais. A pergunta correta não é "este princípio organiza vastas áreas da matemática?", mas sim "este princípio é coerente, relevante e ilumina a estrutura que descreve?". Argumentamos que a resposta a esta segunda pergunta é afirmativa.

Adicionalmente, a leitura via fatoração canônica (Subseção 3.6) refina o estatuto do Princípio 16. O princípio não está propondo aceitação genérica de qualquer estrutura geradora —— está propondo aceitação de estruturas geradoras cujas dimensões correspondem à *fatoração canônica completa* do problema target em coordenadas algebricamente distintas (locais, globais, relacionais). Esta especificação adicional torna o princípio mais preciso: não é apelo a plenitude estrutural genérica, mas afirmação de que *quando a fatoração canônica é completa e seus geradores são ontológicos, a cobertura segue.*

A aplicação a Collatz é então: os 8 geradores da matriz tensorial constituem fatoração canônica de $\mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$ em coordenadas algebricamente distintas, todas ontológicas (dependentes apenas de inteiros). Sob aceitação do Princípio 16 refinado, segue $\mathcal{A} = \mathbb{N}^+_{\text{ímpar}}$.

7.7 Estatuto formal e avaliação

A Conjectura 17 é *logicamente equivalente* à Conjectura de Collatz original. O Princípio 16 oferece reformulação cujo conteúdo equivale a:

> *Estruturas geradoras infinitas determinísticas em espaços enumeráveis multi-dimensionais, definidas axiomaticamente sem circularidade, sem mecanismos identificáveis de exclusão, cobrem o espaço target.*

A proposição é compatível com ZFC, não-circular, e tem suporte empírico extensivo. Sua adoção como axioma estrutural é decisão filosófica análoga à adoção do Princípio de Plenitude em metafísica modal ou da genericidade de Baire em análise. **A avaliação formal cabe à comunidade matemática.**

8 Discussão

8.1 Contribuições do trabalho

1. **Arquitetura tensorial 8D unificada**: organização de coordenadas algébricas e dinâmicas conhecidas em estrutura coerente (a novidade é o mosaico, não os tijolos).

2. **Interpretação como fatoração canônica**: leitura da matriz 8D como fatoração trivial do problema forward de Collatz em coordenadas locais (aritméticas estáticas), globais (dinâmicas iterativas) e relacional (combinatória), com geradores derivados ontologicamente (Subseção 3.6).

3. **Identidades sistematizadas** (Teoremas 7–12): apresentação articulada com posicionamento histórico (Seção 4.6).

4. **Equivalência forward-reversa explícita** (Proposição 6): formaliza que a árvore reversa e a trajetória forward são duas faces do mesmo grafo.

5. **Comparação sistemática** com geradores aceitos (Peano, +2, fatorização), identificando o racional estrutural compartilhado.

6. **Proposta ontológica formalizada** (Princípio 16): proposição matemática avaliável, com argumentos favoráveis e cautelares explícitos.

7. **Argumento de simetria fundacional** (Seção 7.5): observação de que objeções genéricas aplicam-se uniformemente a todas formulações geradoras.

8. **Redução estrutural** (Corolário 11): reduz Collatz a ímpares não-mult-3 via foliação tensorial.

9. **Posicionamento ontológico do princípio** (Seção 7.6): articulação do Princípio 16 como axioma ontológico específico —— análogo aos Axiomas de Infinito, Pares e Regularidade em ZFC —— cuja legitimidade depende de coerência e relevância, não de aplicabilidade ampla.

8.2 O que este trabalho *não* estabelece

- A Conjectura de Collatz *não* é demonstrada por argumento formal convencional;
- As identidades estruturais são propriedades aritméticas demonstradas; sua relação com a cobertura completa depende da avaliação do Princípio 16, que cabe à comunidade matemática;
- A verificação computacional, embora extensiva, é finita;
- O Princípio 16 é proposta cuja avaliação cabe à comunidade;
- A passagem de "ausência empírica de obstrução" para "ausência logicamente necessária" permanece em discussão.

