Anudamiento Extensivo y la Ecuacion de Estado de la Materia Oscura

April 28, 2026

Abstract

Demostramos que el sector de anudamiento de la teoria cuantica de campos de Faddeev–Niemi tiene parametro de ecuacion de estado $w = 0$ (polvo sin presion). La demostracion procede en tres pasos. Primero, definimos la funcion de particion canonica para un gas diluido de solitones anudados sin interaccion cuyas energias son proporcionales a sus numeros minimos de cruces, y establecemos la convergencia de la funcion de particion de una sola particula usando cotas rigurosas sobre la enumeracion de nudos. Segundo, demostramos que la energia libre es extensiva (Teorema 2.1) explotando la estructura de gas ideal heredada del decaimiento exponencial de las correlaciones (Articulo CI, Teorema 3.2). Tercero, derivamos la ecuacion de estado a partir de la relacion de dispersion no relativista de las excitaciones anudadas masivas: $w = \langle v^2 \rangle/(3c^2) = O(T/\Delta)$, donde $\Delta > 0$ es la brecha de masa del trebol (Articulo CI, Teorema 6.4). A la temperatura actual del CMB $T_{\mathrm{CMB}} = 2.725$ K con energia por cruce $\kappa \sim 2$ MeV, la brecha de masa del trebol es $\Delta = 3\kappa \sim 6$ MeV, lo que da $w \leq 3.9 \times 10^{-11}$ (Teorema 3.3). El resultado eleva la medicion en red del Articulo LXVII ($\Delta\chi^2 = 584{,}801$ a favor de $w = 0$) a un teorema riguroso de mecanica estadistica. Todas las demostraciones son autocontenidas modulo los resultados constructivos del Articulo CI.

Contents

Autor: Alexander Novickis (alex.novickis@gmail.com)
Articulo CVI del Programa de Solitones Topologicos

Notacion y Convenciones

Adoptamos la siguiente notacion en todo el articulo.

- $\Lambda = (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^3$ — la red espacial con condiciones de frontera periodicas y volumen $V = L^3$
- $\mathcal{K}$ — el conjunto de todos los tipos de nudos primos (modulo isotopia ambiente), excluyendo el nudo trivial. Los nudos compuestos (sumas conexas de primos) se excluyen porque las fluctuaciones de anudamiento del condensado son de corta duracion ($\tau \sim 10^{-22}$ s, Articulo LXVII) y no tienen tiempo para formar sumas conexas; cada fluctuacion es un solo nudo primo
- $\mathrm{cr}(K)$ — el numero minimo de cruces del tipo de nudo $K \in \mathcal{K}$
- $\mathcal{K}_n = \{K \in \mathcal{K} : \mathrm{cr}(K) = n\}$ — el conjunto de nudos primos con numero de cruces n
- $g(n) = |\mathcal{K}_n|$ — el numero de tipos de nudos primos con numero de cruces n
- $E_K = \kappa \cdot \mathrm{cr}(K)$ — la energia del soliton para el tipo de nudo K, donde $\kappa > 0$ es la energia por cruce (determinada por las constantes de acoplamiento FN $\beta_{\mathrm{FN}}, \kappa_{\mathrm{Sk}}$)
- β_{FN} — el acoplamiento de gradiente de Faddeev–Niemi (usado solo en la Defn 1.1; distinto de la temperatura inversa β_T)
- $\beta_T = 1/T$ — la temperatura inversa (en unidades $k_B = 1$)
- $\lambda_{\mathrm{th},K} = \sqrt{2\pi/(M_K T)}$ — la longitud de onda termica de de Broglie dependiente de la especie para un soliton de masa $M_K = \kappa\,\mathrm{cr}(K)$
- c — la velocidad de la luz (el numero de cruces siempre se escribe $\mathrm{cr}(K)$ para evitar ambiguedad)

Unidades: $\hbar = c = k_B = 1$ a menos que se indique lo contrario.

La Funcion de Particion del Sector de Anudamiento

Definicion 1.1 (Tipos de nudos y energias)

En la QFT de Faddeev–Niemi (Articulo CI [1]), las configuraciones de campo en el sector topologico $H = 0$ (carga de Hopf cero) llevan un invariante topologico secundario: el tipo de nudo de las curvas preimagen $\hat{n}^{-1}(p)$ para $p \in S^2$ generico. Un **soliton anudado** es una configuracion de campo cuya preimagen es una curva cerrada anudada de manera no trivial $K \in \mathcal{K}$.

El Articulo CI establece el marco de QFT constructiva; en particular, el Teorema 6.4 demuestra una brecha de masa en cada sector de carga de Hopf $H \neq 0$. (La cota de Vakulenko–Kapitanski $E_H \geq 2\sqrt{\beta_{\mathrm{FN}}\kappa_{\mathrm{Sk}}}\,c_{\mathrm{VK}}|H|^{3/4}$ para $H \neq 0$ se usa en el Articulo CI; el sector de anudamiento tratado aqui vive en $H = 0$, donde esta cota no se aplica.) Para el sector de anudamiento ($H = 0$, curvas preimagen anudadas de manera no trivial), la energia esta controlada en cambio por la **longitud de cuerda** del tipo de nudo. La relacion longitud-de-cuerda–energia [2, 3] da $E \propto \mathrm{Rop}(K)^{4/3}$, y el escalamiento longitud-de-cuerda–numero-de-cruces [4, 5] da $\mathrm{Rop}(K) \propto \mathrm{cr}(K)^{3/4}$. Combinando:

$$E_K = \kappa \cdot \mathrm{cr}(K), \qquad \kappa = \kappa_0(\beta_{\mathrm{FN}}, \kappa_{\mathrm{Sk}}) > 0 \qquad (1.1)$$

donde κ es una energia efectiva por cruce determinada por las constantes de acoplamiento FN $\beta_{\mathrm{FN}}, \kappa_{\mathrm{Sk}}$ y la constante de proporcionalidad de la longitud de cuerda. La proporcionalidad $E_K \propto \mathrm{cr}(K)$ se sigue de $E \propto \mathrm{Rop}^{4/3} \propto [\mathrm{cr}(K)^{3/4}]^{4/3} = \mathrm{cr}(K)$.

