



INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR PROGRESO
ORGANISMO PÚBLICO DESCENTRALIZADO DEL GOBIERNO DEL ESTADO
CLAVE: 31ETI0004Q

Ecuaciones diferenciales

Matemáticas V

Ingeniería Electromecánica

Manual de Ejercicios

presentada por:

Dr. Iván de Jesús May-Cen
Profesor de Tiempo Completo

Progreso, Yucatán, México
Enero de 2025

Índice General

1 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	4
1.1 Descripción de la unidad	4
1.1.1 Competencias específicas a desarrollar	4
1.1.2 Estrategias de enseñanza	4
1.2 Teoría preliminar	4
1.3 Clasificación de las ecuaciones diferenciales	5
1.4 Orden de una ecuación diferencial	6
1.5 Grado de una ecuación diferencial	6
1.5.1 Ejercicios propuestos	6
1.6 Solución a una Ecuación Diferencial	6
1.6.1 Ejercicios propuestos	8
1.7 Método del factor integrante	9
1.7.1 Ejercicios propuestos	15
1.8 Método de separación de variables	15
1.8.1 Ejercicios propuestos	21
1.9 Método de Euler	22
1.9.1 Ejercicios propuestos	24
1.10 Aplicaciones en ingeniería	24
1.10.1 Crecimiento y descomposición	24
1.10.2 Vaciado de tanques	26
1.10.3 Aplicaciones a la física	30
1.11 Ejercicios complementarios	31

2	Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior	48
2.1	Descripción de la unidad	48
2.1.1	Competencias específicas a desarrollar	48
2.1.2	Estrategias de enseñanza	48
2.2	Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes	49
2.2.1	Ejercicios propuestos	51
2.3	Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes	52
2.3.1	Ejercicios propuestos	56
2.4	¿Qué es un modelo?	57
2.5	¿Qué predice el modelo?	58
2.6	Modelo de Malthus	59
2.7	Modelo Logístico	61
2.8	Aplicaciones de las ecuaciones lineales	61
2.9	Ejercicios complementarios	62
3	Transformada de Laplace	65
3.1	Descripción de la unidad	65
3.1.1	Competencia específica a desarrollar	65
3.1.2	Estrategias de enseñanza	65
3.2	Definición de transformada de Laplace	66
3.3	Linealidad de la transformada	69
3.4	Fórmulas básicas para determinar transformada de Laplace	69
3.5	Más ejemplos de transformadas	70
3.5.1	Ejercicios propuestos	72
3.6	Transformada inversa de Laplace	73
3.7	Linealidad de la transformada inversa	74
3.7.1	Ejercicios propuestos	76
3.8	Transformada de una derivada	77
3.8.1	Método de la transformada de Laplace para resolver una EDO	78
3.8.2	Ejercicios propuestos	86

4	Sistemas de ecuaciones diferenciales.	87
4.1	Descripción de la unidad	87
4.1.1	Competencias específicas a desarrollar	87
4.1.2	Estrategias de enseñanza	87
4.2	Introducción	88
4.3	Sistemas lineales homogéneos	88
4.4	Sistemas lineales no homogéneos	91
4.5	Ejercicios complementarios	96
	Bibliografía	99

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

1.1 Descripción de la unidad

1.1.1 Competencias específicas a desarrollar

- Modelar la relación existente entre una función desconocida y una variable independiente mediante una ecuación diferencial que describe algún proceso dinámico (crecimiento, decaimiento, mezclas, geométricos, circuitos eléctricos).
- Identificar los diferentes tipos de E.D. ordinarias de primer orden, sus soluciones generales, particulares y singulares e interpretarlas, en el contexto de la situación en estudio.

1.1.2 Estrategias de enseñanza

- Identificar un problema de valor inicial y expresar las condiciones del mismo.
- Reconocer los métodos con los que una ecuación diferencial puede ser resuelta.
- Resolver ecuaciones diferenciales de primer orden e interpretar gráficamente las soluciones.
- Modelar situaciones típicas utilizando ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.2 Teoría preliminar

Definición 1 (Ecuación diferencial)

Una ecuación diferencial (ED) es una ecuación que involucra las derivadas de una función *desconocida* (o variable dependiente) con respecto de una o más variables (variables independientes).

Las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en ordinaria o parciales.

1.3 Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación en la cual intervienen una función de una variable y una o varias de sus derivadas. En general, esta función es desconocida y se le llama incógnita.

Ejemplo 1.1. Las ecuaciones siguientes son ejemplos de EDO.

$$y' = x^2 \quad (1.1)$$

$$y'' + y = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = ke^t \quad (1.3)$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = e^{y^2} + \sin t \quad (1.4)$$

Por otro lado, en una ecuación diferencial parcial (EDP) se relacionan derivadas parciales de una función desconocida de dos o más variables independientes.

Ejemplo 1.2. Las ecuaciones siguientes son ejemplos de EDP.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

Definición 2

Una ecuación diferencial se clasifica como lineal cuando tiene la forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.7)$$

Por otro lado, se le llama no lineal cuando no tiene la forma (1.7).

Nota. En la Definición 2 observamos que:

- Ni la función ni sus derivadas están elevadas a ninguna potencia distinta de uno o cero.
- En cada coeficiente que aparece multiplicándolas sólo interviene la variable independiente.
- Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación.

1.4 Orden de una ecuación diferencial

Es el orden de la derivada de mayor orden presente en la ecuación diferencial. Por ejemplo, la ecuación diferencial 1.1 es de primer orden, en tanto que la ecuación diferencial 1.2 es de segundo orden.

1.5 Grado de una ecuación diferencial

El grado de una ecuación diferencial es el grado (la potencia) de la derivada de mayor orden, siempre y cuando la ecuación esté en forma polinómica, de no ser así se considera que no tiene grado..

Ejemplo 1.3.

$$x^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^3 + 2 \frac{dy}{dx} + \sin x = 0 \quad (1.8)$$

Es una ecuación diferencial de grado 3.

1.5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1. En cada ED indica su orden y señala si es lineal o no lineal.

- | | |
|------------------------------------|--|
| a) $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y$ | f) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ |
| b) $y' + y \tan x = 0$ | g) $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ |
| c) $y' + y \cos x = \cos x \sin x$ | h) $y''' - y'' = x$ |
| d) $y' = \frac{y+x}{y-x}$ | i) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \cos x$ |
| e) $y' = \frac{1}{x}y + 1$ | j) $y'' + 2y' - 3y = 1$ |

1.6 Solución a una Ecuación Diferencial

Una solución a una ED en un intervalo I es cualquier función definida en I que satisface a la ecuación, es decir, que al sustituirla la reduce una identidad.

Ejemplo 1.4. Compruebe que la función $y(x) = e^{-3x} + 5$ es solución de la ED en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$y' + 3y = 15$$

Solución. Derivando $y(x) = e^{-3x} + 5 \Rightarrow y'(x) = -3e^{-3x}$. Sustituyendo en la ED:

$$\begin{aligned} y' + 3y &= 15 \\ -3e^{-3x} + 3(e^{-3x} + 5) &= 15 \\ -3e^{-3x} + 3e^{-3x} + 15 &= 15 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

La última igualdad indica que $y(x)$ es efectivamente solución a la ED. ▲

Ejemplo 1.5. Verifica que la función $g(x) = \frac{1}{x} + x$ es solución de la ED en el intervalo $(0, \infty)$

$$y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} = 0$$

Solución. Si $x > 0$, derivando $g(x) = \frac{1}{x} + x \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow g''(x) = \frac{2}{x^3}$ Sustituyendo en la ED:

$$\begin{aligned} y'' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x} &= 0 \\ \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{x} + x\right) + \frac{2}{x} &= 0 \\ \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{2x}{x^2} + \frac{2}{x} &= 0 \\ \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g(x)$ es una solución en $(0, \infty)$ ▲

Ejemplo 1.6. Si c es una constante. Compruebe que la función que define la ecuación $xy^2 - y^3 = c$, es solución de la ED:

$$(2x - 3y)y' + y = 0$$

Solución. Derivando implícitamente $xy^2 - y^3 = c$, respecto de x , se tiene:

$$\begin{aligned} y^2 + 2xyy' - 3y^2y' &= 0 \\ y(y + 2xy' - 3yy') &= 0 \\ y + 2xy' - 3yy' &= 0 \\ y + (2x - 3y)y' &= 0 \\ (2x - 3y)y' + y &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $xy^2 - y^3 = c$ define una solución en forma implícita.



Ejemplo 1.7. Determina si $h(x) = e^{-3x}$ es una solución de la ED:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Solución. Calculando las derivadas necesarias:

$$h'(x) = -3e^{-3x}, \quad h''(x) = 9e^{-3x}$$

Sustituimos en la ED:

$$\begin{aligned} y'' + 6y' + 9y &= 0 \\ 9e^{-3x} + 6(-3e^{-3x}) + 9e^{-3x} &= 0 \\ 9e^{-3x} - 18e^{-3x} + 9e^{-3x} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $h(x) = e^{-3x}$ es solución.



Ejemplo 1.8. La función $y(t) = ke^t$ cumple la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = ke^t$

Ejemplo 1.9. La función $y = e^{x^2}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = 2xy$

Ejemplo 1.10. Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ es solución de $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$.

Solución.

$$y' = \frac{4}{16}x^3 = \frac{1}{4}x^3 = x \frac{x^2}{4}$$

como $y = \frac{x^4}{16}$ entonces $y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$, luego se cumple que $y' = xy^{\frac{1}{2}}$

Por lo tanto: $y = \frac{x^4}{16}$ es solución a la ecuación diferencial.



1.6.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.2. Determina si la función dada es solución de la correspondiente ED.

a) $x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2y, \quad y = Axe^{x^2}$

b) $y' + y \tan x = 0, \quad y = A \cos x$

c) $y' + y \cos x = \cos x \sin x, \quad y = Ce^{-\sin x} + \sin x + 1$

d) $y' = \frac{y+x}{y-x}, \quad x^2 - y^2 + 2xy = C$

e) $y' = \frac{1}{x}y + 1, \quad y = x \ln x$

- f) $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$, $A(x + y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$
- g) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, $y = \cos x + \operatorname{sen} x$
- h) $y''' - y'' = x$, $y = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 + ke^k, k \in \mathbb{R}$
- i) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \cos x$, $y = \cos x - \operatorname{sen} x$
- j) $y'' + 2y' - 3y = 1$, $y = e^x - \frac{1}{3}$

1.7 Método del factor integrante

Mediante este método resolveremos ecuaciones de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.9)$$

Dividiendo la ecuación entre $a_1(x)$ queda:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Sustituyendo $\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ por $P(x)$ queda la forma estándar de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (1.10)$$

Con base en lo anterior, definimos el Factor integrante como:

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (1.11)$$

Es posible definir un algoritmo para resolver una ED utilizando el factor integrante. Se enlista a continuación una sugerencia de pasos para solucionar una ecuación diferencial de primer orden mediante el método del factor integrante:

1. Lleve la ecuación diferencial que se le proporcione a la forma estándar 1.10.
2. Identifique $P(x)$ y calcule el factor integrante:

$$u(x) = e^{\int P(x)dx}$$

3. Multiplique el factor integrante por la ecuación diferencial obtenida en el paso 1:

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

4. Observe que el lado izquierdo de la ecuación diferencial del paso 3 es la derivada del producto del factor integrante por y :

$$\frac{d}{dx}(e^{\int P(x)dx}y) = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

5. Integre ambos miembros de la igualdad obtenida en el paso 4 y despejar $y(x)$ para obtener el resultado.

Con la finalidad de ilustrar la utilidad de los pasos anteriores se proporcionan los siguiente ejemplos resueltos.

Ejemplo 1.11. Resuelva $xy' - 4y = x^6e^x$.

Solución. Paso 1: Llevamos la ED a su forma estándar:

$$\begin{aligned}\frac{xy'}{x} - \frac{4y}{x} &= \frac{x^6e^x}{x} \\ y' - \frac{4}{x}y &= x^5e^x\end{aligned}$$

Paso 2: Identificamos $P(x) = -\frac{4}{x}$ y se calcula el factor integrante:

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-4}} = x^{-4}$$

Paso 3: Multiplicamos el factor integrante por la forma estándar de la ecuación:

$$\begin{aligned}x^{-4}y' - x^{-4}\frac{4}{x}y &= x^{-4}x^5e^x \\ x^{-4}y' - \frac{4}{x}x^{-4}y &= xe^x\end{aligned}$$

Paso 4: En la última igualdad, el lado izquierdo es la derivada del producto factor integrante por y :

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x$$

Paso 5: Integramos lo obtenido anteriormente:

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dx}[x^{-4}y]dx &= \int xe^x dx && \text{Integrando por partes:} \\ x^{-4}y &= \int xe^x dx && \begin{cases} U = x & dU = dx \\ dV = e^x dx & V = e^x \end{cases} \\ x^{-4}y &= xe^x - \int e^x dx \\ x^{-4}y &= xe^x - e^x + c\end{aligned}$$

Despejando y en la última ecuación: $y = \frac{x}{x^{-4}}e^x - \frac{e^x}{x^{-4}} + \frac{c}{x^{-4}}$ Por lo tanto, $y = x^5e^x - x^4e^x + x^4c$ es la solución.



Ejemplo 1.12. Resuelva

$$(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^4$$

Solución. Llevamos la ED a la forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = \frac{(x+1)^4}{x+1} = (x+1)^3$$

Así $P(x) = \frac{-2}{x+1}$, entonces el factor integrante:

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{\int \frac{-2}{x+1}dx} \\ &= e^{-2\ln(x+1)} \\ &= e^{\ln(x+1)^{-2}} \\ &= (x+1)^{-2} \end{aligned}$$

Multiplicando $u(x)$ por la forma estándar:

$$\begin{aligned} (x+1)^{-2}\frac{dy}{dx} - (x+1)^{-2}\frac{2}{x+1}y &= \frac{(x+1)^4}{x+1} = (x+1)^{-2}(x+1)^3 \\ \frac{d}{dx}[(x+1)^{-2}y] &= x+1 \end{aligned}$$

Integrando obtenemos:

$$\begin{aligned} (x+1)^{-2}y &= \int (x+1)dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = (\frac{x^2}{2} + x + c)(x+1)^2$ es la solución.



Algunas veces es importante elegir una solución de la familia de soluciones. Para esto, se identifica un punto particular (x_0, y_0) por donde se requiera que pase la gráfica de la solución. De esta manera, introducimos el concepto de problema de valor inicial.

Definición 3

Un problema de valor inicial (PVI) es una ecuación diferencial:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{con} \quad f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

donde Ω es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, junto con un punto en el dominio de f , $(t_0, y_0) \in \Omega$, llamada la condición inicial.