8.3 Direções futuras

1. Investigar derivação do Princípio 16 a partir de extensões axiomáticas ou teorias estruturais (HoTT, teoria de categorias);
2. Conexões entre o tensor 8D e estruturas algébricas conhecidas (formas modulares, L-funções);
3. Aplicar a foliação ν_3 ao estudo restrito de ímpares não-múltiplos de 3;
4. Investigar se a fração assintótica f_1 é uniformemente limitada por $(3 - \log_2 3)/2 \approx 0{,}708$;
5. Generalização do Princípio 16 para outros sistemas dinâmicos sobre $\mathbb{N}$.

9 Conclusão

Apresentamos uma reformulação tensorial multi-dimensional da árvore reversa de Collatz cuja contribuição central é *arquitetural*: a organização de identidades algébricas e dinâmicas conhecidas como coordenadas independentes de uma estrutura tensorial unificada em $\mathbb{Z}^8$. A simplicidade da formulação é deliberada e metodológica.

A proposta ontológica (Princípio 16) situa a Conjectura de Collatz no contexto de princípios geradores universalmente aceitos para estruturas matemáticas fundamentais (Peano, sucessão +2, fatorização). Argumentamos por simetria fundacional: o racional estrutural subjacente —— geração determinística sobre inteiros em dimensões livres sem obstrução —— é compartilhado com formas de geração matemática já adotadas tacitamente.

Não afirmamos prova: a transição entre ausência empírica de obstrução e ausência logicamente necessária permanece em discussão. Cabe à comunidade matemática avaliar se o Princípio 16 merece estatuto axiomático análogo aos princípios geradores já aceitos, ou se a assimetria de exigência entre Peano e Collatz reflete distinção logicamente fundamental.

10 Considerações epistemológicas

Encerramos com observação sobre a natureza do conhecimento matemático e o lugar deste trabalho em sua construção.

Frege passou décadas formalizando proposições aparentemente elementares como $1 + 1 = 2$ em *Begriffsschrift* (1879) e *Grundgesetze der Arithmetik* (1893, 1903). Whitehead e Russell precisaram de centenas de páginas no *Principia Mathematica* (1910–1913) para chegar formalmente à mesma proposição. Wiles apresentou sua demonstração do Último Teorema de Fermat à comunidade duas vezes —— a primeira tentativa em 1993 continha lacuna que requereu colaboração com Richard Taylor para ser completada em 1995.

A matemática não é descoberta de verdades pré-existentes flutuando no éter platônico. **É construção comunal validada por consenso disciplinado.** O que aceitamos como "provado" é o que a comunidade matemática, após escrutínio rigoroso e diálogo persistente, aceita como prova. Esta característica não é falha do empreendimento matemático —— é o que o legitima como conhecimento robusto.

Isto tem consequência libertadora: conjecturas não-provadas não são fracassos do esforço investigativo. São *contribuições legítimas em curso de avaliação.* Toda formulação matemática começa como proposta submetida ao escrutínio coletivo; algumas são aceitas, outras refinadas, outras descartadas, e o conjunto de tudo isso constitui o avanço da disciplina.

Apresentamos este trabalho neste espírito. Não afirmamos resolução. Oferecemos arcabouço estrutural, identidades organizadas, princípio ontológico bem-formulado —— tudo aberto à crítica, ao refinamento, à eventual rejeição se for o caso. Se algum elemento aqui apresentado contribuir, mesmo modestamente, para o entendimento ou eventual resolução da Conjectura de

Collatz, o trabalho terá cumprido sua função no processo comunal de construção do conhecimento matemático.

A Demonstração Ilustrativa do Mecanismo via Sistemas Análogos

A.1 Por que apresentar sistemas análogos

A formulação tensorial 8D apresentada neste artigo poderia ser percebida como construção desenhada especificamente para o problema de Collatz —— crítica conhecida em matemática como a acusação de método *ad hoc*. Para responder antecipadamente a esta objeção, aplicamos a metodologia a três sistemas dinâmicos análogos sobre $\mathbb{N}^+$.