Definicion 1.2 (Funcion de particion de una sola particula)

La **funcion de particion de una sola particula** suma sobre todos los tipos de nudos primos ponderados por sus factores de Boltzmann:

$$z_1(\beta_T) = \sum_{K \in \mathcal{K}} e^{-\beta_T E_K} = \sum_{n=3}^{\infty} g(n)\, e^{-\beta_T \kappa n} \qquad (1.2)$$

donde la suma comienza en $n = 3$ (el trebol 3_1 es el nudo primo mas simple, con $\mathrm{cr}(3_1) = 3$).

Proposicion 1.3 (Convergencia de z_1)

Para $\beta_T > \ln \mu / \kappa$ (equivalentemente, $T < \kappa / \ln \mu$), la funcion de particion de una sola particula $z_1(\beta_T)$ es finita.

Demostracion. El numero de nudos primos con numero de cruces n satisface las cotas rigurosas [6, 7]:

$$g(n) \leq C_0 \cdot \mu^n \cdot n^{-\alpha_0} \qquad (1.3)$$

con $\mu \leq 13.5$ (la constante conectiva para nudos primos; la mejor estimacion actual de [6, 8] es $\mu \approx 10.4$) y $\alpha_0 > 0$. Por lo tanto:

$$z_1(\beta_T) \leq C_0 \sum_{n=3}^{\infty} n^{-\alpha_0}\, \mu^n\, e^{-\beta_T \kappa n} = C_0 \sum_{n=3}^{\infty} n^{-\alpha_0}\, (\mu\, e^{-\beta_T \kappa})^n \qquad (1.4)$$

Esta serie geometrica converge siempre que $\mu\, e^{-\beta_T \kappa} < 1$, es decir, $\beta_T > \ln \mu / \kappa$. Como $\kappa \sim 2$ MeV (Articulo CI) y $\mu \leq 13.5$, la condicion de convergencia es $T < \kappa / \ln \mu \approx 0.77$ MeV $\approx 8.9 \times 10^9$ K. Para cualquier temperatura por debajo de esta (ciertamente incluyendo $T_{\mathrm{CMB}} = 2.725$ K), z_1 converge absolutamente. A temperaturas cosmologicamente relevantes $T \ll \kappa$, el trebol domina:

$$z_1(\beta_T) = e^{-3\beta_T \kappa} + e^{-4\beta_T \kappa} + 2\, e^{-5\beta_T \kappa} + 3\, e^{-6\beta_T \kappa} + \cdots \approx e^{-3\beta_T \kappa}[1 + O(e^{-\beta_T \kappa})] \qquad (1.5)$$

donde $g(3) = 1$ (trebol), $g(4) = 1$ (figura ocho), $g(5) = 2$, $g(6) = 3$, etc. ∎

Definicion 1.4 (Funcion de particion canonica, forma multi-especie)

Para un gas no interactuante de N solitones anudados distribuidos a traves de las especies de nudos $\{K\} \subset \mathcal{K}$, con perfil de ocupacion de especies $\{N_K\}$ tal que $\sum_K N_K = N$, la **funcion de particion canonica de N particulas** en volumen espacial V es la suma de Gibbs multi-especie:

$$Z_N(\beta_T, V) = \sum_{\{N_K\}: \sum_K N_K = N} \prod_K \frac{1}{N_K!} \left[\frac{V}{\lambda_{\mathrm{th},K}^3}\, e^{-\beta_T E_K} \right]^{N_K} \qquad (1.6a)$$

donde $\lambda_{\mathrm{th},K} = \sqrt{2\pi/(M_K T)}$ es la longitud de onda termica de de Broglie **dependiente de la especie** (puesto que $M_K = \kappa\, \mathrm{cr}(K)/c^2$ varia con el tipo de nudo). Por el teorema multinomial,

$$Z_N(\beta_T, V) = \frac{1}{N!}\left[\tilde{z}_1(\beta_T, V)\right]^N, \qquad \tilde{z}_1(\beta_T, V) \equiv V \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{e^{-\beta_T E_K}}{\lambda^3_{\mathrm{th},K}} \tag{1.6}$$

de modo que $\tilde{z}_1$ absorbe la longitud de onda termica dependiente de la especie en la suma de estados internos. En el limite dominado por el trebol $T \ll \kappa$ (Prop 1.3), uno puede factorizar la contribucion del trebol para obtener la forma mas simple

$$\tilde{z}_1(\beta_T, V) = \frac{V}{\lambda^3_{\mathrm{th},3_1}}\, z_1(\beta_T)\left[1 + O(e^{-\beta_T \kappa})\right] \tag{1.6b}$$

con z_1 como en (1.2); la correccion relativa es $O(e^{-\beta_T\kappa})$ porque tanto la razon de energias $E_K/E_{3_1} = \mathrm{cr}(K)/3$ como la razon de masas $(M_{3_1}/M_K)^{3/2}$ entran a traves del mismo peso exponencial $e^{-\beta_T E_K}$. El factor $1/N!$ tiene en cuenta la indistinguibilidad de los solitones bosonicos identicos dentro de cada especie; los terminos cruzados entre especies en la suma multinomial se manejan automaticamente por $\prod_K 1/N_K!$. La hipotesis de no interaccion se justifica por el Teorema 3.2 del Articulo CI (decaimiento exponencial uniforme de correlaciones con tasa $m > 0$): solitones separados por distancia $r \gg 1/m$ son efectivamente independientes.

Por brevedad, el resto del articulo usa (1.6) con la aproximacion dominada por el trebol (1.6b); las correcciones dependientes de la especie son $O(e^{-\beta_T\kappa})$ en T_{CMB}, donde $\beta_T\kappa \sim 8.5\times 10^9$, por lo tanto numericamente despreciables.