Ejemplo 1.13. Resuelva el PVI $(2x^2 - ye^x)dx - e^x dy = 0, y(0) = 1$

Solución. Escribimos la ED en la forma estándar:

$$\begin{aligned} (2x^2 - ye^x) - e^x \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} - \frac{2x^2 - ye^x}{e^x} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} + y &= 2x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

Identificamos $P(x) = 1$, entonces $u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$, luego:

$$\begin{aligned} e^x \frac{dy}{dx} + e^x y &= e^x 2x^2 e^{-x} \\ \frac{d}{dx} [e^x y] &= 2x^2 \end{aligned}$$

Integrando obtenemos:

$$\begin{aligned} e^x y &= \int 2x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 + c \end{aligned}$$

entonces $y = \frac{2}{3}x^3 e^{-x} + ce^{-x}$

Ahora, usando la condición inicial $y(0) = 1 \Rightarrow x = 0, y = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{3}(0)^3 e^{-0} + ce^{-0} \\ 1 &= c \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es $y = \frac{2}{3}x^3 e^{-x} + e^{-x} = \left(\frac{2}{3}x^3 + 1\right)e^{-x}$

▲

Ejemplo 1.14. Determine la solución de:

$$(x \ln x)y' + (1 + \ln x)y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x) = 0$$

Solución. Escribimos la ED en su forma estándar:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(1 + \ln x)}{x \ln x}y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{(2 + \ln x)}{x \ln x}$$

donde $P(x) = \frac{1+\ln x}{x \ln x}$ entonces:

Por cambio de variable:

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= \int \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx & \begin{cases} u = x \ln x \\ du = \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) dx \\ = (\ln x + 1)dx \end{cases} \\ &= \int \frac{1}{u} du \\ &= \ln u \\ &= \ln(x \ln x) \end{aligned}$$

Luego obtenemos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(x \ln x)} = x \ln x$$

Multiplicando el factor integrante por la forma estándar:

$$\begin{aligned} x \ln x \left[\frac{dy}{dx} + \frac{(1 + \ln x)}{x \ln x}y \right] &= x \ln x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{(2 + \ln x)}{x \ln x} \right] \\ \frac{d}{dx} [(x \ln x)y] &= -\frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln x) \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la igualdad:

Por cambio de variable:

$$\begin{aligned} (x \ln x)y &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{x}(2 + \ln x)dx & \begin{cases} x = u^2 \\ dx = 2u du \end{cases} \\ &= -\frac{1}{2} \int u(2 + 2 \ln u)2u du \\ &= -2 \int u^2(1 + \ln u)du & \text{Integrando por partes:} \\ &= -2 \left[\frac{u^3}{3}(1 + \ln u) - \int \frac{u^2}{3} du \right] & \begin{cases} U = 1 + \ln u, & dU = \frac{1}{u} du \\ dV = u^2 du, & V = \frac{u^3}{3} \end{cases} \\ &= -\frac{2}{3}u^3(1 + \ln u) - \frac{2}{9}u^3 + C \\ &= -\frac{2}{3}u^3 - \frac{2}{3}u^3 \ln u + C \\ &= -\frac{2}{3}u^3 \left(\frac{4}{3} + \ln u \right) + C \\ &= -\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 \left(\frac{4}{3} + \ln(\sqrt{x}) \right) + C \\ &= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \ln x \right) + C \end{aligned}$$

Por tanto, la solución está dada por:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x \ln x} \left[-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \ln x \right) + C \right] \\ &= -\frac{2}{3} \sqrt{x} \left(\frac{4}{3 \ln x} + \frac{1}{2} \right) + \frac{C}{x \ln x} \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 1.15. Resuelva:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \sin y + 2 \sin 2y}$$

Solución. Esta ED no es separable y no es lineal en la variable y . Considerando los recíprocos tenemos:

$$\frac{dx}{dy} = x \sin y + 2 \sin 2y$$

En la forma estándar queda:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} - x \sin y &= 2 \sin 2y \\ \frac{dx}{dy} - (\sin y)x &= 2 \sin 2y \end{aligned}$$

La última ED es lineal en x y su factor integrante es:

$$u(y) = e^{\int P(y) dy} = e^{-\int \sin y dy} = e^{\cos y}$$

Luego:

$$\begin{aligned} e^{\cos y} \frac{dx}{dy} - e^{\cos y} (\sin y)x &= 2e^{\cos y} \sin 2y \\ \frac{d}{dy} [e^{\cos y} x] &= 2e^{\cos y} \sin 2y \end{aligned}$$

Utilizamos la identidad $\sin 2y = 2 \sin y \cos y$ para integrar la última ecuación:

$$\begin{aligned} e^{\cos y} x &= 4 \int \sin y \cos y e^{\cos y} dy && \text{Por sustitución:} \\ &&& \begin{cases} u = \cos y \\ du = -\sin y dy \end{cases} \\ &&& \text{Por partes} \\ &&& \begin{cases} U = u, & dU = du \\ dV = e^u du, & V = e^u \end{cases} \\ &= -4 \int u e^u du \\ &= -4 \left[u e^u - \int e^u du \right] \\ &= -4 \left[u e^u - e^u \right] + c \\ &= -4 \cos y e^{\cos y} + 4 e^{\cos y} + c \\ &= -4 e^{\cos y} (\cos y - 1) + c \end{aligned}$$

Despejando x , obtenemos la solución dada por:

$$x = -4(\cos y - 1) + c e^{-\cos y}$$

▲

1.7.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.3. En cada caso señale si la ED es lineal en y o en x . En caso de serlo utilice el factor integrante para determinar la solución general.

a) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$

b) $x \frac{dy}{dx} + \frac{2x+1}{x+1}y = x - 1$

c) $(1 + x^2)dy + (xy + x^3 + x)dx = 0$

d) $xy' = 3y + x^4 \cos x, y(2\pi) = 0$

e) $ydx + (xy + 2y - ye^y)dy = 0$

f) $y' = \frac{y}{2y \ln y - x}$

g) $xy' + 2y = \sin x$

h) $\sin x \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = 0, y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$

j) $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y - 1 = 0, y(0) = -3$

1.8 Método de separación de variables

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria es de variables separables si se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (1.12)$$

Esta afirmación implica que podemos considerar la notación $\frac{dy}{dx}$ como si se tratara de una fracción y de este modo despejar dy para encontrar la función $y(x)$ que satisfaga la ED.

Ejemplo 1.16. Resuelva la ED utilizando separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Solución. Por separación de variables se tiene:

$$dy = 2x dx$$

e integrando ambos lados de la ecuación¹ :

$$\begin{aligned}\int dy &= \int 2x dx \\ y &= x^2 + c \\ y &= x^2 + c\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 1.17. Determine la solución a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Solución. Por separación de variables:

$$ydy = xdx$$

e integrando ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\int ydy &= \int xdx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c \\ y^2 &= x^2 + 2c \\ y &= \sqrt{x^2 + k}\end{aligned}$$

▲

Nota. En la última igualdad usamos el hecho de que tanto c como $2c$ son constantes que pueden representarse mediante k , una constante más general.

Ejemplo 1.18. Resuelva la ED:

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 0$$

Solución. Procediendo por separación de variables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 4xy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -4xy \\ dy &= -4xydx \\ \frac{dy}{y} &= -4xdx \\ \int \frac{1}{y} dy &= -4 \int xdx \\ \ln y &= -2x^2 + c \\ e^{\ln y} &= e^{-2x^2 + c} \\ y &= ke^{-2x^2}\end{aligned}$$

¹Al momento de integrar ambos lados de la igualdad solo se considera una constante de integración.

Nota. En la última igualdad utilizamos el hecho de que $k = e^c$ es constante al ser c constante:

$$e^{-2x^2+c} = e^{-2x^2}e^c = ke^{-2x^2}$$

Por lo tanto $y = ke^{-2x^2}$ es la solución. ▲

Ejemplo 1.19. Resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 - 2y}$$

Solución. Procediendo por variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y \cos x}{1 - 2y} \\ (1 - 2y)dy &= y \cos x dx \\ \frac{1}{y}(1 - 2y)dy &= \cos x dx \\ \left(\frac{1}{y} - 2\right)dy &= \cos x dx \\ \int \left(\frac{1}{y} - 2\right)dy &= \int \cos x dx \\ \ln y - 2y &= \sin x + c\end{aligned}$$

Por tanto, la solución queda definida mediante $\ln y - 2y = \sin x + c$. ▲

Nota. En este ejemplo la solución se proporciona de manera implícita.

Ejemplo 1.20. Resuelva:

$$\frac{dy}{dx} + e^{x-y} = 0$$

Solución. Por variables separables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + e^{x-y} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -e^{x-y} = -e^x e^{-y} \\ \frac{1}{e^{-y}} dy &= -e^x dx \\ e^y dy &= -e^x dx \\ e^y &= -e^x + c \\ y &= \ln(-e^x + c)\end{aligned}$$

Luego, $y = \ln(-e^x + c)$ es la solución.



Ejemplo 1.21. Resuelva:

$$(yx - y)dy - (y + 1)dx = 0$$

Solución. Por separación de variables:

$$\begin{aligned}(yx - y)dy - (y + 1)dx &= 0 \\(yx - y)dy &= (y + 1)dx \\y(x - 1)dy &= (y + 1)dx \\ \frac{y}{y + 1}dy &= \frac{1}{x - 1}dx\end{aligned}$$

integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{y + 1}dy &= \int \frac{1}{x - 1}dx \\ \int \left(1 - \frac{1}{y + 1}\right)dy &= \int \frac{1}{x - 1}dx \\ y - \ln(y + 1) &= \ln(x - 1) + c\end{aligned}$$

Por tanto, $y - \ln(y + 1) = \ln(x - 1) + c$ es la solución.



Ejemplo 1.22. Determine la solución de la ED:

$$(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = (1 + y^2)dx$$

Solución. Antes de utilizar separación de variables, es necesario factorizar los términos necesarios:

$$\begin{aligned}(1 + x^2 + (1 + x^2)y^2)dy &= (1 + y^2)dx \\ (1 + x^2)(1 + y^2)dy &= (1 + y^2)dx \\ \frac{1 + y^2}{1 + y^2}dy &= \frac{1}{1 + x^2}dx \\ dy &= \frac{1}{1 + x^2}dx\end{aligned}$$

integrando:

$$\begin{aligned}\int dy &= \int \frac{1}{1 + x^2}dx \\ y &= \arctan x + c \text{ es la solución}\end{aligned}$$



Ejemplo 1.23. Resuelva el PVI:

$$1 + e^{-3x}y' = 0, \text{ sujeto a } y(0) = 1$$

Solución. Resolvemos por separación de variables:

$$\begin{aligned} 1 + e^{-3x}y' &= 0 \\ e^{-3x}\frac{dy}{dx} &= -1 \\ e^{-3x}dy &= -dx \\ dy &= -\frac{dx}{e^{-3x}} \\ dy &= -e^{3x}dx \\ y &= -\frac{1}{3}e^{3x} + c \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = 1$:

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{1}{3}e^{3(0)} + c \\ 1 &= -\frac{1}{3}e^{3(0)} + c \\ \Rightarrow c &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al PVI es $y = -\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$

▲

Ejemplo 1.24. Resuelva el PVI:

$$y' + y^2 - y = 0, \quad y(2) = 4$$

Solución. Procediendo por separación de variables:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y^2 - y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= y - y^2 \\ \frac{dy}{y - y^2} &= dx \\ \frac{dy}{y(1 - y)} &= dx \end{aligned}$$

Utilizando fracciones parciales para integrar:

$$\frac{1}{y(1 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - y} = \frac{A(1 - y) + By}{y(1 - y)}$$

entonces $A(1 - y) + By = 1$; de donde al sustituir $y = 0, y = 1$ se obtienen $A = 1, B = 1$ respectivamente. Por tanto: $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$

Ahora ya es posible la integración:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int dx \\ \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy &= \int dx \\ \ln y - \ln(1-y) &= x + c \\ \ln \left(\frac{y}{1-y} \right) &= x + c \\ \frac{y}{1-y} &= e^{x+c} = e^x e^c \\ \frac{y}{1-y} &= ke^x\end{aligned}$$

Usando la condición inicial $y(2) = 4$:

$$\begin{aligned}\frac{4}{1-2} &= ke^2 \\ -4 &= ke^2 \\ k &= \frac{-4}{e^2} = -4e^{-2}\end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{y}{1-y} = -4e^{x-2}$ define la solución.

▲

Ejemplo 1.25. Determine la solución al PVI:

$$e^y \cos x + \cos x + (e^y \operatorname{sen} x + e^y)y' = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Solución. Utilizando separación de variables y factorizando adecuadamente:

$$\begin{aligned}(e^y + 1) \cos x + e^y(\operatorname{sen} x + 1) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ e^y(\operatorname{sen} x + 1) \frac{dy}{dx} &= -(e^y + 1) \cos x \\ \frac{e^y}{e^y + 1} dy &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1} dx \\ \int \frac{e^y}{e^y + 1} dy &= -\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1} dx\end{aligned}$$

Integramos utilizando las sustituciones $u = e^y + 1$ y $v = \operatorname{sen} x + 1$ en el lado izquierdo y derecho

de la igualdad respectivamente:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u} du &= - \int \frac{1}{v} dv \\ \ln(u) &= -\ln(v) + c \\ \ln(e^y + 1) &= -\ln(\operatorname{sen} x + 1) + \ln(k), \text{ para algún valor } k \text{ tal que } c = \ln(k) \\ \ln(e^y + 1) &= \ln\left(\frac{k}{\operatorname{sen} x + 1}\right) \\ e^y + 1 &= \frac{k}{\operatorname{sen} x + 1} \\ e^y &= \frac{k - \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} \\ y &= \ln\left(\frac{k - \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\right)\end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $y(\pi) = 0$:

$$\begin{aligned}0 &= \ln\left(\frac{k - \operatorname{sen} \pi - 1}{\operatorname{sen} \pi + 1}\right) \\ &= \ln(k - 1) \Rightarrow k = 2\end{aligned}$$

Por tanto, $y = \ln\left(\frac{2 - \operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\right)$ es la solución. ▲

1.8.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.4. Utilice separación de variables para resolver las siguientes ED.

- a) $4tx \frac{dx}{dt} = x^2 + 1$
- b) $(y \ln(x))^{-1} \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y+1}\right)^2$
- c) $\frac{d\theta}{dt} = \cos t (\cos 2\theta - \cos^2 \theta)$
- d) $\frac{dy}{dt} = e^{-2t+3y}$
- e) $\frac{dy}{dx} + y = yxe^{x+2}$
- f) $e^x y dy - (e^{-y} + e^{2x-y}) dx = 0$
- g) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy-3y+x-3}{xy+2y-x-2}$
- h) $2tx^2 + 2t + (t^4 + 1)x' = 0, x(0) = 1$
- i) $\frac{2r-1}{t} dr + \frac{r-2r^2}{t^2-1} dt = 0, r(2) = 4$
- j) $\frac{1}{(y-1)^2} dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dy = 0$

1.9 Método de Euler

Asumiendo que tenemos el problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.13)$$

Utilizamos el siguiente esquema numérico:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (1.14)$$

donde $x_n = x_0 + nh$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, el valor de h es fijado por el usuario y recibe el nombre de tamaño de paso.