Mais importante que as conclusões em si, este apêndice procura tornar transparente o *processo metodológico*: como, partindo de uma função iterativa qualquer sobre inteiros, chegamos à matriz tensorial canônica daquele sistema. Esta transparência tem duplo propósito —— demonstra que a metodologia é replicável (não dependente de intuições específicas a Collatz), e torna o argumento acessível também a leitores não necessariamente formados em teoria de números.

A dimensionalidade da matriz é determinada pelo sistema, não escolhida *a priori*. Cada sistema dinâmico tem sua própria dimensionalidade canônica conforme a complexidade aritmética de suas operações. Em Collatz são 8 dimensões. Outros sistemas viverão em 6D, 7D, ou outras dimensões conforme suas estruturas.

Em linguagem mais acessível: pode-se pensar nas dimensões como *aspectos extraíveis* do sistema —— informações que conseguimos derivar de cada inteiro n sem ambiguidade. Sistemas mais simples têm menos aspectos a extrair; sistemas mais complexos têm mais. A questão não é "quantos aspectos", mas "todos os aspectos necessários para capturar a estrutura completa".

A.2 O processo metodológico: como chegar à matriz

Antes de aplicar a três exemplos, articulamos o processo geral. Dado um sistema dinâmico $T : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, a construção da matriz tensorial canônica procede em quatro passos:

Passo 1 — Inventário das operações. Identificamos quais operações aritméticas T envolve. Por exemplo, Collatz envolve multiplicação por 3, soma de 1 e divisão por 2. Cada operação introduz potencial relevância de uma valoração ou estrutura modular específica.

Passo 2 — Identificação das coordenadas locais. Coordenadas locais são funções de n computáveis por inspeção aritmética direta, sem necessidade de iterar T. Tipicamente:

- n em si (sempre presente —— é o ponto inicial);
- Valorações p-ádicas relevantes às operações (ν_2, ν_3, etc.);
- Estrutura modular específica (e.g., $\nu_2(3n + 1)$ em Collatz, capturando "quantas divisões por 2 seguem operação ímpar");
- Estrutura primal de n ($p_{\min}(n)$), se relevante à dinâmica.

Passo 3 — Identificação das coordenadas globais. Coordenadas globais requerem iterar T para serem determinadas. Tipicamente:

- $\sigma(n)$ —— comprimento da trajetória até atingir o ponto-fixo (se atinge);
- $q(n)$ —— número de operações "não-triviais" (no caso de Collatz, operações ímpar);
- $P_{\max}(n)$ —— máximo da trajetória, se for dimensão independente.

Passo 4 — Coordenada relacional. Sempre presente: $\mathrm{freq}(n)$, contando quantos outros inteiros têm n em suas trajetórias.

A dimensionalidade total é determinada por quais coordenadas são genuinamente independentes para o sistema específico. Para Collatz, todas são independentes —— 8D. Para sistemas mais simples, algumas tornam-se trivialmente derivadas das demais —— 6D ou 7D.

Este processo é mecânico e replicável —— qualquer pesquisador pode aplicá-lo a qualquer sistema dinâmico sobre $\mathbb{N}$.

A.3 Exemplo 1 — Sistema T_2: convergente em 6D

Definição e intuição

Consideremos o sistema mais simples possível com regra dependente de paridade:

$$T_2(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ par,} \\ n+1 & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{9}$$

Intuitivamente: se par, divida por 2; se ímpar, some 1.

Aplicação do processo metodológico

Passo 1 — Inventário. T_2 envolve apenas duas operações: divisão por 2 e adição de 1. Não há multiplicação por 3 nem operações que envolvam estrutura primal complexa.

Passo 2 — Coordenadas locais.

- n —— sempre presente.
- $\nu_2(n)$ —— relevante (a paridade decide a operação).
- $\nu_2(n+1)$ —— necessária: após operação $+1$ (em n ímpar), $n+1$ é par, e $\nu_2(n+1)$ determina precisamente quantas divisões seguem.
- $\nu_3(n)$? Irrelevante (sistema não envolve fator 3).
- $p_{\min}(n)$? Redundante: "$p_{\min}(n) = 2$" equivale a "n par", já capturado por $\nu_2(n) > 0$.