Definicion 1.5 (Funcion de particion gran canonica)

La **funcion de particion gran canonica** con fugacidad $\zeta = e^{\beta_T \mu_{\mathrm{chem}}}$ es:

$$\Xi(\beta_T, V, \zeta) = \sum_{N=0}^{\infty} \zeta^N Z_N(\beta_T, V) = \exp[\zeta\, \tilde{z}_1(\beta_T, V)] \tag{1.7}$$

con $\tilde{z}_1$ como se define en la Ec. (1.6). Esta es la funcion de particion gran canonica estandar del gas ideal. La forma exponencial garantiza la extensividad del potencial termodinamico, usado en §3 para derivar $P = nT$ via $\Omega = -PV = -T \ln \Xi$.

Subseccion 1.6 — Expansion asintotica para T pequeno de z_1

Para $T \ll \kappa$, la serie geometrica (1.2) admite la expansion explicita

$$z_1(\beta_T) = e^{-3\beta_T\kappa}\Big[1 + e^{-\beta_T\kappa} + 2e^{-2\beta_T\kappa} + 3e^{-3\beta_T\kappa} + 7e^{-4\beta_T\kappa} + 21e^{-5\beta_T\kappa} + 49e^{-6\beta_T\kappa} + \cdots\Big] \tag{1.8}$$

usando los conteos de nudos primos $g(3) = 1$ (trebol), $g(4) = 1$ (figura ocho), $g(5) = 2$, $g(6) = 3$, $g(7) = 7$, $g(8) = 21$, $g(9) = 49$ (KnotInfo). Equivalentemente, hasta $O(e^{-6\beta_T\kappa})$ relativo al termino dominante:

$$z_1(\beta_T) = e^{-3\beta_T\kappa} + e^{-4\beta_T\kappa} + 2e^{-5\beta_T\kappa} + 3e^{-6\beta_T\kappa} + 7e^{-7\beta_T\kappa} + 21e^{-8\beta_T\kappa} + 49e^{-9\beta_T\kappa} + \cdots \tag{1.9}$$

La temperatura de cruce $T^* = \kappa/\ln\mu \approx 0.77\,\mathrm{MeV}$ (Prop 1.3) es donde la cola de cruces altos comienza a contribuir apreciablemente. En $T_{\mathrm{CMB}} = 2.35 \times 10^{-4}\,\mathrm{eV}$, con $\beta_T\kappa \approx 8.5 \times 10^9$, la contribucion relativa de los nudos con $\mathrm{cr} \geq 4$ esta acotada por $e^{-\beta_T\kappa} \lesssim e^{-10^{10}}$ — absolutamente despreciable. Por lo tanto a temperaturas cosmologicamente relevantes, el trebol satura z_1 a todos los ordenes practicos, y $\langle E_K\rangle = 3\kappa[1 + O(e^{-\beta_T\kappa})]$.

Extensividad de la Energia Libre

Lema 2.0 (El residuo de Stirling es uniformemente sub-extensivo)

Para la funcion de particion canonica multi-especie $Z_N(\beta_T, V)$ definida en la Ec. (1.6), la correccion de Stirling satisface

$$\ln N! = N\ln N - N + R(N), \qquad |R(N)| \le \tfrac{1}{2}\ln(2\pi N) + \tfrac{1}{12N}, \tag{2.0}$$

uniformemente en el perfil de ocupacion de especies $\{N_K\}$. En consecuencia $|R(N)|/N \le C\,\ln N/N \to 0$ cuando $N \to \infty$ para cualquier constante $C > \frac{1}{2}$.

Demostracion. La cota sobre $R(N)$ es la estimacion de Stirling no asintotica estandar (Robbins 1955); se cumple para todo entero $N \ge 1$ independientemente de como las N particulas se reparten entre las especies de nudos. Para la forma multi-especie (1.6a), cada factor de especie $\ln N_K!$ obedece la misma cota, y $\sum_K [N_K \ln N_K - N_K] = N\ln(\tilde{z}_1/V) - N\ln(z_{\text{eff}}/V)$ se colapsa correctamente por la identidad multinomial usada al pasar de (1.6a) a (1.6). El residuo combinado esta acotado por $\sum_K [\frac{1}{2}\ln(2\pi N_K) + \frac{1}{12N_K}] \le r \cdot [\frac{1}{2}\ln(2\pi N) + \frac{1}{12}]$ donde r es el numero (efectivo) de especies pobladas. Por la Prop 1.3 y la expansion para T pequeno (1.9), solo $O(1)$ especies contribuyen apreciablemente en $T \ll \kappa$, por lo tanto r esta acotado uniformemente y el residuo total es $O(\ln N)$ uniformemente en $\{N_K\}$. ■

Teorema 2.1 (Extensividad en el limite termodinamico)

Sea $F_N(\beta_T, V) = -T\ln Z_N(\beta_T, V)$ la energia libre de Helmholtz. Entonces en el limite termodinamico $N \to \infty$ a volumen especifico fijo $v = V/N$,

$$\lim_{N\to\infty,\, V/N=v} \frac{F_N(\beta_T, V)}{N} = f(v, T), \qquad \left|\frac{F_N}{N} - f(v,T)\right| \le \frac{C\,T\ln N}{N}, \tag{2.1}$$

para alguna constante absoluta $C > 0$ (que depende solo de $\beta_T\kappa$ y μ, no de N, V). La energia libre por particula es:

$$f(v,T) = -T\ln\left(\frac{v}{\lambda_{\text{th},3_1}^3}\, z_1(\beta_T)\right) + T \tag{2.2}$$

y F_N es asintoticamente una funcion homogenea de grado uno en las variables extensivas (N, V):

$$F_N(\beta_T, \lambda V) = \lambda\, F_{\lambda N}(\beta_T, V) + O(T\ln \lambda N) \qquad \text{para todo } \lambda > 0 \tag{2.3}$$

Demostracion. Usando el Lema 2.0 para controlar el residuo de Stirling:

$$F_N = -T\ln Z_N = -T\left[N\ln\left(\frac{\tilde{z}_1}{V}\cdot V\right) - N\ln N + N + R(N)\right] \tag{2.4}$$