Ejemplo 1.26. Considere el PVI:

$$y' = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2, y(2) = 4$$

Use el método de Euler para obtener una aproximación de $y(2.5)$, utilizando $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

Solución. Identificamos $f(x, y) = 0.1\sqrt{y} + 0.4x^2$, luego:

$$y_{n+1} = y_n + h(0.1\sqrt{y_n} + 0.4x_n^2)$$

Asumiendo $h = 0.1$. Para $n = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.1(0.1\sqrt{y_0} + 0.4x_0^2) \\ y_1 &= 4 + 0.1(0.1\sqrt{4} + 0.4(2)^2) \\ y_1 &= 4.18 \end{aligned}$$

la cual es una aproximación para el valor $y(2.1)$, es decir $y(2.1) \approx 4.18$. Este es el resultado de la primera iteración; cada vez que se utilice el esquema numérico se estará realizando una iteración.

De la misma forma para $n = 1$:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 0.1(0.1\sqrt{y_1} + 0.4x_1^2) \\ y_2 &= 4.18 + 0.1(0.1\sqrt{4.18} + 0.4(2.1)^2) \\ y_2 &= 4.3768 \end{aligned}$$

Todos los resultados pueden organizarse en una Tabla:

n	x_n	y_n
0	2.00	4.0000
1	2.10	4.1800
2	2.20	4.3768
3	2.30	4.5914
4	2.40	4.8244
5	2.50	5.0768

El resultado que solicita el ejemplo se encuentra en el último renglón, esto es $y(2.5) \approx 5.0768$

Análogamente cuando $h = 0.05$ se obtiene:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	2.00	4.0000	6	2.30	4.6045
1	2.05	4.0900	7	2.35	4.7210
2	2.10	4.1842	8	2.40	4.8423
3	2.15	4.2826	9	2.45	4.9686
4	2.20	4.3854	10	2.50	5.0997
5	2.25	4.4927			

En este caso el resultado de la aproximación es $y(2.5) \approx 5.0997$



En este ejemplo se observa que cuando el tamaño de paso es más pequeño se realizan más iteraciones para obtener la aproximación solicitada.

Ejemplo 1.27. Considere el PVI $y' = 0.2xy$, $y(1) = 1$. Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de $y(1.5)$ usando $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

Solución. Identificamos $f(x, y) = 0.2xy$, entonces:

$$y_{n+1} = y_n + h(0.2x_n y_n)$$

los resultados se proporcionan en las Tablas:

$h = 0.1$			$h = 0.05$		
n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
0	1.00	1.0000	0	1.00	1.0000
1	1.10	1.0200	1	1.05	1.0100
2	1.20	1.0424	2	1.10	1.0206
3	1.30	1.0675	3	1.15	1.0318
4	1.40	1.0952	4	1.20	1.0437
5	1.50	1.1259	5	1.25	1.0562
			6	1.30	1.0694
			7	1.35	1.0833
			8	1.40	1.0980
			9	1.45	1.1133
			10	1.50	1.1295



Nota. En diversas ocasiones el valor del tamaño de paso puede no aparecer enunciado en el ejercicio, en estos casos el usuario debe definirlo antes de comenzar las iteraciones.

Ejemplo 1.28. Use el método de Euler para obtener un valor aproximado a $y(0.5)$ para la solución de:

$$y' = (x + y - 1)^2, \quad y(0) = 2$$

Solución. Se observa que $f(x, y) = (x + y - 1)^2$, y definimos el tamaño de paso $h = 0.1$, así podemos determinar:

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n - 1)^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + 0.1(0 + 2 - 1)^2 &= 2.100 \\ y_2 &= 2.100 + 0.1(0.1 + 2.1 - 1)^2 &= 2.241 \\ y_3 &= 2.241 + 0.1(0.2 + 2.241 - 1)^2 &= 2.452 \\ y_4 &= 2.452 + 0.1(0.3 + 2.452 - 1)^2 &= 2.759 \\ y_5 &= 2.759 + 0.1(0.4 + 2.759 - 1)^2 &= 3.226 \end{aligned}$$

Por lo tanto $y(0.5) \approx 3.226$.



1.9.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.5. Utilice el método de Euler para obtener una aproximación de cuatro cifras del valor indicado en cada caso.

- a) $y' = 2x - 3y + 1, y(1) = 5, h = 0.1, y(1.2) = ?$
- b) $y' = x + y^2, y(0) = 0, h = 0.1, y(0.2) = ?$
- c) $y' = y, y(0) = 1, h = 0.05, y(1.0) = ?$
- d) $y' = 2xy, y(1) = 1, h = 0.05, y(1.5) = ?$
- e) $y' = e^{-y}, y(0) = 0, h = 0.1, y(0.5) = ?$
- f) $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1, h = 0.1, y(0.5) = ?$
- g) $y' = (x - y)^2, y(0) = 0.5, h = 0.05, y(0.5) = ?$
- h) $y' = xy + \sqrt{y}, y(0) = 1, h = 0.05, y(0.5) = ?$
- i) $y' = xy^2 - \frac{y}{x}, y(1) = 1, h = 0.1, y(1.5) = ?$
- j) $y' = y - y^2, y(0) = 0.5, h = 0.1, y(0.5) = ?$

1.10 Aplicaciones en ingeniería

1.10.1 Crecimiento y descomposición

Existen en el mundo físico, en biología, medicina, demografía, economía e ingeniería, cantidades cuya rapidez de crecimiento o descomposición varía en forma proporcional a la cantidad presente,

es decir:

$$\frac{dx}{dt} = kx, x(t_0) = x_0$$

equivalentemente:

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

que es una ED lineal de primer orden y puede ser resuelta por separación de variables, para obtener:

$$x(t) = ce^{kt}$$

Analizando la condición inicial. Si $x(t_0) = x_0 = ce^{kt_0}$ entonces $c = x_0e^{-kt_0}$. Por lo tanto, $x(t) = x_0e^{k(t-t_0)}$.

En particular, cuando $t = 0$, $x(t) = x_0e^{kt}$.

Desintegración radioactiva

Si Q es la cantidad de material radioactivo presente en el instante t , entonces la E.D. es $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, donde k es la constante de desintegración.

Se llama tiempo de vida media de un material radioactivo al tiempo necesario para que una cantidad Q_0 se transforme en $\frac{Q_0}{2}$.

Ejemplo 1.29. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C^{14} . Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del C^{14} es 5600 años. (Rta.: $t \approx 55,800$ años)

Ley de enfriamiento de Newton

Si se tiene un cuerpo a una temperatura T , sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura T_m (T_m no varía apreciablemente con el tiempo), el enfriamiento de este cuerpo se comporta de acuerdo a la siguiente ED:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

Ejemplo 1.30. Un cuerpo se calienta a $110^\circ C$ y se expone al aire libre a una temperatura de $10^\circ C$. Si al cabo de una hora su temperatura es de 60° . ¿Cuánto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfríe a 30° ? (Rta.: $t = \ln 5 / \ln 2$)

Ley de absorción de Lambert

Esta ley dice que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad x ; es decir, si I es la intensidad de la luz a una profundidad x , entonces $\frac{dI}{dx} = -kI$.

Ejemplo 1.31. En agua limpia la intensidad I a 3 pies bajo la superficie es de un 25% de la intensidad I_0 en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Ejemplo 1.32. Si I a una profundidad de 30 pies es $4/9$ de la intensidad en la superficie; encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

Crecimientos poblacionales

La razón de crecimiento depende de la población presente en el periodo de procreación, considerando las tasas de natalidad y de defunción, el modelo que representa dicha situación es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

donde Q representa la población en el tiempo t .

Ejemplo 1.33. Si en un análisis de una botella de leche se encuentran 500 organismos (bacterias), un día después de haber sido embotelladas y al segundo día se encuentran 8000 organismos. ¿Cuál es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

Ejemplo 1.34. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes regresó con gripa. Si se supone que la gripa se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. Determine el número de agripados cinco días después, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

Ejemplo 1.35. Cuando se produce cierto alimento, se estima en N el número de organismos de una cierta clase presentes en el paquete. Al cabo de 60 días el número N ha aumentado a $1000N$. Sin embargo, el número $200N$ es considerado como el límite saludable. A los cuantos días, después de elaborado, vence el alimento. (Rta.: 46.02 días)

Un modelo más preciso para el crecimiento poblacional es suponer que la tasa per cápita de crecimiento, es decir $\frac{1}{P} \frac{dP}{dt}$, es igual a la tasa promedio de nacimientos, la cual supondremos constante, menos la tasa promedio de defunciones, la cual supondremos proporcional a la población, por lo tanto la ED es:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = b - aP$$

donde a, b son constantes positivas. Esta ED se conoce como ecuación logística.

Resolviendo la ecuación diferencial logística es posible obtener:

$$P(t) = \frac{bP_0 e^{bt}}{b - aP_0 + aP_0 e^{bt}}, \quad P_0 = P(0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{b}{a}$$

1.10.2 Vaciado de tanques

Un tanque de una cierta forma geométrica está inicialmente lleno de agua hasta una altura H . El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área es $A \text{ pie}^2$. Se abre el orificio y el líquido cae

libremente. La razón volumétrica de salida $\frac{dQ}{dt}$ es proporcional a la velocidad de salida y al área del orificio, es decir:

$$\frac{dQ}{dt} = -kAv$$

Utilizando la ecuación de energía $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ implica $v = \sqrt{2gh}$, por tanto:

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

donde $g = 32\text{pie}/s^2 = 9.81m/s^2$. La constante k depende del orificio:

- (i) Si el orificio es de forma rectangular, $k = 0.8$.
- (ii) Si el orificio es de forma triangular, $0.65 \leq k \leq 0.75$.
- (iii) Si el orificio es de forma circular, $k = 0.6$.

El tratamiento de la ecuación diferencial para este modelo, está función de la forma geométrica del tanque, a continuación se resumen algunos casos particulares.

Caso 1. Cilindro circular de altura H_0 pies y radio r pies, dispuesto en forma vertical y con un orificio circular de diámetro ϕ pulgadas, Figura 1.1.

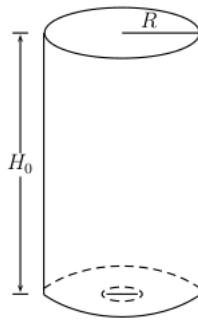


Figura 1.1: Cilindro vertical.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -kA\sqrt{2gh} \\ &= -0.6\pi\left(\frac{\phi}{24}\right)^2\sqrt{2(32)h} \\ &= -4.8\pi\frac{\phi^2}{576}\sqrt{h} \end{aligned}$$

Utilizando separación de variables, es posible resolverla para obtener:

$$2\sqrt{h} = -\frac{4.8}{576r^2}\phi^2t + c$$

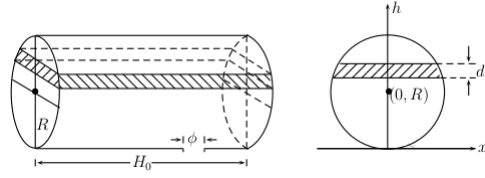


Figura 1.2: Cilindro horizontal.

con las condiciones iniciales, $t = 0, h = H_0$ se determina la constante c .

Caso 2. Mismo cilindro anterior pero dispuesto horizontalmente y con el orificio en el fondo, Figura 1.2.

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -\frac{4.8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}$$

De la Figura 1.2, se induce:

$$dQ = 2x \cdot H_0 \cdot dh$$

y también:

$$\begin{aligned} (x - 0)^2 + (h - R)^2 &= R^2 \\ x^2 + h^2 - 2Rh + R^2 &= R^2 \end{aligned}$$

luego:

$$x = \sqrt{2Rh - h^2}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} dQ &= 2\sqrt{2Rh - h^2}H_0dh \\ \frac{dQ}{dt} &= 2H_0\sqrt{2Rh - h^2}\frac{dh}{dt} \\ 2H_0\sqrt{2Rh - h^2}\frac{dh}{dt} &= -\frac{4.8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \\ 2H_0\sqrt{h}\sqrt{2R - h}\frac{dh}{dt} &= -\frac{4.8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}, h \neq 0 \\ \sqrt{2R - h}\frac{dh}{dt} &= -\frac{4.8\pi\phi^2}{1152H_0} \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales son descritas haciendo $t_0 = 0, h = 2R$ para determinar la constante de integración. Por otro lado, el tiempo de vaciado t_v se calcula haciendo $h = 0$.

Caso 3. Cono circular recto de altura H_0 y radio R en posición vertical con orificio circular en el fondo de diámetro ϕ , Figura 1.3.

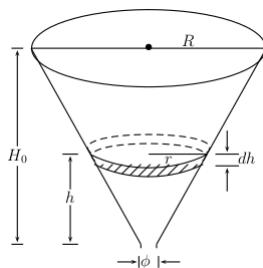


Figura 1.3: Cono.

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= -kA\sqrt{2gh} = -0.6\pi\left(\frac{\phi}{24}\right)^2\sqrt{2 \cdot 32h} \\ \frac{dQ}{dt} &= -\frac{4.8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}\end{aligned}$$

Utilizando semejanza de triángulos en la Figura 1.3, tenemos:

$$\frac{R}{r} = \frac{H_0}{h}, \quad r = \frac{Rh}{H_0}$$

y como $dQ = \pi r^2 dh$, sustituyendo se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \pi \frac{R^2 h^2}{H_0^2} \frac{dh}{dt} \\ \pi \frac{R^2}{H_0^2} h^2 \frac{dh}{dt} &= -\frac{4.8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \\ h^{\frac{3}{2}} \frac{dh}{dt} &= -\frac{4.8\phi^2 H_0^2}{576R^2}\end{aligned}$$

Para la determinación de la constante de integración se utilizan las condiciones iniciales $t = 0, h = H_0$ y el tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$.

Ejemplo 1.36. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque está inicialmente lleno de agua y en el fondo tiene un orificio de 1 pulgada de diámetro. Calcule el tiempo de vaciado. (Rta.: 112 seg.)

Ejemplo 1.37. Un cono circular recto de radio R y altura H tiene su vértice hacia abajo. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área A es controlada por una válvula y es proporcional a la altura del agua en cada instante. Suponiendo que el tanque está lleno de agua, calcule el tiempo de vaciado. Del tiempo de vaciado, ¿qué porcentaje es requerido para vaciar la mitad del volumen? (Rta.: el porcentaje requerido para bajar la mitad del volumen es 29.3 %)

Ejemplo 1.38. Un tanque cúbico de lado 4 pies, está lleno de agua, la cual sale por una hendidura vertical de $\frac{1}{8}$ pulg. de ancho y de 4 pies de alto. Determine el tiempo para que la superficie baje 3 pies. (Ayuda: encontrar el número de pies cúbicos por segundo de agua que salen de la hendidura cuando el agua tiene h pies de profundidad). (Rta.: 360 segundos.)