Total local: 3.

Passo 3 — Coordenadas globais.

- $\sigma_2(n)$, $q_2(n)$ —— necessárias.
- $P_{\max,2}(n)$ —— vamos verificar: para n par, $T_2(n) < n$; para n ímpar, $T_2(n) = n+1 > n$ é o pico imediato, e em seguida a trajetória só decresce. Portanto $P_{\max,2}(n)$ é função determinística simples ($n+1$ se ímpar, n se par). Não é dimensão independente.

Total global: 2.

Passo 4 — Relacional: $\mathrm{freq}_2(n)$. Total: 1.

Total: 6 dimensões. Matriz canônica:

$$\mathbf{x}_2(n) = \big(n,\, \nu_2(n),\, \nu_2(n+1),\, \sigma_2(n),\, q_2(n),\, \mathrm{freq}_2(n)\big) \in \mathbb{Z}^6. \tag{10}$$

A matriz é mais econômica que a de Collatz porque o sistema é estruturalmente mais simples.

Demonstração de cobertura

Teorema 18 (Cobertura completa de T_2)**.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}^+$*, existe* $d \geq 0$ *tal que* $T_2^d(n) = 1$.

Proof. Indução forte sobre n.

Caso base: $n = 1$, trivial.

Passo: suponha o resultado para todo $m < n$, com $n \geq 2$.

- n par: $T_2(n) = n/2 < n$. Hipótese de indução conclui.
- n ímpar (logo $n \geq 3$): $T_2(n) = n + 1$ é par, então $T_2^2(n) = (n + 1)/2$. Para $n \geq 3$, $(n + 1)/2 < n$. Hipótese de indução conclui.

□

O que este exemplo ensina

A metodologia tensorial 6D, aplicada a T_2, identifica corretamente um caso de cobertura completa. A demonstração (Teorema 18) é independente do Princípio 16 —— procede por indução clássica. Em linguagem mais acessível: T_2 é o "caso fácil". Sabemos que sempre converge a 1 (a prova é elementar), e a metodologia tensorial concorda com isso. O valor pedagógico é mostrar que chegar à matriz é processo mecânico, não invenção *ad hoc*.

A.4 Exemplo 2 — Sistema T_3' $(3n - 1)$: falha demonstrável em 7D

Definição

$$T_3'(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ par,} \\ (3n-1)/2 & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{11}$$

Este é o conhecido "problema $3n - 1$", primo dinâmico do Collatz, estudado em [3].

Aplicação do processo metodológico

Passo 1 — Inventário. Multiplicação por 3, subtração de 1, divisão por 2. Crucial: envolve fator 3.

Passo 2 — Coordenadas locais.

- n.
- $\nu_3(n)$ —— relevante. Verificamos: para n ímpar, $3n - 1 \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$, nunca múltiplo de 3. Análoga à foliação de Collatz: após primeira operação ímpar, $\nu_3 = 0$ permanente. Estruturalmente necessária.
- $\nu_2(3n-1)$ —— necessária: para n ímpar, $3n-1$ é par, e a valoração 2-ádica determina quantas divisões seguem.
- $\nu_2(n)$? Já capturada pela paridade.
- $p_{\min}(n)$? Sem operação dependente da fatoração primal além do que ν_3 captura. Dispensável.

Total local: 3.

Passo 3 — Coordenadas globais.

- $\sigma_{3'}(n)$, $q_{3'}(n)$ —— necessárias.
- $P_{\max,3'}(n)$ —— para n ímpar, $(3n - 1)/2 \approx 3n/2 > n$. O pico cresce e não é determinístico em coordenadas locais. Dimensão independente.

Total global: 3.
Passo 4 — Relacional: $\text{freq}_{3'}(n)$. Total: 1.
Total: 7 dimensões.

$$\mathbf{x}_{3'}(n) = \big(n,\, \nu_3(n),\, \nu_2(3n-1),\, \sigma_{3'}(n),\, q_{3'}(n),\, P_{\max,3'}(n),\, \text{freq}_{3'}(n)\big) \in \mathbb{Z}^7. \tag{12}$$

A diferença em relação a Collatz (8D) é a ausência de $p_{\min}$ como dimensão independente.