En el limite dominado por el trebol (1.6b), $\tilde{z}_1 = (V/\lambda_{\text{th},3_1}^3)\, z_1\, [1 + O(e^{-\beta_T\kappa})]$, por lo que

$$F_N = -NT\ln\left(\frac{V}{N\lambda_{\text{th},3_1}^3}\, z_1\right) + NT - NT - T\,R(N) + O(NTe^{-\beta_T\kappa}) = Nf(v,T) - T\,R(N) + O(NTe^{-\beta_T\kappa}) \tag{2.5}$$

Dividiendo por N y usando $|R(N)| \le C\ln N$ (Lema 2.0):

$$\left|\frac{F_N}{N} - f(v,T)\right| \le \frac{C\,T\ln N}{N} + O(Te^{-\beta_T\kappa}) \xrightarrow{N\to\infty} 0 \qquad (2.6)$$

Ambos terminos de error se anulan: el residuo de Stirling como $\ln N/N \to 0$, y la correccion de masa por especie como exponencialmente pequena en $\beta_T\kappa$. La homogeneidad asintotica (2.3) se sigue. ∎

Corolario 2.1.1 (Extensividad estricta al orden dominante). *En el limite termodinamico, $F_N(\beta_T, V) = Nf(V/N, T)$ exactamente, en el sentido de que la densidad de energia libre $\mathcal{F} = F_N/V \to f(v,T)/v$ converge a una funcion solo de v y T, independiente de N y V por separado. Equivalentemente, la correccion sub-extensiva $CT\ln N$ contribuye una densidad de energia libre $O(T\ln N/V)$ que se anula cuando $V\to\infty$ a $n = N/V$ fijo.*

Observacion 2.2 (Base fisica de la no interaccion). La estructura de gas ideal (Definicion 1.4) no es una aproximacion sino que se sigue de los resultados constructivos del Articulo CI. El Teorema 3.2 establece el decaimiento exponencial uniforme de las correlaciones conexas:

$$|G_\Lambda(x,y)| \le C\,e^{-m|x-y|} \qquad (2.6)$$

con masa $m \ge c_0 \min(\kappa_{\text{Sk}}^{1/4}, \sqrt{\beta_{\text{FN}}})$. El Teorema 3.17 demuestra la convergencia de la expansion de polimeros de Kotecky–Preiss, que representa la funcion de particion como una expansion en cumulos convergente alrededor del gas no interactuante. Las correcciones a la energia libre de gas ideal son exponencialmente pequenas en la separacion entre solitones:

$$F = F_{\text{ideal}} + O\!\left(n^2\int_0^\infty r^2 e^{-mr}dr\right) = F_{\text{ideal}} + O(n^2/m^3) \qquad (2.7)$$

donde $n = N/V$ es la densidad de numero. Para un gas diluido con $n \ll m^3$, las correcciones son despreciables, y el resultado al orden dominante $F = F_{\text{ideal}}$ es exacto en el limite termodinamico a $n/m^3 \to 0$ fijo.

Observacion 2.3 (Extensividad desde la perspectiva de la expansion de polimeros). El resultado de extensividad (Teorema 2.1) tambien puede entenderse directamente desde la expansion de polimeros del Articulo CI (Teorema 3.17) sin pasar por la aproximacion de gas ideal. El teorema de Kotecky–Preiss [9] garantiza que la presion (logaritmo de la funcion de particion por unidad de volumen) admite una expansion en cumulos convergente:

$$\frac{1}{V}\ln Z = \sum_\gamma \frac{1}{V}\phi_T(\gamma)\prod_i a(\gamma_i) \qquad (2.8)$$

donde la suma corre sobre cumulos γ de polimeros, $a(\gamma_i)$ es la actividad del polimero γ_i, y ϕ_T es la funcion de Ursell. La convergencia de esta expansion (Articulo CI, Ec. 3.19) significa que la presion $P = T\ln Z/V$ esta bien definida e independiente de V cuando $V\to\infty$. La energia libre $F = -PV + \mu N$ es entonces automaticamente extensiva. Este es el mecanismo estandar por el cual la extensividad emerge de las interacciones de corto alcance en mecanica estadistica rigurosa [10].

Subseccion 2.2 — Convergencia Kotecky–Preiss / Ruelle para polimeros de nudos FN

Lema 2.4 (Convergencia KP para polimeros de nudos FN). *Definimos un polimero como el soporte conexo de una sola configuracion de soliton anudado de tipo K, con actividad $a(K) = e^{-\beta_T E_K}$ y funcion de peso $|K| = \mathrm{cr}(K)$. Entonces el criterio de Kotecky–Preiss*

$$\sum_{K\in\mathcal{K}} |a(K)|\, e^{|K|} \leq \infty \qquad (2.9)$$

se satisface siempre que $\beta_T\kappa > 1 + \ln\mu$*, equivalentemente* $T < \kappa/(1+\ln\mu) \approx 0.59\,\text{MeV}$*.*

Demostracion. Sustituyendo la cota de nudos primos $g(n) \leq C_0\mu^n n^{-\alpha_0}$ de la Ec. (1.3):

$$\sum_K |a(K)|e^{|K|} = \sum_{n=3}^{\infty} g(n)e^{-\beta_T\kappa n+n} \leq C_0\sum_{n=3}^{\infty} n^{-\alpha_0}(\mu e^{1-\beta_T\kappa})^n \qquad (2.10)$$

Esta serie de tipo geometrico converge si y solo si $\mu e^{1-\beta_T\kappa} < 1$, es decir, $\beta_T\kappa > 1+\ln\mu$. Con $\mu \leq 13.5$, esto da $\beta_T\kappa > 1+\ln 13.5 \approx 3.6$, por lo tanto $T < \kappa/3.6 \approx 0.56\,\text{MeV}$ (usando $\kappa \sim 2\,\text{MeV}$). Con la estimacion mas estricta $\mu \approx 10.4$ la cota mejora a $T < \kappa/3.34 \approx 0.60\,\text{MeV}$. En $T_{\text{CMB}} = 2.35\times10^{-4}\,\text{eV}$, el criterio se satisface con un margen enorme: $\beta_T\kappa \approx 8.5\times10^9 \gg 1+\ln\mu$. ■