Ejemplo 1.39. Encontrar el tiempo requerido para llenar un tanque cúbico de lado 3 pies si tiene un orificio circular de 1 pulgada de diámetro en la base y si entra agua al tanque a razón de π pies³/min. (Rta.: 26 min, 14 seg.)

Ejemplo 1.40. Un tanque rectangular vacío de base B^2 pies², tiene un agujero circular de área A en el fondo. En el instante $t = 0$, empieza a llenarse a razón de E pies³/s. Halle t en función de h . Muestre que si el tanque tiene una altura H , nunca se llenaría a menos que $E > 4.8A\sqrt{H}$. (Rta. $t = \frac{2}{a}[b \ln \frac{b}{b-\sqrt{h}} - \sqrt{h}]$, $b > \sqrt{h}$, donde $a = \frac{4.8A}{B^2}$, $b = \frac{E}{4.8A}$)

Ejemplo 1.41. Un embudo de 10 pies de diámetro en la parte superior y 2 pies de diámetro en la parte inferior tiene una altura de 24 pies. Si se llena de agua, halle el tiempo que tarda en vaciarse. (Rta.: 14.016 seg.)

Ejemplo 1.42. Un tanque con una cierta forma geométrica está lleno de agua. El agua sale por un orificio situado en la base a una razón proporcional a la raíz cuadrada del volumen restante en el tanque en todo tiempo t . Si el tanque contiene inicialmente 64 galones de agua y 15 galones salen el primer día, calcule el tiempo en el cual hay 25 galones en el tanque. (Rta.: 72 horas)

Ejemplo 1.43. Un embudo de 5 pies de radio en la parte superior y 1 pie de radio en la parte inferior tiene una altura de H pies. Si se llena de agua:

a) Halle el tiempo de vaciado.

b) Del tiempo de vaciado ¿Qué porcentaje es necesario para que el nivel baje a $\frac{H}{4}$?

(Rta.: a) $2.86\sqrt{H}$; b) 86.41 %)

1.10.3 Aplicaciones a la física

Caso 1. Caída libre. Por la segunda Ley de Newton se cumple:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = m \frac{dv}{dt} = mg$$

luego $\frac{dv}{dt} = g$, $v = gt + c_1$

Asumiendo condiciones iniciales: $t = 0$, $v = v_0$ se obtiene:

$$v = gt + v_0$$

de igual manera:

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0$$

integrando, se obtiene:

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0t + c_2$$

tomando condiciones iniciales $t = 0$, $x = x_0$:

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0t + x_0$$

1.11 Ejercicios complementarios

Ejercicio 1.6. En cada ED indica su orden y señala si es lineal o no lineal.

- | | |
|--|--|
| a) $(1 - x^2)y''' - (\tan x)y' = y$ | f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-1}{y^2-1}$ |
| b) $\sqrt{1-x}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + x^2y = 0$ | g) $\frac{dP}{dt} = kP^2$ |
| c) $\sqrt{y}y'' - x^2y' + 8y = \frac{1}{x}y$ | h) $10\frac{d^2q}{dt^2} + 100\frac{dq}{dt} + 500q = 127\sin 60t$ |
| d) $xy^2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} = 0$ | i) $(6 \times 10^9)\frac{d^4y}{dx^4} = x$ |
| e) $x^3y''' + x^2y'' + xy' + x = 0$ | j) $\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^3 - x$ |

Ejercicio 1.7. Resuelva las ED siguientes indicando en cada caso el método aplicado.

- a) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+y-6}{y-x+1}$
- b) $(e^{-5y} + 1)\cos 2x dx + (1 + \sin 2x)dy = 0$
- c) $y' = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2y^2}$
- d) $y' + \frac{e^y \cos x}{e^y \sin x + y^6} = 0$
- e) $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

Ejercicio 1.8. Determine la solución a cada ED utilizando algún método conveniente.

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{dy}{dx} = 2y$ | k) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2\sin x$ |
| b) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-3x}$ | l) $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$ |
| c) $y' + 3x^2y = 10x^2$ | m) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$ |
| d) $x^2y' + xy = x + 1$ | n) $xy' + (1+x)y = e^{-x}\sin 2x$ |
| e) $\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ | o) $ydx - 4(x+y^6)dy = 0$ |
| f) $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$ | p) $ydx = (ye^y - 2x)dy$ |
| g) $y' + 2xy = x^3$ | q) $\cos x\frac{dy}{dx} + (\sin x)y = 1$ |
| h) $y' = 2y + x^2 + 5$ | r) $\cos^2 x\sin x\frac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$ |
| i) $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$ | s) $(x+1)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = 2xe^{-x}$ |
| j) $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$ | t) $(x+2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$ |

u) $\frac{dr}{d\theta} + r \sec \theta = \cos \theta$

w) $x \frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$

v) $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$

x) $(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

Ejercicio 1.9. Resuelva los problemas de valor inicial.

a) $xy' + y = e^x, y(-1) = 4$

b) $y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2, y(1) = 5$

c) $L \frac{di}{dt} + Ri = E, i(0) = i_0$, donde L, R, E, i_0 son constantes.

d) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), T(0) = T_0$, donde k, T_m, T_0 son constantes.

e) $(x + 1) \frac{dy}{dx} + y = \ln x, y(1) = 10$

f) $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, y(0) = -1$

Crecimiento y decrecimiento

Ejercicio 1.10. Se sabe que la población de una comunidad crece con una razón proporcional al número de personas presentes en ese tiempo t . Si la población inicial P_0 se duplicó en 5 años, ¿En cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?

Ejercicio 1.11. Suponga que se sabe que la población de la comunidad del problema 1 es de 10000 después de tres años. ¿Cuál era la población inicial P_0 ? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 100$?

Ejercicio 1.12. La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t . La población inicial de 500 aumenta en 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años? ¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?

Ejercicio 1.13. La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t . Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Ejercicio 1.14. El isótopo radiactivo del plomo $Pb - 209$, decae con una razón proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene una vida media de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que decaiga 90%?

Ejercicio 1.15. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3%. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t , determine la cantidad que queda después de 24 horas.

Ejercicio 1.16. Calcule la vida media de la sustancia radiactiva del problema 1.15.

Ejercicio 1.17. a) El problema con valores iniciales $dA/dt = kA, A(0) = A_0$ es el modelo de decaimiento de una sustancia radiactiva. Demuestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.

- b) Demuestre que la solución del problema con valores iniciales del inciso a) se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.
- c) Si una sustancia radiactiva tiene la vida media T dada en el inciso a), ¿cuánto tiempo le tomará a una cantidad inicial A_0 de sustancia decaer $\frac{1}{8}A_0$?

Ejercicio 1.18. Cuando el interés es compuesto continuamente, la cantidad de dinero aumenta con una razón proporcional a la cantidad presente S al tiempo t , es decir, $dS/dt = rS$, donde r es la razón de interés anual.

- a) Calcule la cantidad reunida al final de 5 años cuando se depositan \$5000 en una cuenta de ahorro que rinde el $5\frac{3}{4}$ de interés anual compuesto continuamente.
- b) ¿En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?
- c) Utilice una calculadora para comparar la cantidad obtenida en el inciso a) con la cantidad $S = 5000(1 + \frac{1}{4}(0.0575))^5$ que se reúne cuando el interés se compone trimestralmente.

Datado con carbono

Ejercicio 1.19. Los arqueólogos utilizan piezas de madera quemada o carbón vegetal, encontradas en el lugar para datar pinturas prehistóricas de paredes y techos de una caverna en Lascaux, Francia. Utilice un modelo matemático para precisar la edad aproximada de una pieza de madera quemada, si se determinó que 85.5% de su $C - 14$ encontrado en los arboles vivos del mismo tipo se había desintegrado.

Ejercicio 1.20. El sudario de Turín muestra el negativo de la imagen de un hombre que parece que fue crucificado, muchas personas creen que es el sudario del entierro de Jesús de Nazaret. En 1988 el Vaticano concedió permiso para datar con carbono el sudario. Tres laboratorios científicos independientes analizaron el paño y concluyeron que el sudario tenía una antigüedad de 660 años, una antigüedad consistente con su aparición histórica. Usando esta antigüedad determine qué porcentaje de la cantidad original de $C - 14$ quedaba en el paño en 1988.

Ley de Newton enfriamiento/calentamiento

Ejercicio 1.21. Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70°F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10°F . Después de medio minuto el termómetro indica 50°F . ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1\text{ min}$? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15°F ?

Ejercicio 1.22. Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es de 5°F . Después de un minuto, el termómetro indica 55°F y después de 5 minutos indica 30°F . ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?

Ejercicio 1.23. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C , se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumentó 2°C en 1 segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98°C ?

Ejercicio 1.24. Dos grandes tanques A y B del mismo tamaño se llenan con fluidos diferentes. Los fluidos en los tanques A y B se mantienen a 0°C y a 100°C , respectivamente. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es 100°C , se sumerge dentro del tanque A. Después de 1 minuto la temperatura de la barra es de 90°C . Después de 2 minutos se saca la barra e inmediatamente se transfiere a otro tanque. Después de 1 minuto en el tanque B la temperatura se eleva 10°C . ¿Cuánto tiempo, medido desde el comienzo de todo el proceso, le tomará a la barra alcanzar los 99.9°C ?

Ejercicio 1.25. Un termómetro que indica 70°F se coloca en un horno precalentado a una temperatura constante. A través de una ventana de vidrio en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro lee 110°F después de $\frac{1}{2}$ minuto y 145°F después de 1 minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

Ejercicio 1.26. Al tiempo $t = 0$ un tubo de ensayo sellado que contiene una sustancia química está inmerso en un baño líquido. La temperatura inicial de la sustancia química en el tubo de ensayo es de 80°F . El baño líquido tiene una temperatura controlada (medida en grados Fahrenheit) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0.1t}$, $t \geq 0$, donde t se mide en minutos.

- Suponga que $k = -0.1$ en la ecuación (2). Antes de resolver el PVI, describa con palabras cómo espera que sea la temperatura $T(t)$ de la sustancia química a corto plazo. Y a largo plazo.
- Resuelva el problema con valores iniciales. Use un programa de graficación para trazar la gráfica de $T(t)$ en diferentes intervalos de tiempo. ¿Las gráficas concuerdan con sus predicciones del inciso a)?

Ejercicio 1.27. Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 70°F . Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 85°F . Una hora después una segunda medición mostró que la temperatura del corazón era de 80°F . Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura del corazón en ese momento era de 98.6°F . Determine ¿Cuántas horas pasaron antes de que se encontrara el cadáver? (Sugerencia: Sea que $t_1 > 0$ denote el tiempo en que se encontró el cadáver.)

Ejercicio 1.28. La razón con la que un cuerpo se enfría también depende de su área superficial expuesta S . Si S es una constante entonces una modificación de la ecuación (2) es $dT/dt = kS(T - T_m)$, donde $k < 0$ y T_m es una constante. Suponga que dos tazas A y B están llenas de café al mismo tiempo. Inicialmente la temperatura del café es de 150°F . El área superficial del café en la taza B es del doble del área superficial del café en la taza A. después de 30 min la temperatura del café en la taza A es de 100°F . Si $T_m = 70^\circ\text{F}$, entonces ¿cuál es la temperatura del café en la taza B después de 30 min?

Mezclas

Ejercicio 1.29. Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Salmuera que tiene 1 g de sal por litro entra al tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t .

Ejercicio 1.30. Resuelva el problema 1.29 suponiendo que al tanque entra agua pura.

Ejercicio 1.31. Un gran tanque de 500 galones está lleno de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 lb de sal a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Determine la cantidad $A(t)$ de libras de sal que hay en el tanque al tiempo t .

Ejercicio 1.32. En el problema 1.31, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque al tiempo t ? ¿Y al tiempo $t = 5$ min? ¿Cuál es la concentración en el tanque después de un largo tiempo, es decir, conforme a t tiende al infinito? ¿Para qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?

Ejercicio 1.33. Resuelva el problema 1.31 suponiendo que la solución sale con una razón de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?

Ejercicio 1.34. Determine la cantidad de sal en el tanque al tiempo t en el ejemplo 5 si la concentración de sal que entra es variable y está dada por $c_{entra}(t) = 2 + \sin(t/4)$ lb/gal. Sin trazar la gráfica, infiera a qué curva solución del PVI se parecería. Después utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución en el intervalo $[0, 300]$. Repita para el intervalo $[0, 600]$ y compare su gráfica con la que se muestra en la figura 3.1.4 a.

Ejercicio 1.35. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los que se disolvieron 10 libras de sal. La salmuera tiene $\frac{1}{2}$ de sal por galón que entra al tanque a razón de 6 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 4 gal/min. Determine la cantidad de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

Ejercicio 1.36. En el ejemplo 5, no se dio el tamaño del tanque que tiene la solución salina. Suponga, como en el análisis siguiente al ejemplo 5, que la razón con que entra la solución al tanque es de 3 gal/min pero que la solución bien mezclada sale del tanque a razón de 2 gal/min. Esta es la razón por la cual la salmuera se está acumulando en el tanque a razón de 1 gal/min, cualquier tanque de tamaño finito terminará derramándose. Ahora suponga que el tanque está destapado y tiene una capacidad de 400 galones.

- ¿Cuándo se derramará el tanque?
- ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque cuando comienza a derramarse?
- Suponga que el tanque se derrama, que la salmuera continúa entrando a razón de 3 gal/min, que la solución está bien mezclada y que la solución sigue saliendo a razón de 2 gal/min. Determine un método para encontrar la cantidad de libras de sal que hay en el tanque al tiempo $t = 150$ min.
- Calcule la cantidad de libras de sal en el tanque conforme t tiende al infinito. ¿Su respuesta coincide con su intuición?
- Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de $A(t)$ en el intervalo $[0, 500]$.

Ejercicio 1.37. Resuelva el problema 1.29 suponiendo que al tanque entra agua pura.

Circuitos en serie

Ejercicio 1.38. Se aplica una fuerza electromotriz de 30 V a un circuito en serie LR, Figura 1.4, con 0.1 H de inductancia y 50 ohms de resistencia. Determine la corriente $i(t)$, si $i(0) = 0$. Determine la corriente conforme t tiende a infinito.

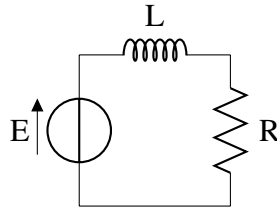


Figura 1.4: Esquema de un circuito LR para la descarga del capacitor.

Ejercicio 1.39. Resuelva la ecuación (7) suponiendo que $E(t) = E_0 \sin \omega t$ y que $i(0) = i_0$.