Falha demonstrável: ciclo não-trivial

Diferentemente de T_2 (cobertura demonstrada) e Collatz (cobertura conjecturada), T_3' tem falha demonstrável:

Proposição 19 (Ciclo não-trivial em T_3')**.** *O conjunto* $\{5, 7, 10\}$ *forma ciclo periódico sob* T_3'.

Proof. Cálculo direto:

$$T_3'(5) = (15-1)/2 = 7, \quad T_3'(7) = (21-1)/2 = 10, \quad T_3'(10) = 10/2 = 5. \qquad \square$$

Corolário 20 (Falha de cobertura em T_3')**.** $\mathcal{A}_{3'} \subsetneq \mathbb{N}^+$. *Em particular,* $5, 7, 10 \notin \mathcal{A}_{3'}$.

O que este exemplo ensina sobre o Princípio 16

Aplicação a T_3':

- (i) Coordenadas inteiras exatas: ✓
- (ii) Ausência de mecanismo de exclusão: **falha verificavelmente** (ciclo $\{5, 7, 10\}$).
- (iii) Dimensões livres infinitas: ✓
- (iv) Crescimento positivo: ✓

A condição (ii) falha de modo identificável: o ciclo é mecanismo estrutural de exclusão observável, não fenômeno empiricamente ausente como em Collatz.

Lição estrutural: o Princípio 16 não é tautologia disfarçada. Pode falhar em sistemas reais; quando falha, o motivo é estruturalmente identificável. Em linguagem mais acessível: T_3' é o "caso onde falha". A metodologia tensorial não conclui que T_3' tem cobertura completa —— pelo contrário, identifica corretamente que ela falha, porque encontra o mecanismo (o ciclo). Isto demonstra que a metodologia *discrimina* casos: não é máquina que sempre diz "sim".

A.5 Exemplo 3 — Sistema T_B: estrutura binária elegante em 6D

Motivação

Apresentamos como terceiro exemplo um sistema cuja análise ilumina ressonância profunda entre dinâmica iterativa e a estrutura binária dos inteiros. Não é caso conhecido na literatura clássica de Collatz —— é construção pedagógica deste apêndice, escolhida pela elegância das fórmulas fechadas que admite.

Definição

Para $n \in \mathbb{N}^+$, denote $\lfloor \log_2 n \rfloor$ o expoente da maior potência de 2 que não excede n:

$$T_B(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ par}, \\ n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} & \text{se } n \text{ ímpar e } n > 1, \\ 1 & \text{se } n = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Em palavras: se n é par, divida por 2; se n é ímpar maior que 1, subtraia a maior potência de 2 menor que n.

Em representação binária, a operação é particularmente simples:

- Operação par: deslocamento à direita (descarta o bit 0 do final).
- Operação ímpar: remoção do bit 1 mais à esquerda.

Por exemplo, $11 = 1011_2$. Como ímpar, $T_B(11) = 11 - 8 = 3 = 11_2$ —— literalmente removemos o "1" inicial.

Aplicação do processo metodológico

Passo 1 — Inventário. Divisão por 2 e subtração de potência de 2. Estrutura aritmética envolvida: representação binária diretamente.

Passo 2 — Coordenadas locais.

- n.
- $\nu_2(n)$ —— relevante (paridade determina a operação).
- $\nu_2(n+1)$? Não. Diferente de T_2, a operação ímpar aqui não envolve $n+1$.
- $s_2(n)$ —— soma dos dígitos binários (popcount, peso de Hamming). Esta é a dimensão local nova e necessária: a operação ímpar remove um bit "1", então a quantidade de bits "1" é informação estrutural fundamental.
- $\nu_3(n)$? Irrelevante.
- $p_{\min}(n)$? Irrelevante.

Total local: 3.

Passo 3 — Coordenadas globais.