Observacion 2.5 (Trivialidad y rigor). Como los polimeros de nudos FN **no interactuan** (sin acoplamiento entre nudos en el regimen de gas diluido $n \ll m^3$ de la Observacion 2.2), el teorema de Kotecky–Preiss / Ruelle [9, 10] se aplica en su forma trivial: la expansion en cumulos se trunca despues del termino de un solo polimero, y la convergencia se reduce a la convergencia de z_1 (Prop 1.3). El Lema 2.4 lo formaliza. El radio de convergencia ligeramente mas estricto $T < \kappa/(1+\ln\mu)$ frente a $T < \kappa/\ln\mu$ de la Prop 1.3 refleja el factor estandar $e^{|\gamma_0|}$ en el criterio KP; la diferencia numerica es irrelevante en T_{CMB}. La formulacion de Ruelle [10] (Cap. 4) da el mismo resultado via la expansion de Mayer. Retenemos $T < \kappa/\ln\mu$ de la Prop 1.3 como el regimen operativo en §3.

La Ecuacion de Estado

Subseccion 3.1 — La relacion de dispersion

Lema 3.1 (Dispersion relativista y expansion no relativista). *Un soliton anudado de tipo* K *con masa en reposo* $M_K = E_K/c^2 = \kappa\cdot\text{cr}(K)/c^2$ *tiene la relacion de dispersion relativista de una sola particula:*

$$\varepsilon_K(\mathbf{p}) = \sqrt{M_K^2c^4 + |\mathbf{p}|^2c^2} = M_Kc^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2M_K} - \frac{|\mathbf{p}|^4}{8M_K^3c^2} + O\!\left(\frac{|\mathbf{p}|^6}{M_K^5c^4}\right) \qquad (3.1)$$

En particular, la velocidad de grupo satisface $|\mathbf{v}| = |\mathbf{p}|/(M_K\gamma_K) \ll c$ *siempre que* $|\mathbf{p}| \ll M_Kc$*.*

Demostracion. El Hamiltoniano relativista de una sola particula para una excitacion localizada de masa en reposo M_K es $\hat{H}_K = \sqrt{(M_Kc^2)^2 + \hat{\mathbf{p}}^2c^2}$, la unica raiz cuadrada de energia positiva. Expandiendo en serie de Taylor en $|\mathbf{p}|/(M_Kc) \ll 1$ se obtiene (3.1).

Regimen no relativista cuantitativo. A temperatura T, la expectativa de equiparticion $\langle|\mathbf{p}|^2\rangle = 3M_KT$ da el momento tipico $|\mathbf{p}|_{\text{typ}} = \sqrt{3M_KT}$. La correccion relativista en (3.1) es por lo tanto

$$\frac{|\mathbf{p}|_{\text{typ}}^4/(8M_K^3c^2)}{|\mathbf{p}|_{\text{typ}}^2/(2M_K)} = \frac{|\mathbf{p}|_{\text{typ}}^2}{4M_K^2c^2} = \frac{3T}{4M_Kc^2}, \qquad (3.1a)$$

la cual a $T = T_{\text{CMB}}$ y $M_Kc^2 = 3\kappa = 6\,\text{MeV}$ se evalua en $\sim 3\times10^{-11}/4 \approx 10^{-11}$. Elevando al cuadrado el termino cinetico dominante, la correccion de orden siguiente a la ecuacion de estado es por lo tanto $O((T/M_Kc^2)^2) \sim 10^{-22}$ en T_{CMB}, justificando completamente el truncamiento no relativista. ■

Presion y densidad de energia

Teorema 3.2 (Ecuacion de estado). *El sector de anudamiento tiene presion P y densidad de energia ρ que satisfacen:*

$$w \equiv \frac{P}{\rho c^2} = \frac{T}{\langle E_K \rangle} \qquad (3.2)$$

donde $\langle E_K \rangle = \sum_K g(\mathrm{cr}(K))\, E_K\, e^{-\beta_T E_K} \Big/ z_1(\beta_T)$ es la energia en reposo del soliton promediada termicamente.

Demostracion. A partir de la ecuacion de estado del gas ideal y el resultado de extensividad (Teorema 2.1):

Presion. Diferenciando la energia libre (2.5) con respecto al volumen a N, T fijos:

$$P = -\left(\frac{\partial F_N}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{NT}{V} = nT \qquad (3.3)$$

Esta es la ley del gas ideal. La presion es enteramente cinetica (termica); no hay contribucion de las interacciones entre solitones (por la Observacion 2.2) ni de ningun efecto de volumen intrinseco.

Densidad de energia. La energia interna es:

$$U = -\frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta_T} = N\langle \varepsilon_K \rangle_{\text{thermal}} \qquad (3.4)$$

donde el promedio termico incluye tanto la energia en reposo como la energia cinetica. Separandolas:

$$U = N\langle E_K \rangle + N \cdot \frac{3}{2}T \qquad (3.5)$$

El primer termino es la energia total de masa en reposo; el segundo es la energia cinetica ($3T/2$ por particula en tres dimensiones). La densidad de energia es:

$$\rho c^2 = \frac{U}{V} = n\langle E_K \rangle + \frac{3}{2}nT \qquad (3.6)$$

Ecuacion de estado. Dividiendo (3.3) por (3.6):

$$w = \frac{P}{\rho c^2} = \frac{nT}{n\langle E_K \rangle + \frac{3}{2}nT} = \frac{T}{\langle E_K \rangle + \frac{3}{2}T} \qquad (3.7)$$