Ejercicio 1.40. Se aplica una fuerza electromotriz de 100 V a un circuito en serie RC, Figura 1.5, en el que la resistencia es de 200 ohms y la capacitancia es de 10^{-4} farads. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, si $q(0) = 0$. Encuentre la corriente $i(t)$

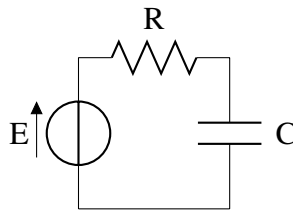


Figura 1.5: Esquema de un circuito RC para la descarga del capacitor.

Ejercicio 1.41. Se aplica una fuerza electromotriz de 200V a un circuito en serie RC, en el que la resistencia es de 1000 ohms y la capacitancia es de 5×10^{-6} farads. Determine la carga $q(t)$ en el capacitor, si $i(0) = 0.4$ amperes. Determine la carga y la corriente en $t = 0.005$ s. Encuentre la carga conforme t tiende a infinito.

Modelos lineales adicionales

Ejercicio 1.42. RESISTENCIA AL AIRE. En la ecuación (14) de la sección 1.3 vimos una ecuación diferencial que describe la velocidad v de una masa que cae sujeta a una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es $m(dv/dt) = mg - kv$, donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. La dirección positiva se toma hacia abajo. a) Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$. b) Utilice la solución del inciso a) para determinar la velocidad límite o terminal de la masa. Vimos cómo determinar la terminal sin resolver la ED del problema 40 en los ejercicios 2.1. c) Si la distancia s , medida desde el punto en el que se suelta la masa se relaciona con la velocidad v por $ds/dt = v(t)$, determine una expresión explícita para $s(t)$, si $s(0) = 0$.

Ejercicio 1.43. ¿QUÉ TAN ALTO?(SIN RESISTENCIA DEL AIRE). Suponga que una pequeña bala de cañón que pesa 16 libras se dispara verticalmente hacia arriba, como se muestra en la figura 3.1.10, con una velocidad inicial de $v_0 = 300$ pies/s. La respuesta a la pregunta "¿Qué tanto sube la bala de cañón?", depende de si se considera la resistencia del aire.

- a) Suponga que se desprecia la resistencia del aire. Si la dirección es positiva hacia arriba, entonces un modelo para la bala del cañón está dado por $d^2s/dt^2 = -g$ (ecuación(12)de la sección 1.3). Puesto que $ds/dt = v(t)$ la última ecuación diferencial es la misma que la ecuación $dv/dt = -g$, donde se toma $g = 32$ pies/s². Encuentre la velocidad $v(t)$ de la bala de cañón al tiempo t .
- b) Utilice el resultado que se obtuvo en el inciso a) para determinar la altura $s(t)$ de la bala de cañón medida desde el nivel del suelo. Determine la altura máxima que alcanzaba la bala.

Ejercicio 1.44. ¿QUÉ TAN ALTO?(RESISTENCIA LINEAL DEL AIRE). Repita el problema 1.43, pero esta vez suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea. Esta es la razón por la que la altura máxima que alcanza la bala del cañón debe ser menor que la del inciso b) del problema 1.43. Demuestre esto suponiendo que la constante de proporcionalidad es $k=0.0025$. [Sugerencia: Modifique ligeramente la ED del problema 35.]

Ejercicio 1.45. PARACAIDISMO. Una paracaidista pesa 125 libras y su paracaídas y equipo juntos pesan otras 35 libras. Después de saltar del avión desde una altura de 15000pies, la paracaidista espera 15 segundos y abre su paracaídas. Suponga que la constante de proporcionalidad del modelo del problema 35 tiene el valor $k = 0.5$ durante la caída libre y $k = 10$ después de que se abrió el paracaídas. Suponga que su velocidad inicial al saltar del avión es igual a cero. ¿Cuál es la velocidad de la paracaidista y qué distancia ha recorrido después de 20 segundos de que saltó del avión? Vea la figura 3.1.11. ¿Cómo se compara la velocidad de la paracaidista a los 20 segundos con su velocidad terminal?¿Cuánto tarda en llegar al suelo?[Sugerencia: Piense en función de dos diferentes PVI.]

Ejercicio 1.46. POBLACIÓN FLUCTUANTE. La ecuación diferencial $dP/dt = (kcost)P$, donde k es una constante positiva, es un modelo matemático para una población $P(t)$ que experimenta fluctuaciones anuales. Resuelva la ecuación sujeta a $P(0) = P_0$. Utilice un programa de graficación para trazar la gráfica de la solución para diferentes elecciones de P_0 .

Ejercicio 1.47. MODELO POBLACIONAL. En un modelo del cambio de población de $P(t)$ de una comunidad, se supone que $dP/dt = (dB/dt) - (dD/dt)$, donde dB/dt y dD/dt son las tasas de natalidad y mortandad, respectivamente.

- a) Determine $P(t)$ si $dB/dt = k_1P$ y $dD/dt = k_2P$.
- b) Analice los casos $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$.

Ejercicio 1.48. MODELO DE COSECHA CONSTANTE. Un modelo que describe la población de una pesquería en la que se cosecha con una razón constante está dada por $dP/dt = kP - h$ donde k y h son constantes positivas.

- a) Resuelva la ED sujeta a $P(0) = P_0$.
- b) Describa el comportamiento de la población $P(t)$ conforme pasa el tiempo en los tres casos $P_0 > h/k$, $P_0 = h/k$ y $0 < P_0 < h/k$.
- c) Utilice los resultados del inciso b) para determinar si la población de peces desaparecerá en un tiempo finito, es decir, si existe un tiempo $T > 0$ tal que $P(T) = 0$. Si la población desaparecerá, entonces determine en qué tiempo T .

Ejercicio 1.49. PROPAGACIÓN DE UNA MEDICINA. Un modelo matemático para la razón con la que se propaga una medicina en el torrente sanguíneo está dado por $dx/dt = r - kx$, donde r y k son constantes positivas. Sea $x(t)$ la función que describe la concentración de la medicina en el torrente sanguíneo al tiempo t .

- a) Ya que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para determinar el valor de $x(t)$ conforme t tiende a infinito.
- b) Resuelva la ED sujeta a $x(0) = 0$. Dibuje la gráfica de $x(t)$ y compruebe su predicción del inciso a). ¿En cuánto tiempo la concentración es la mitad del valor límite?

Ejercicio 1.50. MEMORIZACIÓN. Cuando se considera la falta de memoria, la razón de memorización de un tema está dada por $dA/dt = k_1(M - A) - k_2A$, donde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad memorizada al tiempo t , M es la cantidad total a memorizarse y $M - A$ es la cantidad que falta por memorizar.

- a) Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para determinar el valor límite de $A(t)$ conforme t tiende a infinito. Interprete el resultado.
- b) Resuelva la ED sujeta a $A(0) = 0$. Dibuje la gráfica de $A(t)$ y compruebe su predicción del inciso a).

Ejercicio 1.51. CAJA DESLIZÁNDOSE.

- a) Una caja de masa m se desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal como se muestra en la figura 3.1.13. Determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de la caja al tiempo t para cada uno de los casos siguientes:
 - i) No hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.
 - ii) Hay fricción cinética y no hay resistencia del aire.
 - iii) Hay fricción cinética y hay resistencia del aire. En los casos ii) y iii) utilice el hecho de que la fuerza de fricción que se opone al movimiento es μN , donde μ es el coeficiente de fricción cinética y N es la componente normal del peso de la caja. En el caso iii) suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea.

- b) En el inciso a), suponga que la caja pesa 96 libras, que el ángulo de inclinación del plano es $\theta = 30^\circ$, que el coeficiente de fricción cinética es $\mu = \sqrt{3}/4$, y que la fuerza de retardo debida a la resistencia del aire es numéricamente igual a $\frac{1}{4}v$. Resuelva la ecuación diferencial para cada uno de los tres casos, suponiendo que la caja inicia desde el reposo desde el punto más alto a 50 pies por encima del suelo.

Ejercicio 1.52. CONTINUACIÓN DE CAJA DESLIZÁNDOSE.

- a) En el problema 46 sea $s(t)$ la distancia medida hacia abajo del plano inclinado desde el punto más alto. Utilice $ds/dt = v(t)$ y la solución de cada uno de los tres casos del inciso b) del problema 46 para determinar el tiempo que le toma a la caja deslizarse completamente hacia abajo del plano inclinado. Aquí puede ser útil un programa para determinar raíces con un SAC.
- b) En el caso en que hay fricción ($\mu \neq 0$) pero no hay resistencia del aire, explique por qué la caja no se desliza hacia abajo comenzando desde el reposo desde el punto más alto arriba del suelo cuando el ángulo de inclinación θ satisface $\arctan(\theta) \leq \mu$.
- c) La caja se deslizará hacia abajo del plano conforme $\tan \theta \leq \mu$ si a ésta se le proporciona una velocidad inicial $v(0) = v_0 > 0$. Suponga que $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23^\circ$. Compruebe que $\tan(\theta) \leq \mu$. ¿Qué distancia se deslizará hacia abajo del plano si $v_0 = 1$ pie/s?
- d) Utilice los valores $\mu = \sqrt{3}/4$ y $\theta = 23^\circ$ para aproximar la menor velocidad inicial v_0 que puede tener la caja, para que a partir del reposo a 50pies arriba del suelo, se deslice por todo el plano inclinado. Después encuentre el tiempo que tarda en deslizarse el plano.

Ejercicio 1.53. QUÉ SUBE...

- a) Es bien conocido que el modelo que desprecia la resistencia del aire, inciso a) del problema 36, predice que el tiempo t_a que tarda la bala de cañón en alcanzar su altura máxima es el mismo tiempo t_d que tarda la bala de cañón en llegar al suelo. Además la magnitud de la velocidad de impacto v_i es igual a la velocidad inicial v_0 de la bala de cañón. Compruebe ambos resultados.
- b) Después, utilizando el modelo del problema 37 que considera la resistencia del aire, compare el valor de t_a con t_d y el valor de la magnitud de v_i con v_0 . Aquí puede ser útil un programa para determinar raíces con un SAC(o una calculadora graficadora).

Ecuación logística

Ejercicio 1.54. La cantidad $N(t)$ de súper mercados del país que están usando sistemas de revisión computarizados se describe por el problema con valores iniciales $dN/dt = N(1-0.0005N)$, $N(0) = 1$.

- a) Use el esquema de fase de la sección 2.1 para predecir cuantos súper mercados se esperan que adopten el nuevo procedimiento en periodo de tiempo largo. A mano dibuje una curva solución del problema con valores iniciales datos.

- b) Resuelve el problema con valores iniciales y después utilice un programa de graficación para comprobar y trazar la curva de solución de inciso a). ¿cuántas compañías se espera que adopten la nueva tecnología cuando $t = 10$?

Ejercicio 1.55. La cantidad $N(t)$ de personas en una comunidad bajo la influencia de determinado anuncio esta gobernada por la ecuación logística. Inicialmente $N(0) = 500$ y se observa que $N(1) = 1000$. Determine $N(t)$ si se predice que habrá un límite de 50000 personas en la comunidad que verán el anuncio.

Ejercicio 1.56. Un modelo para la población $P(t)$ en un suburbio de una gran ciudad esta descrito por el problemas con valores iniciales $dP/dt = P(10^{-1} - 10^{-7}P)$, $P(0) = 5000$, donde t se expresa en meses. ¿Cuánto tiempo tardara la población en alcanzar la mitad de ese valor limite?

Ejercicio 1.57. a) En la tabla 3.1 se presentan los datos del censo de los Estados Unidos entre 1970 y 1950. Construya un modelo de población logístico usando los datos de 1970, 1850 y 1910.

- b) Construya una tabla en la que se compare la población real del censo con la población predicha por el modelo del inciso a). calcule el error y el error porcentual para cada par de datos.

Año	Población (en millones)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.433
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948
1900	75.996
1910	91.972
1920	105.711
1930	122.775
1940	131.669
1950	150.697

Tabla 1.1: Datos para el Ejercicio 1.57.

Modificaciones del modelo logístico

Ejercicio 1.58. a) Si se pesca un número constante h de peces de una pesquería por unidad de tiempo, entonces un modelo para la población $P(t)$ de una pesquería al tiempo t está dado por $dP/dt = P(a - bP) - h$, $P(0) = P_0$, donde a, b, h y p_0 son constantes positivas. Suponga que $a = 5$, $b = 1$ y $h = 4$. Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para dibujar curvas solución representativas que representan a los casos $P_0 > 4$, $1 < P_0 < 4$ y $0 < P_0 < 1$. Determine el comportamiento de la población a largo plazo en cada caso.

b) Resuelva el PVI del inciso a) compruebe sus resultados de su esquema de fase del inciso a) utilizando un programa de graficación para trazar la gráfica de $P(t)$ con una condición inicial tomada de cada 8no de los tres intervalos dados.

c) Utilice la información de los incisos a) y b) para determinar si la población de la pesquería desaparecerá en un tiempo finito. De ser así, determine ese tiempo.

Ejercicio 1.59. Investigue el modelo de pesca del problema 5 tanto cualitativa como analíticamente en el caso en que $a = 5$, $b = 1$, $h = 25/4$.

Ejercicio 1.60. Repita el problema 1.60 en el caso $a = 5$, $b = 1$, $h = 7$.

Ejercicio 1.61. a) Suponga $a = b = 1$ en la ecuación diferencial de Gompertz, ecuación (7). Puesto que la ED es autónoma, utilice el concepto de esquema de fase de la sección 2.1 para dibujar curvas solución representativas correspondientes a los casos $P \geq e$ y $0 < P \leq e$.

b) Suponga que $a = 1$, $b = -1$ en la ecuación (7). Utilice un nuevo esquema de fase para dibujar las curvas solución representativas correspondientes a los casos $P_0 > e^{-1}$ y $0 < P_0 < e^{-1}$. c) Encuentre una solución explícita de la ecuación (7) sujeta a $P(0) = P_0$.

Reacciones químicas

Ejercicio 1.62. Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar la sustancia química C. la reacción de reacción es proporcional al producto de las cantidades instantáneas de A y B que no se han convertido en C. al principio hay 40 gramos de A y 50 gramos de B, y por cada gramo de B se consumen dos de A. se observa que a los cinco minutos de han formado 10 gramos de C. ¿Cuántos se forman en 20 minutos de C? ¿Cuál es la cantidad límite de C a largo plazo? ¿Cuánto de las sustancias A y B queda después de mucho tiempo?

Ejercicio 1.63. Resuelva el problema 1.62 si hay al principio 100 gramos de la sustancia química A. ¿Cuándo se formara la mitad de la cantidad límite de C?