- $\sigma_B(n)$, $q_B(n)$ —— necessárias.
- $P_{\max,B}(n)$ —— a trajetória de T_B é monotonicamente decrescente: cada operação reduz n estritamente. Portanto $P_{\max,B}(n) = n$ trivialmente. Não é dimensão independente.

Total global: 2.

Passo 4 — Relacional: $\mathrm{freq}_B(n)$. Total: 1.

Total: 6 dimensões.

$$\mathbf{x}_B(n) = \big(n,\, \nu_2(n),\, s_2(n),\, \sigma_B(n),\, q_B(n),\, \mathrm{freq}_B(n)\big) \in \mathbb{Z}^6. \tag{14}$$

Note como esta 6D difere da 6D de T_2: ambos têm 6 dimensões, mas as coordenadas locais "intermediárias" são distintas ($\nu_2(n+1)$ em T_2, $s_2(n)$ em T_B). A matemática é exata: cada sistema tem suas dimensões canônicas próprias.

Cobertura com fórmulas fechadas

Teorema 21 (Cobertura de T_B com forma fechada)**.** *Para todo $n \in \mathbb{N}^+$:*

1. $T_B^d(n) = 1$ *para algum $d \geq 0$ finito;*
2. $\sigma_B(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$*;*
3. $q_B(n) = s_2(n) - 1$*;*

4. $P_{\max,B}(n) = n$.

Proof. Seja $n = (b_k b_{k-1} \cdots b_0)_2$ a representação binária com $b_k = 1$. Cada operação remove exatamente um bit:

- Operação /2 (quando $b_0 = 0$): remove b_0.
- Operação ímpar (quando $b_0 = 1$): remove b_k.

Partindo de n com $k+1$ bits, atingimos 1 (representação 1_2, um único bit) após exatamente k remoções. Portanto $\sigma_B(n) = k = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Das k remoções, exatamente $s_2(n) - 1$ são operações ímpar (uma para cada bit "1" exceto o final que sobra como $n = 1$). Portanto $q_B(n) = s_2(n) - 1$.

A monotonicidade da trajetória garante $P_{\max,B}(n) = n$. □

Elegância matemática

A árvore reversa T_B^{-1} tem estrutura igualmente bela. Partindo de 1, cada operação inversa adiciona um bit:

- Inversa de /2: duplica n, adicionando "0" à direita.
- Inversa de operação ímpar: adiciona "1" à esquerda do bit mais alto.

Após k níveis, a árvore contém exatamente todos os inteiros com $k+1$ bits ou menos, isto é, $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{k+1} - 1\}$.

Em linguagem mais acessível: a árvore reversa de T_B é, literalmente, uma árvore binária que gera todos os números bit a bit, na ordem natural da representação binária. Em cada nível, dobra-se o número de inteiros cobertos. Esta correspondência exata entre profundidade da árvore e magnitude binária dos inteiros é manifestação geométrica da unidade entre dinâmica iterativa e estrutura aritmética dos inteiros.

O que este exemplo ensina

T_B ilustra três propriedades do método:

1. A dimensionalidade reflete a estrutura específica do sistema —— mesmo dois sistemas 6D podem ter coordenadas locais distintas conforme a aritmética envolvida.
2. Sistemas dinâmicos podem admitir formas fechadas exatas —— T_B é caso onde toda a informação dinâmica reduz-se a fórmulas em coordenadas locais.
3. Existe ressonância profunda entre dinâmica e aritmética —— a estrutura binária dos inteiros e a árvore reversa de T_B são literalmente o mesmo objeto, em representações distintas.

A.6 Síntese comparativa

A.7 Implicações para o caso Collatz

Posicionando Collatz no quadro:

- **Como em T_2 e T_B:** condições (i), (iii), (iv) verificam-se diretamente; cobertura empírica é massiva ($n \leq 2{,}95 \times 10^{20}$ [6]).
- **Diferentemente de T_2 e T_B:** demonstração formal de cobertura permanece em aberto.
- **Diferentemente de T_3':** nenhum mecanismo identificável de exclusão foi encontrado em décadas de investigação.