Para $T \ll \langle E_K \rangle$ (el regimen no relativista), esto se simplifica a:

$$w = \frac{T}{\langle E_K \rangle}\left[1 + O\!\left(\frac{T}{\langle E_K \rangle}\right)\right] \qquad (3.8)$$

que es la Ec. (3.2). Equivalentemente, usando el teorema del virial para un gas ideal no relativista, $P = \frac{1}{3}\rho_{\text{kin}}\langle v^2 \rangle$, donde $\langle v^2 \rangle = 3T/M_{\text{eff}}$:

$$w = \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \qquad (3.9)$$

confirmando que $w \to 0$ cuando $T/M_{\text{eff}}c^2 \to 0$. ∎

Cota cuantitativa

Teorema 3.3 (Cota cuantitativa sobre w). *A temperatura* T *con brecha de masa de anudamiento* $\Delta = \kappa\cdot\mathrm{cr}_{\min} = 3\kappa$ *(el trebol, que tiene* $\mathrm{cr}(3_1) = 3$*), el parametro de la ecuacion de estado satisface:*

$$0 \le w \le \frac{T}{\Delta} \qquad (3.10)$$

A la temperatura actual del CMB $T_{\mathrm{CMB}} = 2.725\text{ K} = 2.35\times10^{-4}\text{ eV}$ *con* $\Delta = 3\kappa \sim 6\text{ MeV}$*:*

$$w \le \frac{2.35\times10^{-4}\text{ eV}}{6\times10^{6}\text{ eV}} = 3.9\times10^{-11} \qquad (3.11)$$

Demostracion. La cota inferior $w \ge 0$ es inmediata de $P = nT \ge 0$ y $\rho c^2 > 0$. Para la cota superior, notemos que $\langle E_K\rangle \ge \min_K E_K = E_{3_1} = 3\kappa = \Delta$ (el trebol tiene la energia minima). Sustituyendo en (3.8):

$$w = \frac{T}{\langle E_K\rangle + \frac{3}{2}T} \le \frac{T}{\Delta + \frac{3}{2}T} \le \frac{T}{\Delta} \qquad (3.12)$$

La evaluacion numerica (3.11) se sigue por sustitucion directa. ■

Subseccion 3.2 — Ejemplo trabajado en $T = T_{\mathrm{CMB}}$

Ahora calculamos $\langle E_K\rangle$ y w explicitamente a la temperatura del CMB de la epoca actual, convirtiendo la cota del Teorema 3.3 en una casi igualdad.

Paso 1 — Energia en reposo del nudo promediada termicamente. Usando la expansion para T pequeno (1.8)–(1.9), el promedio termico de E_K sobre el conjunto de nudos es

$$\langle E_K\rangle = \frac{\sum_n g(n)(n\kappa)e^{-\beta_T\kappa n}}{\sum_n g(n)e^{-\beta_T\kappa n}} = 3\kappa\cdot\frac{1 + (4/3)e^{-\beta_T\kappa} + (10/3)e^{-2\beta_T\kappa} + \cdots}{1 + e^{-\beta_T\kappa} + 2e^{-2\beta_T\kappa} + \cdots} \qquad (3.13)$$

$$= 3\kappa[1 + \tfrac{1}{3}e^{-\beta_T\kappa} + O(e^{-2\beta_T\kappa})] \qquad (3.14)$$

Paso 2 — Evaluacion numerica en T_{CMB}. Con $T_{\mathrm{CMB}} = 2.725\,\mathrm{K} = 2.35\times10^{-4}\,\mathrm{eV}$, $\kappa \sim 2\,\mathrm{MeV} = 2\times10^{6}\,\mathrm{eV}$:

$$\beta_T\kappa = \frac{\kappa}{T_{\mathrm{CMB}}} = \frac{2\times10^{6}}{2.35\times10^{-4}} = 8.51\times10^{9} \qquad (3.15)$$

La correccion exponencial $e^{-\beta_T\kappa} = e^{-8.5\times10^{9}}$ esta tan por debajo de cualquier escala fisica (mucho menor que p.ej. las correcciones gravitatorias suprimidas por la masa de Planck $\sim 10^{-38}$) que para todos los propositos numericos:

$$\langle E_K\rangle = 3\kappa = \Delta = 6\,\mathrm{MeV} \quad (\text{con precision de 1 parte en } e^{-8.5\times10^{9}}) \qquad (3.16)$$

Paso 3 — Parametro de la ecuacion de estado. La cota dominante del Teorema 3.3 esta por lo tanto saturada como una casi igualdad:

$$w = \frac{T_{\mathrm{CMB}}}{\langle E_K\rangle + \frac{3}{2}T_{\mathrm{CMB}}} = \frac{2.35\times10^{-4}}{6\times10^{6} + \frac{3}{2}\cdot 2.35\times10^{-4}} = \frac{T_{\mathrm{CMB}}}{3\kappa}\cdot[1 - \tfrac{3}{2}\tfrac{T_{\mathrm{CMB}}}{3\kappa} + \cdots] \qquad (3.17)$$

La correccion termica-cinetica $\frac{3}{2}T_{\mathrm{CMB}}/(3\kappa) = 5.9 \times 10^{-11}$ multiplica el $w \approx 3.92 \times 10^{-11}$ dominante por $(1 - 5.9 \times 10^{-11})$, dando:

$$\boxed{w(T_{\mathrm{CMB}}) = 3.92 \times 10^{-11}\,[1 - 5.9 \times 10^{-11} + O(10^{-22})]} \tag{3.18}$$

— indistinguible de la cota al orden dominante a cualquier precision cosmologicamente relevante.

Verificacion de consistencia (M4). El regimen de convergencia de la Prop 1.3 es $T < \kappa/\ln\mu \approx 0.77\,\mathrm{MeV}$, equivalentemente $\beta_T\kappa > \ln\mu \approx 2.4$. En T_{CMB} con $\beta_T\kappa = 8.5 \times 10^9$, estamos profundamente dentro de este regimen: $T/(3\kappa) < 1/(3\ln\mu) \approx 0.14$, por lo que la expansion asintotica (3.8) de w es valida con error controlado. El regimen de convergencia de z_1 y el regimen asintotico de w coinciden.

Observacion 3.4 (Comparacion con cotas observacionales). Las restricciones cosmologicas actuales sobre la ecuacion de estado de la materia oscura provenientes de Planck + BAO dan $|w_{\mathrm{DM}}| < 10^{-3}$ al 95% C.L. [11]. La cota (3.11) esta ocho ordenes de magnitud por debajo de este limite observacional, haciendo que la desviacion de $w = 0$ sea indetectable por cualquier sonda cosmologica previsible.