Modelos no lineales no adicionales

Ejercicio 1.64. Tanque cónico invertido suponga que se invierte el tanque cónico del problema 13^a, y que sale agua por un agujero circular con un radio de dos pulgadas en el centro de su base circular. ¿El tiempo en que se vacía el tanque lleno es el mismo que para el tanque con el vértice hacia abajo del problema 13? Tome el coeficiente de fricción/concentración de $c = 0.6$ y $g = 32$ pies/ s^2 .

Ejercicio 1.65. Resistencias del aire. Una ecuación diferencial para la ecuación v de una masa m que cae sujeta la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea es:

$$(m)dv/dt = mg - kv^2$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. La dirección es positiva es hacia abajo.

1. Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$.
2. Utilice la solución del inciso a) para determinar la velocidad límite, o terminal de la masa. En el problema 41 de los ejercicios 2.1 vimos como determinar la velocidad terminal sin resolver la ED.
3. Si la distancia s , medida desde el punto donde se suelta la masa sobre el suelo, esta relacionada con la velocidad v por $ds/dt = v(t)$, encuentre una expresión explícita para $s(t)$ si $s(0) = 0$.

Ejercicio 1.66. ¿Qué tan alto? (resistencia del aire no lineal) considere la bala de cañón de 16 libras que se dispara verticalmente hacia arriba en los problemas 36 y 37 en los ejercicios 3.1 con una velocidad inicial $v_0 = 300$ pies/s. determine la altura máxima que alcanza la bala si se supone que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea. Suponga que la dirección es positiva y tome $k = 0.0003$.

Ejercicio 1.67. Esa sensación de hundimiento

- a) determine una ecuación diferencial para la velocidad $v(t)$ de una masa m que se hunde en agua y que le da una proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y también ejerce una fuerza boyante hacia arriba cuya magnitud esta dada por el principio de Arquímedes. Véase el problema 18 de los ejercicios 1.3. Suponga q la dirección positiva es hacia abajo.
- b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a).
- c) Determine la velocidad límite, o terminal, de la masa hundida.

Ejercicio 1.68. a) un modelo simple para la forma de un tsunami o maremoto, esta dada por $dW/dx = W$ donde $w(x) > 0$ es la altura de la ola expresada como una función de su posición respecto a un punto en alta mar. Examinando, encuentre todas las soluciones constantes de la ED.

- b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a). un SAC puede ser útil para la integración.
- c) Use un programa de graficacion para obtener la gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones inicial $W(0) = 2$.

Ejercicio 1.69. Evaporación. Un estanque decorativo con forma de tanque semiesférico se llenara con agua bombeada hacia el tanque por una entrada en su fondo. Suponga que el radio del tanque es $R = 10$ pies, que el agua se bombea a una rapidez pies³/minuto y que al inicio el tanque esta vacio. Conforme se llena el tanque este pierde agua por evaporación. Suponga que la rapidez al área A de la superficie sobre el agua y que la constante de proporcionalidad es $K = 0.01$.

- a) La rapidez de cambio dV/dt del volumen del agua al tiempo t es una rapidez neta. Utilice esta rapidez neta para determinar una ecuación diferencial para la altura h del agua al tiempo t . el volumen de agua que se muestra en la figura es $V = Rh^2 - h^3$, donde $R = 10$. Expresé el área de la superficie del agua $A = r^2$ en términos de h .
- b) Resuelva la ecuación diferencial del inciso a). Trace la grafica solución.
- c) Si no hubiera evaporación, ¿Cuánto tardaría en llenarse el tanque?
- d) Con evaporación, ¿cual es la profundidad del agua en el tiempo que se determino en el inciso c)? ¿Alguna vez se llenará el tanque? demuestre su afirmación.

Ejercicio 1.70. Modelo de inmigración.

- a) En los ejemplos 3 y 4 de la sección 2.1 vimos que cualquier solución $P(t)$ de (4) tiene el comportamiento asintótico $P(t) \rightarrow a/b$ conforme $t \rightarrow \infty$ para $P \geq a/b$ y para $0 < P \leq a/b$; como consecuencia, la solución de equilibrio $P = a/b$ se llama un atractor. Utilice un programa para determinar raíces de un SAC (o una calculadora graficadora) para aproximar la solución del equilibrio del modelo de inmigración $dP/dt = P(1 - P) + 0.3e^{-P}$.
- b) Utilice un programa de graficacion para trazar la grafica de la función $F(P) = P(1 - P) + 0.3e^{-P}$. Explique como se puede utilizar esta grafica para determinar si el numero que se encontró en el inciso a) es un atractor.
- c) Use un programa de solución numérica para comprar las curvas solución de los PVI $dP/dt = P(1 - P)$, $P(0) = P_0$ para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$ con las curvas solución para los PVI. $dP/dt = P(1 - P) + 0.3e^{-P}$, $P(0) = P_0$ Para $P_0 = 0.2$ y $P_0 = 1.2$. Suponga todas las curvas en los mismos ejes de coordenadas pero, si es posible, utilice un color diferente para las curvas del segundo problema con valores iniciales. En un periodo largo, ¿Qué incremento porcentual predice el modelo de inmigración en la población comparado con el modelo logístico?

Ejercicio 1.71. Lo que sube... En el problema 16 sea T_a el tiempo que tarda la bala de cañón en alcanzar su altura máxima y sea T_d el tiempo que tarda en caer desde la altura máxima hasta el suelo. Compare el valor T_a con el valor T_d y compare la velocidad de impacto V_i con la velocidad inicial V_0 . Vea el problema 48 de los ejercicios 3.1 aquí puede ser útil un programa para determinar raíces de un SAC.

Ejercicio 1.72. Paracaidismo. Un paracaidista esta equipado con un cronómetro y un altímetro. El paracaidista abre su para caídas en 25 segundos después de saltar del avión que vuela a una altitud de 20000 pies, y observa que su altitud es de 14000 pies. Suponga que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, la velocidad inicial del paracaidista al saltar del avión es cero y $g = 32$ pies/ s^2 .

- a) Encuentre la distancia $s(t)$, medida desde el avión, que ha recorrido el paracaidista durante la caída libre en el tiempo t .
- b) ¿Qué distancia descendió el paracaidista y cual es su velocidad cuando $t = 15$ s?

Ejercicio 1.73. Impacto en el fondo. Un Helicóptero sobrevuela 500 pies por arriba de un gran tanque abierto lleno de liquido (no agua). Se deja caer un objeto compacto y denso que pesa 160 libras (liberado desde reposo) desde el helicóptero en el líquido. Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea V en tanto el objeto esta en el aire y que el amortiguamiento viscoso es proporcional a V^2 después de que el objeto ha entrado al liquido. Para el aire, tome $k = \frac{1}{4}$, y para el liquido tome $k = 0.1$. Suponga que la dirección positiva es hacia abajo. Si el tanque mide 75 pies de alto, determine el tiempo y la velocidad de impacto cuando el objeto golpea el fondo del tanque.

Ejercicio 1.74. Hombre viejo de río. Suponga que el eje Y y la recta vertical $x = 1$ representan, respectivamente, las playas oeste y este de un río que tiene 1 milla de ancho. El río fluye hacia el norte con una velocidad V_r , donde $|V_r| = V_r$ mi/h es una constante. Un hombre entra a la corriente en el punto $(1, 0)$ en la costa este y nada en dirección y razón respecto al río dada por el vector V_s , donde la velocidad $|V_s| = V_s$ mi/h es una constante. El hombre quiere alcanzar la costa oeste exactamente en $(0, 0)$ y así nadar de tal forma que conserve su vector velocidad V_s siempre con dirección hacia $(0, 0)$. Utilice la trayectoria del nadador en el río es.

$$dy/dx = \frac{V_s y - V_r \sqrt{x^2 + y^2}}{V_s x}$$

Ejercicio 1.75. a) Resuelva la ED del problema 1.75 sujeto a $y(1) = 0$. Por conveniente haga $k = V_r/V_s$.

b) Determine los valores de V_s , para los que el nadador alcanzara el punto $(0, 0)$ examinando $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$ en los casos $k = 1, > 1$ y $0 < k < 1$.

Ejercicio 1.76. Hombre viejo del rio conserva su movimiento. Supóngase que el hombre del problema 1.75 de nuevo entra a la corriente en $(1, 0)$ pero esta vez decide nadar de tal forma que su vector de velocidad v_s esta siempre dirigido hacia la playa oeste. Supóngase que la rapidez $|v_s| = v_s$ mi/h es una constante. Muestre que un modelo matemático para la trayectoria del río es ahora:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_r}{v_s}$$

Ejercicio 1.77. La rapidez de la corriente de un río recto tal como el del problema 1.75 usualmente no es una constante. Mas bien, una aproximación a la rapidez de la corriente (medida en millas por hora) podría ser una función tal como $v_r(x) = 30x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, cuyos valores son pequeños en las costas en este caso $v_r(0) = 0$ y $v_r(1) = 0$ y más grande en la mitad del río. Resuelva la E.D. del problema 1.76 sujeto a $y(1) = 0$, donde $v_s = 2$ mi/h y $v_r(x)$ está dado. Cuando el nadador hace esto a través del río ¿Qué tanto tendrá que caminar en la playa para llegar al punto $(0, 0)$?

Ejercicio 1.78. Gotas de lluvia continúan cayendo... Cuando hace poco se abrió una botella de refresco se encontró que la decía dentro de la tapa de la botella: La velocidad promedio de una gota de lluvia cayendo es de 7 millas/hora. En una búsqueda rápida por la internet se encontró que el meteorólogo Jeff Haby ofrecía información adicional de que una gota de lluvia esférica en "promedio" tenía un radio de 0.04 pulg. Y un volumen aproximado de 0.000000155 pies cúbicos. Utilice estos datos y, si necesita investigue más y haga otras suposiciones razonables para determinar si

"la velocidad promedio de... 7 millas por hora" es considerable con los modelos de los problemas 35 y 36 de los ejercicios 3.1 y con el problema 15 de este conjunto de ejercicios. También vea el problema 34 de los ejercicios 1.3

Ejercicio 1.79. El tiempo gotea. El Clepsidra, o reloj de agua, fue un dispositivo que los antiguos egipcios, griegos, romanos y chinos usaban para medir el paso del tiempo al observar el cambio en la altura del agua a la que se le permitía salir por un agujero pequeño en el fondo de un tanque.

- a) Supóngase que se ha hecho un tanque de vidrio y que tiene la forma de un cilindro circular recto de radio 1 pie. Supóngase que $h(0) = 2$ pies corresponde a agua llena hasta la tapa del tanque, un agujero en el fondo es circular con radio $1/32$ pulg, $g = 32$ pies/ s^2 y $c = 0.6$. Utilice la ecuación diferencial del problema 12 para encontrar la altura $h(t)$ del agua.
- b) Para el tanque del inciso a) ¿a qué altura desde su fondo se debería marcar ese lado, como se muestra en la figura 3.2.9. Que corresponde al paso de una hora? después determine donde colocaría las marcas correspondientes al paso de $2h, 3h, \dots 12h$. Explique por qué estas marcas no están igualmente espaciadas.

$$\text{Ecuación problema 12: } \frac{dh}{dt} = -c \frac{A_h}{A_w} \sqrt{2gh}$$

Ejercicio 1.80. a) Supóngase que un tanque de vidrio tiene la forma de un cono con sección transversal circular como se muestra en la figura 3.2.10. Como en el inciso a) del problema 1.79, supóngase que $h(0) = 2$ pies corresponde a agua llena hasta la parte superior del tanque, un agujero circular en el fondo de radio $1/32$ pulg, $g = 32$ pies/ s^2 y $c = 0.6$. Utilice la ecuación diferencial del problema 12 para encontrar la altura $h(t)$ del agua.

- b) ¿Puede este reloj de agua medir 12 intervalos de tiempo de duración de 1 hora? Explique usando matemáticas.

Series radiactivas

Ejercicio 1.81. Hasta el momento no se han analizado métodos mediante los que se puedan resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, sistemas (2) se pueden resolver sin otro conocimiento que el necesario para resolver una ecuación diferencial lineal. Encuentre una solución de (2) sujeto a las condiciones iniciales $x(0) = x_0, y(0) = 0, z(0) = 0$.

Ejercicio 1.82. En el problema 1.81, supóngase que el tiempo se mide en días, que las constantes de desintegración son $k_1 = -0.138629$ y $k_2 = -0.004951$, y que $x_0 = 20$. Utilice un programa de graficación para trazar las gráficas de las soluciones $x(t), y(t)$ y $z(t)$ en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Utilice las gráficas para determinar las vidas de sustancias X y Y .

Ejercicio 1.83. Utilice las gráficas del problema 1.82 para aproximar los tiempos cuando las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ son las mismas, los tiempos cuando las cantidades $x(t)$ y $z(t)$ son las mismas y los tiempos cuando las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas. ¿Por qué, desde el punto de vista intuitivo, el tiempo determinado cuando las cantidades $y(t)$ y $z(t)$ son las mismas, tiene sentido?

Ejercicio 1.84. Construya un modelo matemático para una serie radiactiva de cuatro elementos W, X, Y y Z , donde Z es un elemento estable.

Mezclas

Ejercicio 1.85. Considere dos tanques A y B, en los que se bombea y se saca líquido en la misma proporción, como se describe mediante el sistema de ecuaciones (3). ¿Cuáles el sistema de ecuaciones diferenciales si, en lugar de agua pura, se bombea el tanque A una solución de salmuera que contiene dos libras de sal por galón?

Modelos de competencia

Ejercicio 1.86. Considere el modelo de competencia definido por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(2 - 0.3y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(1 - 0.1 - y - 0.3x)\end{aligned}$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ se miden en miles y t en años. Use un programa de solución numérica para analizar las poblaciones en un periodo largo para cada uno de los casos siguientes:

- a) $x(0) = 1.5, y(0) = 3.5$
- b) $x(0) = 1, y(0) = 1$
- c) $x(0) = 2, y(0) = 7$
- d) $x(0) = 4.5, y(0) = 0.5$

Ejercicio 1.87. Considere el modelo de competencia definido por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1 - 0.1x - 0.05y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(1.7 - 0.1y - 0.15x)\end{aligned}$$

donde las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ se miden en miles y t en años. Utilice un programa de solución numérica para analizar las poblaciones en un periodo largo para cada uno de los casos siguientes:

- a) $x(0) = 1, y(0) = 1$
- b) $x(0) = 4, y(0) = 10$
- c) $x(0) = 9, y(0) = 4$

d) $x(0) = 5.5, y(0) = 3.5$

Modelos no lineales adicionales

Ejercicio 1.88. MODELO SIR. Una enfermedad contagiosa se propaga en una pequeña comunidad, con una población fija de n personas, por contacto entre individuos infectados y personas que son susceptibles, a la enfermedad. Suponga al principio que todos son susceptibles a la enfermedad y que nadie sale de la comunidad mientras se propaga la epidemia. En el tiempo t , sea $s(t)$, $i(t)$ y $r(t)$, a su vez, el número de personas en la comunidad (medido en cientos) que son susceptibles a la enfermedad pero están infectadas con la enfermedad y el número de personas que se han recuperado de la enfermedad. Explique por qué el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -k_1 si \\ \frac{di}{dt} &= k_2 i + k_1 si \\ \frac{dr}{dt} &= k_2 i\end{aligned}$$

donde k_1 (llamada la razón de infección) y k_2 (llamada la razón de eliminación) son constantes positivas, es un modelo SIR, para la propagación de la epidemia en la comunidad. Asigne condiciones iniciales posibles relacionadas con este sistema de ecuaciones.