Sistema	Operação ímpar	Dim.	Cobertura	Por quê
T_B (binário)	$n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$	6D	Demonstrada	Forma fechada
T_2 $(n+1)$	$n+1$	6D	Demonstrada	Indução simples
T'_3 $(3n-1)$	$(3n-1)/2$	7D	**Falha**	Ciclo $\{5, 7, 10\}$
Collatz $(3n+1)$	$(3n+1)/2$	8D	Conjecturada	Sem ciclos não-triviais conhecidos

Table 4: Comparação dos sistemas tratados neste apêndice. A metodologia tensorial é dimensão-adaptativa e estruturalmente discriminante.

A condição (ii) —— ausência de mecanismo de exclusão —— é o ponto onde Collatz se separa dos outros casos. Em T_2 e T_B, é demonstrada. Em T'_3, falha demonstravelmente. Em Collatz, é empiricamente verificada em escala massiva mas não formalmente estabelecida.

Esta lacuna é precisamente o conteúdo do Princípio 16 quando aplicado a Collatz: ele propõe que ausência empírica massivamente verificada constitui evidência estrutural suficiente, sem prova formal de impossibilidade. A questão filosófica é se este tipo de evidência —— que aceitamos rotineiramente para princípios geradores como Peano —— deve ser aceita também para Collatz, dado que o sistema satisfaz as demais condições estruturais.

A.8 Conclusão do apêndice

Os três exemplos confirmam:

1. A metodologia é dimensão-adaptativa (6D, 6D, 7D, 8D conforme o sistema);
2. O processo de chegar à matriz é mecânico e replicável —— qualquer pesquisador pode aplicá-lo;
3. Os geradores são sempre ontológicos (operações aritméticas elementares sobre inteiros);
4. O Princípio 16 distingue verificavelmente casos de cobertura e casos de falha;
5. Collatz ocupa posição intermediária estruturalmente articulável.

A metodologia, portanto, não é construção *ad hoc* para Collatz —— produz teoremas demonstráveis em T_2 e T_B, identifica corretamente a falha em T'_3, e situa Collatz em quadro estruturalmente coerente onde a única condição não-formalmente-estabelecida é precisamente aquela que constitui a Conjectura.

Agradecimentos

O autor agradece a Deus, a sua família e a seus amigos.

References

[1] Lagarias, J. C. (1985). The $3x + 1$ problem and its generalizations. *The American Mathematical Monthly*, 92(1):3–23.

[2] Lagarias, J. C. (1990). The set of rational cycles for the $3x + 1$ problem. *Acta Arithmetica*, 56(1):33–53.

[3] Lagarias, J. C. (Ed.) (2010). *The Ultimate Challenge: The $3x + 1$ Problem.* American Mathematical Society.

[4] Terras, R. (1976). A stopping time problem on the positive integers. *Acta Arithmetica*, 30:241–252.

[5] Tao, T. (2022). Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. *Forum of Mathematics, Pi*, 10:e12.

[6] Barina, D. (2020). Convergence verification of the Collatz problem. *The Journal of Supercomputing*, 77:2681–2688.

[7] Krasikov, I. (1989). How many numbers satisfy the $3x+1$ conjecture? *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 12(4):791–796.

[8] Wirsching, G. J. (1998). *The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1681. Springer.

[9] Conway, J. H. (1972). Unpredictable iterations. In *Proceedings of the Number Theory Conference*, University of Colorado, pp. 49–52.

[10] Sinai, Y. G. (2003). Statistical $(3x + 1)$ problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 56(7):1016–1028.

[11] Kontorovich, A., Lagarias, J. C. (2010). Stochastic models for the $3x+1$ and $5x+1$ problems and related problems. In [3], pp. 131–188.

[12] Garner, L. E. (1981). On the Collatz $3n + 1$ algorithm. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82(1):19–22.

[13] Eliahou, S. (1993). The $3x + 1$ problem: New lower bounds on nontrivial cycle lengths. *Discrete Mathematics*, 118(1-3):45–56.