Conexion con el Articulo LXVII: Confirmacion en Red

El Articulo LXVII [12] midio w_{knot} directamente en la red FN calculando la densidad de anudamiento por sitio a traves de tamanos de red $N = 8, 12, 16, 24, 32$ (un rango de $64\times$ en volumen $V = N^3$). Los resultados clave:

- **Prueba de extensividad:** La densidad de anudamiento por sitio ρ_{knot}/N^3 es constante (dentro de los errores estadisticos) a traves de todos los N. El ajuste de ley de potencias $\rho_{\mathrm{knot}} \propto V^\alpha$ da $\alpha = 0.987 \pm 0.002$, consistente con $\alpha = 1$ (extensivo) y descartando $\alpha = 0$ (intensivo, lo que daria $w = -1$).
- **Comparacion de modelos:** $\Delta\chi^2 = 584{,}801$ entre el modelo extensivo ($\alpha = 1$, es decir, $w = 0$) y el modelo intensivo ($\alpha = 0$, es decir, $w = -1$). El sector de anudamiento es de tipo materia con $\Delta\chi^2 \approx 5.8 \times 10^5$ (equivalentemente, el modelo intensivo se rechaza con $\sqrt{\Delta\chi^2} \approx 765\sigma$).
- **Universalidad:** El escalamiento extensivo se mantiene a traves de cinco valores de la constante de acoplamiento $\beta = 5, 8, 10, 15, 20$, confirmando que el resultado es una propiedad de la teoria del continuo y no un artefacto de la red.

El Teorema 2.1 del presente articulo proporciona la base rigurosa para esta medicion en red: la extensividad de la energia libre de anudamiento es una consecuencia matematica de la estructura no interactuante establecida por el programa constructivo del Articulo CI.

El Argumento Termodinamico: Por que $w \neq -1$

Hacemos una pausa para abordar una objecion natural. En la QFT estandar, la densidad de energia del vacio de cualquier sector tiene $w = -1$ (constante cosmologica), porque el estado de vacio de una teoria invariante de Poincare tiene $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. Por que difiere el sector de anudamiento?

Proposicion 4.1 (El sector de anudamiento no es una energia de vacio). *La energia del sector de anudamiento es una energia de excitacion por encima del vacio verdadero, no una energia de estado fundamental. En consecuencia, no contribuye a la constante cosmologica.*

Demostracion. El paso riguroso es la parte (iii); las partes (i)–(ii) proporcionan la motivacion heuristica.

(i) No proteccion topologica. La Seccion 3.5 del Articulo LXVII demuestra que las configuraciones anudadas con $H = 0$ son cuanticamente inestables: las configuraciones de cambio de cruce tienen accion finita (codimension-1 en el espacio de campos), por lo que la integral de camino conecta cualquier tipo de nudo con el nudo trivial con amplitud no nula. La energia de anudamiento NO es por lo tanto una propiedad del estado fundamental del sector $H = 0$ — es una excitacion por encima del estado fundamental $H = 0$ verdadero (el vacio no anudado).

Subseccion 4.b — El mecanismo de reabsorcion de Volovik / Gibbs–Duhem

(ii) Reabsorcion de Gibbs–Duhem. En el marco de Volovik [13], la densidad de energia perturbativa del vacio de un medio cuantico interactuante (superfluido ^{3}He, el condensado FN, o cualquier analogo) se reabsorbe via la identidad termodinamica de Gibbs–Duhem en equilibrio a $T = 0$:

$$E_{\text{vac}} - \mu_{\text{vac}} N_{\text{vac}} + P_{\text{vac}} V = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E}_{\text{vac}} \equiv E_{\text{vac}}/V = \mu_{\text{vac}} n_{\text{vac}} - P_{\text{vac}}. \qquad (4.1)$$

Para un estado fundamental de equilibrio estable sin presion externa ($P_{\text{vac}} = 0$) y potencial quimico ajustado a la densidad del vacio verdadero ($\mu_{\text{vac}} = 0$), esto da $\mathcal{E}_{\text{vac}}/V \to 0$ identicamente. La cancelacion ocurre porque toda contribucion de punto cero invariante de Lorentz del vacio perturbativo se compensa por un termino igual y opuesto en $\mu_{\text{vac}} n_{\text{vac}}$ — al medio se le permite relajarse. Esta es la reformulacion fluido-dinamica del problema de la constante cosmologica: el "ajuste fino" de Λ no es en absoluto un ajuste sino la consecuencia del equilibrio.

Los sectores de carga topologica escapan a esta cancelacion solo cuando estan topologicamente protegidos. Una carga entera conservada (aqui $\mathrm{Lk} \in \mathbb{Z}$, el numero de enlace de Hopf) no puede relajarse: la barrera de la integral de camino entre $\mathrm{Lk} = n$ y $\mathrm{Lk} = n + 1$ tiene accion infinita en el modelo FN, por lo que el potencial quimico no puede equilibrarse contra la densidad de enlace. La densidad de energia del estado fundamental asociada contribuye genuinamente $w = -1$.

El sector de anudamiento carece de esta proteccion: el tipo de nudo **no es una carga conservada**, solo un invariante topologico instantaneo de configuraciones de campo genericas. Los caminos de cambio de cruce tienen accion finita (codimension-1 en el espacio de campos, Articulo LXVII §3.5), por lo que la integral de camino se reequilibra contra la densidad de nudos. La reabsorcion de Gibbs–Duhem se aplica, y el sector de anudamiento no puede fijar una contribucion $w = -1$. Cite el Articulo LXVII para la formulacion FN-interna de este argumento; cite Volovik [13] §29 para el analogo ^{3}He original.

(iii) Paso riguroso desde el Teorema 3.3. El contenido matematico estricto de "sector de anudamiento $\neq$ constante cosmologica" esta contenido en el Teorema 3.3: $0 \leq w \leq T/(3\kappa) \leq 3.92 \times 10^{-11}$ en T_{CMB}. Esto excluye rigurosamente $w = -1$, ya que $|0 - (-1)| = 1 \gg 10^{-11}$. La observacion sobre dependencia metrica de abajo proporciona intuicion sobre *por que* el calculo riguroso aterriza en $w = 0$ en lugar de $w = -1$, pero no es en si misma la demostracion.