Ejercicio 1.89. a) En el problema 1.88, explique por qué es suficiente analizar solo:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -k_1 si \\ \frac{di}{dt} &= k_2 i + k_1 si\end{aligned}$$

- b) Supóngase que $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.7$ y $n = 10$. Elija varios valores de $i(0) = 0, 0 < i_0 < 10$. Use un programa de solución numérica para determinar lo que predice el modelo acerca de la epidemia en los dos casos $s_0 > k_2/k_1$ y $s_0 \leq k_2/k_1$. En el caso de una epidemia, estime el número de personas que finalmente se infectan.

Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

2.1 Descripción de la unidad

2.1.1 Competencias específicas a desarrollar

- Modelar la relación existente entre una función desconocida y una variable independiente mediante una ecuación diferencial lineal de orden superior que describe algún proceso dinámico (Movimiento vibratorio y circuitos eléctricos).
- Comprender la importancia de la solución de una EDL homogénea en la construcción de la solución general de una no homogénea.
- Aplicar el método de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros, seleccionando el más adecuado en situaciones específicas.

2.1.2 Estrategias de enseñanza

- Identificar un problema de valor inicial y expresar las condiciones del mismo.
- Resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior: a) Homogéneas. b) No homogéneas (Método de los coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros).
- Reconocer los alcances y limitaciones de cada método.
- Interpretar gráficamente las soluciones.
- Modelar situaciones típicas utilizando ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

2.2 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

En esta sección resolveremos EDO lineales homogéneas de segundo orden de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.1)$$

Para resolver la ecuación homogénea 2.1 utilizamos las raíces de su respectiva ecuación característica:

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2.2)$$

donde encontramos tres casos resumidos en el siguiente Teorema.

Teorema 4

CASO 1. Si m_1, m_2 son reales y distintos, entonces la solución general a la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \quad (2.3)$$

CASO 2. Si m_1, m_2 son reales y $m_1 = m_2$, entonces la solución general a la homogénea queda:

$$y_h(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x} \quad (2.4)$$

CASO 3. Por último, si $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$, entonces la solución general a la homogénea es:

$$y_h(x) = e^{\alpha x} [C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)] \quad (2.5)$$

Ejemplo 2.1. Resuelva las siguientes ED:

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

b) $y'' - 10y' + 25y = 0$

c) $y'' + 4y' + 7y = 0$

Solución. a) La ecuación característica resulta $2m^2 - 5m - 3 = 0$. Resolviendo por fórmula general se obtiene:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(-3)}}{4} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \\ &= \frac{5 \pm 7}{4} \\ m_1 &= 3 \\ m_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego por el caso 1 del Teorema 4: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

b) La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 - 10m + 25 &= 0 \\ (m - 5)^2 &= 0 \\ m_{1,2} &= 5 \end{aligned}$$

entonces por el caso 2, $y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$

c) La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} m^2 + 4m + 7 &= 0 \\ m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} \\ m_1 &= -2 + \sqrt{3}i \\ m_2 &= -2 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

luego por el caso 3, $y = e^{-2x}(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \text{sen}(\sqrt{3}x))$

▲

Ejemplo 2.2. Resuelva el PVI:

$$4y'' + 4y' + 17y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

Solución. La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} 4m^2 + 4m + 17 &= 0 \\ m_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 272}}{8} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-256}}{8} \\ &= \frac{-4 \pm 16i}{8} \\ m_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm 2i \end{aligned}$$

Por el caso 3, la solución general es:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \text{sen}(2x))$$

Utilizando la condición inicial $y(0) = -1$:

$$\begin{aligned}-1 &= e^{-\frac{1}{2}(0)}(c_1 \cos(2(0)) + c_2 \operatorname{sen}(2(0))) \\ -1 &= c_1\end{aligned}$$

Para usar la condición $y'(0) = 2$, derivamos $y = e^{-\frac{1}{2}x}(-\cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x))$, entonces:

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(-\cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)) + e^{-\frac{1}{2}x}(2\operatorname{sen}(2x) + 2c_2 \cos(2x)) \\ 2 &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(0)}(-\cos(2(0)) + c_2 \operatorname{sen}(2(0))) + e^{-\frac{1}{2}(0)}(2\operatorname{sen}(2(0)) + 2c_2 \cos(2(0))) \\ 2 &= -\frac{1}{2}(-1) + 1(2c_2) \\ \Rightarrow c_2 &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = e^{-\frac{1}{2}x}(-\cos(2x) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}(2x))$ es la solución.

▲

2.2.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1. Determine la solución general a cada ED.

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) $2y'' + y' = 0$ | h) $y'' + 4y' - y = 0$ |
| b) $y'' - 36y = 0$ | i) $3y'' + y = 0$ |
| c) $y'' + y' - 6y = 0$ | j) $y'' + 4y' + 5y = 0$ |
| d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ | k) $3y'' + 2y' + 2y = 0$ |
| e) $y'' + 10y' + 25y = 0$ | l) $2y'' + 2y' + y = 0$ |
| f) $12y'' - 5y' - 3y = 0$ | m) $2y'' - 3y' + 4y = 0$ |
| g) $y'' + 49y = 0$ | |

Ejercicio 2.2. Resuelva los PVI:

- $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
- $\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$
- $\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$
- $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$
- $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
- $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, y'(0) = 10$

2.3 Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

Definimos una Ecuación no homogénea de coeficientes constantes con el Teorema siguiente:

Teorema 5

Sea

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (2.6)$$

una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden. Si y_p es una solución particular de la ecuación no homogénea (2.6) y y_h es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente, entonces $y = y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación homogénea (2.6).

De modo que, para resolver ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, únicamente necesitamos encontrar una solución particular y_p .

Para resolver una ecuación diferencial no homogénea de orden superior con coeficientes constantes $ay'' + by' + cy = g(x)$ debemos encontrar la solución a la homogénea $ay'' + by' + cy = 0$. Entonces es necesario seguir los pasos siguientes:

1. Resolver la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ mediante la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$.
2. Extraer las raíces de la ecuación característica, donde encontramos tres casos señalados en el Teorema 4.
3. Encontrar una solución particular y_p a la ecuación no homogénea $ay'' + by' + cy = g(x)$, de acuerdo a la Tabla 2.1.
4. La solución general a la ecuación no homogénea está dada por:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (2.7)$$

Supongamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3. Encuentre la solución general a la ecuación diferencial no homogénea:

$$y'' - 3y' + 5y = 1 - x^2$$

Solución. Aplicando el Paso 1 resolviendo la ecuación igual a cero y posteriormente utilizamos la ecuación característica: $m^2 - 3m + 5 = 0$

$g(x)$	Forma de y_p
1 (una constante)	A
$5x + 7$	$Ax + B$
$3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\text{sen } 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
$\cos 4x$	$A \cos 4x + B \text{sen } 4x$
e^{5x}	Ae^{5x}
$(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
$x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
$e^{3x} \text{sen } 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \text{sen } 4x$
$5x^2 \text{sen } 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Dx^2 + Ex + F) \text{sen } 4x$
$xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \text{sen } 4x$

Tabla 2.1: Solución particular tentativa.

Para resolver esta ecuación podemos utilizar la formula general:

$$\begin{aligned}
 m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 m_{1,2} &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{-3^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\
 &= \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2}
 \end{aligned}$$

Sabemos que $\sqrt{-11}$ es un numero imaginario, determinamos que $\sqrt{-11} = \sqrt{(-1)(11)} = (\sqrt{-1})(\sqrt{11}) = \sqrt{11}i$

Así que nos queda: $m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$

Aplicamos el Paso 2 con el Caso 3:

$$y_h = e^{\frac{3}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + c_2 \text{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) \right]$$

Continuamos con el Paso 3, determinar una solución particular, es decir y_p .

Vamos a encontrar y_p que cumpla $y_p'' - 3y_p' + 5y_p = 1 - x^2$. Como la función está dada por $1 - x^2$ podemos suponer que es un polinomio de grado 2, es decir, de la forma $Ax^2 + Bx + C$ (observe la Tabla 2.1), entonces si $y_p = Ax^2 + Bx + C$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 y_p' &= 2Ax + B \\
 y_p'' &= 2A
 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos en $y_p'' - 3y_p' + 5y_p = 1 - x^2$, con la finalidad de obtener valores para A , B y C :

$$\begin{aligned} 2A - 3(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) &= 1 - x^2 \\ 2A - 6Ax - 3B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C &= 1 - x^2 \\ 5Ax^2 + (-6A + 5B)x + 2A - 3B + 5C &= -x^2 + 1 \end{aligned}$$

Esta última igualdad produce un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5A &= -1 \\ -6A + 5B &= 0 \\ 2A - 3B + 5C &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, utilizando eliminación de Gauss-Jordan, obtenemos:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 5 & 0 & -6/5 \\ 0 & -3 & 5 & 7/5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -6/25 \\ 0 & 0 & 5 & 17/25 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -6/25 \\ 0 & 0 & 1 & 17/125 \end{array}$$

Entonces $A = -1/5$, $B = -6/25$, $C = 17/125$, implica $y_p = -1/5x^2 - 6/25x + 17/125$.

Luego la solución general a la EDO consiste en:

$$y = e^{\frac{3}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{11}}{2}x\right) \right] - 1/5x^2 - 6/25x + 17/125$$

▲

Ejemplo 2.4. Determine la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' - 3y = 2\operatorname{sen} x$$

Solución. La solución general y_h de la ecuación homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$, está dada por:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

Considerando $\Rightarrow g(x) = 2\operatorname{sen} x$, una solución particular tendrá la forma $y_p = A \cos x + B \operatorname{sen} x$. Entonces:

$$\begin{aligned} y_p' &= -A \operatorname{sen} x + B \cos x \\ y_p'' &= -A \cos x - B \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ED, queda:

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' - 3y_p &= 2\operatorname{sen} x \\ -A \cos x - B \operatorname{sen} x - 2(-A \operatorname{sen} x + B \cos x) - 3(A \cos x + B \operatorname{sen} x) &= 2\operatorname{sen} x \\ (-4A - 2B) \cos x + (2A - 4B) \operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de términos análogos, obtenemos el sistema de ecuaciones $-4A - 2B = 0$, $2A - 4B = 2$. Este sistema tiene soluciones $A = 1/5$, $B = -2/5$, en consecuencia:

$$y_p = \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x$$

Por tanto, la solución general consiste en:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \operatorname{sen} x$$

▲

Ejemplo 2.5. Resuelva el PVI:

$$y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

Solución. Resolvemos la correspondiente ED homogénea:

$$y_h'' + 4y_h' + 4y_h = 0$$

con ecuación característica:

$$m^2 + 4m + 4 = 0$$

donde $m_{1,2} = -2$, corresponde a un Caso 2:

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

Para proponer una solución particular nos basamos de la Tabla 2.1, lo cual implicaría $y_p = (Ax + B)e^{-2x}$, sin embargo, ambos términos de esta propuesta aparecen en la solución de la ecuación homogénea. Una forma de generar una nueva propuesta, consiste en multiplicar por x de manera recurrente hasta que los términos de la solución no se repitan. De esta manera, consideremos:

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x}$$

calculando sus derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned} y_p' &= (-2Ax^3 + (-2B + 3A)x^2 + 2Bx)e^{-2x} \\ y_p'' &= (4Ax^3 + (4B - 6A - 6A)x^2 + (-4B - 4B + 6A)x + 2B)e^{-2x} \end{aligned}$$

sustituimos en la ED:

$$\begin{aligned}
 y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= (3+x)e^{-2x} \\
 (4Ax^3 + (4B - 12A)x^2 + (-8B + 6A)x + 2B)e^{-2x} &+ (-8Ax^3 + (-8B + 12A)x^2 + 8Bx)e^{-2x} \\
 + (4Ax^3 + 4Bx^2)e^{-2x} &= (3+x)e^{-2x} \\
 (6Ax + 2B)e^{-2x} &= (3+x)e^{-2x}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 6A &= 1 \\
 2B &= 3
 \end{aligned}$$

con soluciones $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{2}$.

Por tanto, la solución particular es:

$$y_p = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x}$$

y la solución general consiste en:

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x}$$

Ahora adaptaremos las condiciones iniciales.

Usamos $y(0) = 2$:

$$c_1e^{-2(0)} + c_2(0)e^{-2(0)} + \left(\frac{1}{6}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)e^{-2(0)} = 2$$

donde se obtiene $c_1 = 2$.

Para la segunda condición inicial, se requiere el cálculo de la derivada:

$$y' = -4e^{-2x} - 2c_2xe^{-2x} + c_2e^{-2x} - 2\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)e^{-2x}$$

Usamos $y'(0) = 5$:

$$-4e^{-2(0)} - 2c_2(0)e^{-2(0)} + c_2e^{-2(0)} - 2\left(\frac{1}{6}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2\right)e^{-2(0)} + \left(\frac{1}{2}(0)^2 + 3(0)\right)e^{-2(0)} = 5$$

obteniendo $-4 + c_2 = 5$, luego $c_2 = 9$.

Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es:

$$y = 2e^{-2x} + 9xe^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)e^{-2x}$$

▲

2.3.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.3. En cada caso resuelva la ecuación diferencial mediante coeficientes indeterminados.

a) $y'' + 3y' + 2y = 6$

f) $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

b) $4y'' + 9y = 15$

g) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$

c) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

h) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$

d) $y'' + y' - 6y = 2x$

i) $y'' - y' = -3$

e) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

j) $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$

Ejercicio 2.4. Determine la solución a los problemas de valor inicial:

a) $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$

b) $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

c) $5y'' + y' = -6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -10$

d) $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$

e) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1$

2.4 ¿Qué es un modelo?

Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos el objetivo no es producir una copia exacta del objeto real. Sino más bien representar algunas características de la cosa real. Por ejemplo un retrato, una persona, un maniquí y un cerdo pueden ser modelos de un ser humano. Y aunque ninguno sea una copia perfecta de este. Si poseen ciertos aspectos en común con un ser humano. La pintura describe la apariencia física de un individuo en particular; el maniquí porta ropa tal como una persona y el cerdo está vivo. Cuál de los tres modelos es mejor depende de cómo usemos el modelo para recordar viejos amigos, para comprar ropa o para estudiar la biología.