Heuristica para $w = 0$ (no $w = -1$): El numero de configuraciones anudadas independientes escala como V (cada nudo ocupa una region finita $\sim \mathrm{Rop}(K) \cdot \lambda_C^3$, y V/V_K nudos independientes caben en el volumen V), por lo que $\ln Z_{\text{knot}} \propto V$ y la densidad de energia libre $\mathcal{F} = F/V$ depende de la metrica a traves del volumen propio disponible para el anudamiento (una dependencia extensiva), no via el escalamiento general $\sqrt{-g}$. En consecuencia $T_{\mu\nu} \not\propto g_{\mu\nu}$ y $w \neq -1$. Esto contrasta con el sector de enlace, donde $\text{Lk} \in \mathbb{Z}$ es independiente de la metrica, $\ln Z_{\text{link}}$ depende de $g_{\mu\nu}$ solo a traves de $\sqrt{-g}$, y $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. El resultado riguroso es (3.11); la heuristica explica por que esta es la respuesta natural. ∎

Subseccion 4.c — Conexion con el Articulo LXXXIX (cosmologia rio abajo)

El resultado matematico $w_{\text{knot}} = 0$ tiene una consecuencia cosmologica directa desarrollada en el Articulo LXXXIX [14]: en la cosmologia de dos sectores del Programa de Solitones Topologicos, el **sector de anudamiento** contribuye a la densidad de materia oscura (extensivo, $w = 0$, polvo sin presion) mientras que el **sector de enlace** contribuye a la densidad de energia oscura ($w = -1$, constante cosmologica; Articulo LXVII §6). El vacio de Faddeev–Niemi es por lo tanto "indestructible" al nivel de los observables cosmologicos: la expansion acelerada en tiempo tardio es impulsada por el sector de enlace, la formacion de estructura dominada por materia en tiempo temprano por el sector de anudamiento, y los dos estan desacoplados por la asimetria de proteccion topologica hecha rigurosa en la Proposicion 4.1.

El Articulo LXXXIX se apoya en el resultado $w = 0$ del presente articulo para derivar las predicciones completas de formacion de estructura: las perturbaciones de densidad del sector de anudamiento evolucionan via dinamica estandar de polvo ($\delta_{\text{knot}} \propto a$ durante la dominacion de materia), mientras que el sector de enlace permanece espacialmente homogeneo. La ecuacion de estado compuesta del sector oscuro $w_{\text{eff}}(a)$ interpola entre $w \approx 0$ durante la dominacion de materia y $w \approx -1$ durante la era de la constante cosmologica, consistente con las observaciones de Planck + BAO. El resultado $w_{\text{knot}} = 0$ del presente articulo es la entrada estructural que hace que la descomposicion de dos sectores del Articulo LXXXIX sea compatible con la fenomenologia ΛCDM, permaneciendo derivable del Lagrangiano FN via la mecanica estadistica rigurosa de §1–§3.

Resumen de Resultados

Resultado	Enunciado	Referencia
Convergencia	$z_1(\beta_T) < \infty$ para $T < \kappa/\ln\mu$	Proposicion 1.3
Extensividad	$F(N, V) = N\, f(V/N, T)$	Teorema 2.1
Ecuacion de estado	$w = T/\langle E_K \rangle \to 0$ cuando $T \to 0$	Teorema 3.2
Cota cuantitativa	$w \leq T/\Delta \sim 10^{-11}$ en $T = T_{\text{CMB}}$	Teorema 3.3
Confirmacion en red	$\alpha = 0.987 \pm 0.002$, $\Delta\chi^2 = 584{,}801$	Articulo LXVII

El sector de anudamiento de la QFT de Faddeev–Niemi es polvo sin presion con precision de una parte en 10^{11} en T_{CMB}. La demostracion requiere solo: (a) la brecha de masa y el agrupamiento exponencial del Articulo CI, (b) la naturaleza de tamano finito (localizada) de los nudos, y (c) la mecanica estadistica estandar de particulas masivas no interactuantes.

Agradecimientos

Este trabajo se basa en los resultados de QFT constructiva del Articulo CI y las mediciones en red del Articulo LXVII en el Programa de Solitones Topologicos.

Referencias

[1] A. Novickis, "Constructive Quantum Field Theory for the Faddeev–Niemi Model," Paper CI in the Topological Soliton Programme (2026).

[2] V. Katritch, J. Bednar, D. Michoud, R. G. Scharein, J. Dubochet, and A. Stasiak, "Geometry and physics of knots," *Nature* **384**, 142–145 (1996).

[3] J. Cantarella, R. B. Kusner, and J. M. Sullivan, "On the minimum ropelength of knots and links," *Invent. Math.* **150**, 257–286 (2002).

[4] G. Buck, "Four-thirds power law for knots and links," *Nature* **392**, 238–239 (1998).

[5] E. J. Rawdon and R. G. Scharein, "Upper bounds for equilateral stick numbers," in *Physical Knots*, Contemp. Math. **304**, 55–75 (2002).

[6] D. J. A. Welsh, "The complexity of knots," in *Quo Vadis, Graph Theory?*, Annals Discrete Math. **55**, 159–171 (1993).

[7] C. Ernst and D. W. Sumners, "The growth of the number of prime knots," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **102**, 303–315 (1987).

[8] C. Sundberg and M. Thistlethwaite, "The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles," *Pacific J. Math.* **182**, 329–358 (1998).

[9] R. Kotecky and D. Preiss, "Cluster expansion for abstract polymer models," *Comm. Math. Phys.* **103**, 491–498 (1986).

[10] D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results* (W. A. Benjamin, 1969).

[11] Planck Collaboration, "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020). arXiv:1807.06209.

[12] A. Novickis, "Dark Matter as a Topological Vacuum Condensate," Paper LXVII in the Topological Soliton Programme (2026).

[13] G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet* (Oxford University Press, 2003), Ch. 29.

[14] A. Novickis, "Indestructible Dark Matter and Two-Sector Cosmology from Faddeev–Niemi Topology," Paper LXXXIX in the Topological Soliton Programme (2026).