Los modelos matemáticos que estudiaremos son sistemas que evolucionan con el tiempo. Pero con frecuencia también están supeditados a otras variables por ejemplo el numero de leones de montaña, el número de ratones (alimentos alternativos para los depredadores), de las prácticas actuales usuales agrícolas, del clima de varias enfermedades, etc.

Una vez elaborado el modelo debemos compara las predicciones de este con los datos del sistema si el modelo y el sistema concuerdan tendremos confianza en que las hipótesis hechas al crear el modelo son razonables y que podemos usarlas para hacer predicciones sino concuerdan entonces debemos estudiar y mejorar nuestras suposiciones en todo caso aprendemos más acerca del sistema al compararlo con el modelo.

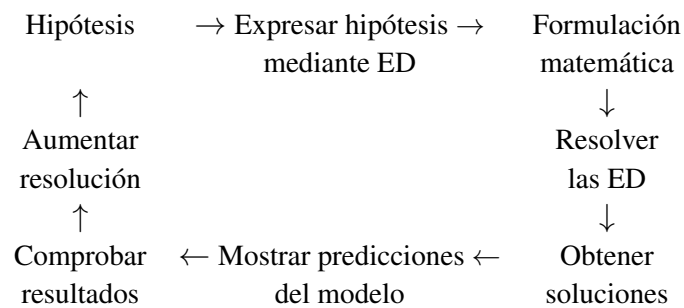
Algunas sugerencias para la construcción de modelos y los pasos básicos para elaborar un modelo son:

Paso 1. Establezca claramente las hipótesis en las cuales se basará el modelo. Estas deben describir las relaciones entre las cantidades por estudiarse.

Paso 2. Defina completamente las variables y los parámetros que se usarán en el modelo.

Paso 3. Use las hipótesis formuladas en el paso (1) para obtener ecuaciones que relacionen las cantidades del paso (2)

Prueba del modelo. Antes de verificar un modelo se deben tener en cuenta las siguientes cuestiones: ¿Son razonables las hipótesis? ¿Son correctas las dimensiones físicas de las variables? ¿Es el modelo, internamente consistente, en el sentido de que las ecuaciones no se contradigan entre si? ¿Las ecuaciones pertinentes poseen solución? ¿Qué tan difícil resulta obtener soluciones? ¿Proporcionan las soluciones una respuesta del problema estudiado?



2.5 ¿Qué predice el modelo?

Más importante que los adjetivos o como se escriben en la ecuación es preguntar que nos dice acerca de la situación que esta modelando. Como $dp/dt = kp$ para alguna constante k , $dp/dt = 0$ si $p = 0$. Entonces la función constante $p(t) = 0$ es una solución de la ecuación diferencial a este tipo especial se le denomina solución de equilibrio porque es constante para siempre en términos del modelo de población corresponden a una especie que es no existente. Si $p(t_0) \neq 0$ en consecuencia la población no es constante si $K > 0$ y $p(t_0) > 0$, tenemos en el tiempo $t = t_0$ y la población está creciendo (como era de esperarse) conforme t crece $p(t)$ se vuelve mayor por lo que dp/dt aumenta. A su vez, $p(t)$ tenga la forma mostrada en las siguientes dos figuras 2.1 y 2.2

por lo que $p(t)$ inicialmente esta disminuyendo al crecer t , $P(t)$ se vuelven más enfáticas la imagen de abajo del eje t es la reflexión de la imagen superior aunque esto no es físicamente importante por que una población negativa no tiene sentido nuestro análisis de la manera en que $P(t)$ crece cuando t aumenta se llama análisis cualitativo de la ecuación diferencial si todo lo que nos interesa es saber si el modelo predice explosiones de población entonces podemos responder que "si tanto que $P(0) > 0$, Solución analíticas de la ecuación diferencial.

Si por otra parte conocemos el valor exacta de P_0 de $P(0)$ y queremos predecir el valor de $P(10)$ o $P(100)$, entonces necesitamos información más precisa sobre la función de $P(t)$. El par de ecuaciones:

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad (2.9)$$

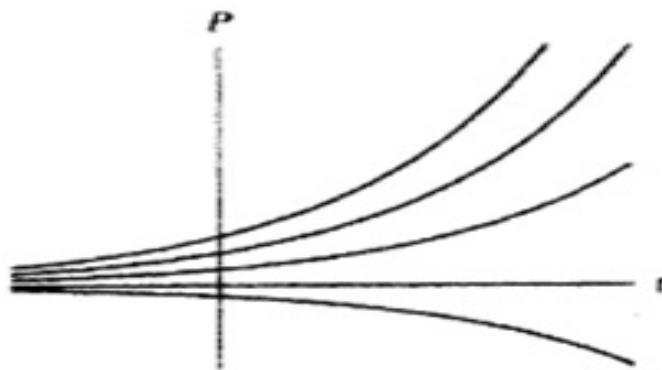


Figura 2.1: Las gráficas de diversas funciones que satisfacen la ecuación diferencial $dp/dt = Kt$ cada una tiene un valor diferente en $t=0$

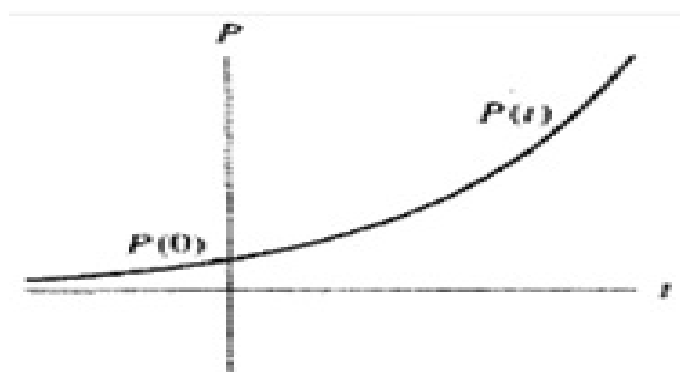


Figura 2.2: La grafica de una función que satisface la ecuación diferencial $dP/dt = KP$

$$P(0) = P_0$$

A lo que se le llama problema de valor inicial (se estudiará en el capítulo 1.6)

2.6 Modelo de Malthus

Se llaman modelos de Malthus o modelos malthusianos a todos aquellos en los que se considera que los nacimientos y las muertes son proporcionales a la propia población, es decir: tasa de nacimiento = aN , tasa de muertes = bN , con a y b constantes evidentemente positivas, mientras que no existen migraciones. La ecuación será por tanto:

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN = kN \quad (2.10)$$

Donde $k = a - b$ será positiva si la tasa de natalidad es mayor que la tasa de mortalidad negativa en caso contrario y nula si se produce la situación ideal en las que ambas coinciden(las

unidades en la que viene dada k son evidentemente de T^{-1}), inverso de tiempo) La solución de la ecuación diferencial ordinaria $N' = kN$ (se trata de una ecuación autónoma y por lo tanto variables separables) y se tienen:

$$N(t) = ce^{kt} \quad (2.11)$$

Si se dispone como dato añadido de la población en el instante inicial $N(t_0) = N_0$, podemos determinar la solución particular del correspondiente problema de Cauchy (En la figura 2.3. Muestra gráficamente el modelo de Cauchy)

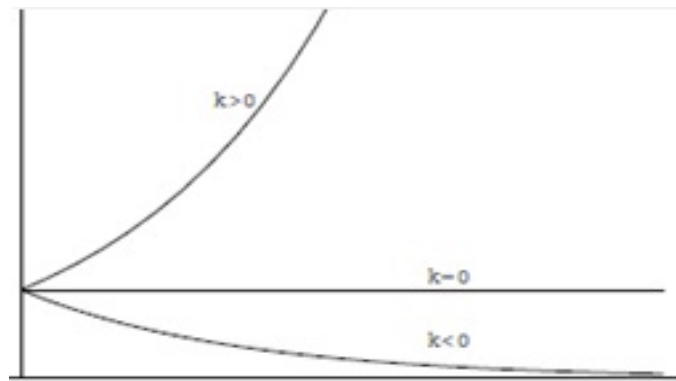


Figura 2.3: Grafica de tres soluciones posibles de la ecuación de Malthus con idéntico valor de N_0 , correspondientes a un valor de k positivo, negativo y nulo

En general se considera el inicio del tiempo en el instante t_0 , es decir $t_0 = 0$, con lo cual la solución se reduce a:

$$N(t) = N_0 e^{kt} \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.6. En un cultivo de bacterias se estimó que inicialmente había 150 bacterias y 200 después de una hora (h). Suponiendo una rapidez de crecimiento proporcional a la cantidad de bacterias presente, determine:

- La cantidad de bacterias después de t horas.
- La cantidad de bacterias después de 2h.

Solución. a) Si $P(t)$ es la cantidad de bacterias presente después de t horas, entonces $P(0) = P_0 = 150$ y $P(1) = P_1 = 200$. Luego $P(t)$ esta dada por la solución al PVI: $P'(t) = kP(t)$. Con $P(0) = 150$ además $P(1) = 200$ Puesto que $P(t) = ce^{kt}$, se tiene: $P(0) = 150 \Rightarrow ce^0 = 150 \Rightarrow c = 150 \Rightarrow P(t) = 150e^{kt}$

$$P(1) = 200 \Rightarrow 150e^k = 200 \Rightarrow e^k \Rightarrow 200/150 = 4/3 \Rightarrow k = \ln(4/3) = 0.2877$$

Por tanto, $P(t) = 150e^{0.2877t}$ es la solución del PVI y es la cantidad de bacterias después de t horas.

b) La cantidad de bacterias después de 2 horas es:

$$P(2) = 150e^{0.2877(2)} \approx 266.6666 \approx 267 \text{ bacterias}$$

▲

2.7 Modelo Logístico

El modelo de Malthus tiene muchas limitaciones. Por ejemplo, predice que una población crecerá exponencialmente con el tiempo, que no ocurre en la realidad. Si la especie considerada dispone de todos los medios para vivir, como espacio, aire, alimento, entonces su crecimiento será de tipo exponencial; pero si los recursos escasean, entonces habrá competencia para acceder a ellos (peleas, guerras a veces, supervivencia de los más fuertes...) y la razón de crecimiento no será la misma.

Por esta razón al modelo de Malthus se le llama de crecimiento irrestricto, mientras que el modelo presentado a continuación se denomina modelo de crecimiento con restricciones. El modelo llamado de crecimiento logístico, fue introducido por Pierre François Verhulst en 1838 y supone que la razón de crecimiento es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable. Escribiremos dicho modelo como dP/dt

$$\frac{dp}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \quad (2.13)$$

En este modelo el número r se conoce como la razón de crecimiento intrínseco, y K es la capacidad sustentable que es el máximo valor que puede tener P . El valor de r depende sólo de la especie considerada, mientras que K depende tanto de la especie como del ambiente en donde se desarrolla ésta y es el máximo valor posible en ese ambiente. Advierta que, si el valor de P es muy pequeño comparado con K , entonces $(1 - \frac{P}{K})$ es aproximadamente 1 y la ED. (1.4) es semejante a la de Malthus. Por otro lado, si P se aproxima a K entonces $1 - \frac{P}{K} \approx 0$

y esto haría que $\frac{dP}{dt} \approx 0$;

en consecuencia la población $P(t)$ sería casi constante. Resolvamos la ED. Observemos que es separable:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rdt \Rightarrow \int \frac{dp}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = rt + C. \quad (2.14)$$

2.8 Aplicaciones de las ecuaciones lineales

El problema de valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.15)$$

en donde k es una constante aparece en muchas teorías física que involucran crecimiento, o bien, decrecimiento. por ejemplo, en biología a menudo se observa que la rapidez con que ciertas bacterias se multiplican, es proporcional al número de bacterias presentes en ciertos instantes. Para cortos intervalos de tiempo la magnitud de una población de animales pequeños como roedores pueden predecirse con bastante exactitud mediante la solución de (2.15).

En física un problema de valor inicial como (2.15) proporciona un modelo para próxima la cantidad restante de una sustancia que se desintegran radiactivamente. También puede determinar la temperatura de un cuerpo que se enfría.

En química la cantidad de sustancia que quema durante cierta reacción también está descrita por (2.15). La constante de proporcionalidad k puede ser negativa o positiva y ser determinada resolviendo el problema mediante una medida subsecuente de x en un tiempo $t_1 > t_0$

Ejemplo 2.7. La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes de dicho instante, su población inicial de 500 aumenta 15 por ciento en 10 años ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Solución. Resolviendo la ED:

$$\frac{dN}{dt} = kN \Rightarrow N(t) = ce^{kt} \quad (2.16)$$

Del problema sabemos que $N(0) = 500$ y $N(10) = 575$, podemos determinar lo siguiente:

$$N(0) = ce^{0(k)} = 500 \Rightarrow c = 500$$

$$N(10) = 500e^{10k} = 575 \Rightarrow 500e^{10k} = 575 \Rightarrow e^{10k} = 575/500 = 1.15 \Rightarrow 10k = \ln(1.15) \Rightarrow k = \frac{\ln(1.15)}{10} = 0.013976$$

Entonces la población en el tiempo t se encuentra definida mediante:

$$N(t) = 500e^{0.013976t}$$

La solución para la cantidad de población en 30 años será de:

$$N(30) = 500e^{30(0.013976)} = 760$$

Es decir, que la población en 30 años será de 760 habitantes.



2.9 Ejercicios complementarios

Ejercicio 2.5. Encuentre la solución al problema con valor inicial dado.

a) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$

c) $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, y'(0) = 0$

d) $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 3$

e) $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0$

f) $4y'' - y = 0, y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$

Ejercicio 2.6. Determine la solución a las ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales indicadas.

a) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, y'(0) = 1$

b) $x'' + \omega x = F_0 \text{sen } \omega t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$ donde ω y F_0 son constantes.

c) $x'' + \omega x = F_0 \cos \omega t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0$ donde ω y F_0 son constantes.

d) $y'' + y = \cos x - \text{sen } 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

e) $y'' - 2y' - 3y = 2 \cos^2 x, \quad y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0$

f) $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

Ejercicio 2.7. En cada caso resuelva la ecuación diferencial mediante coeficientes indeterminados.

a) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{\frac{x}{2}}$

i) $y'' + 2y' + y = \text{sen } x + 3 \cos 2x$

b) $y'' - 16y = 2e^{4x}$

j) $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$

c) $y'' + 4y = 3 \text{sen } 2x$

k) $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

d) $y'' - 4y = (x^2 - 3) \text{sen } 2x$

l) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$

e) $y'' + y = 2x \text{sen } x$

m) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

f) $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

n) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

g) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$

o) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$

h) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 2 \text{sen } x)$

p) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

Ejercicio 2.8. Determine la solución a los problemas de valor inicial:

a) $y'' - y = \cosh x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12$

b) $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$

c) $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = \frac{5}{2}, \quad y''(0) = -\frac{9}{2}$

d) $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = -4$

Ejercicio 2.9. Resuelva los problemas con valores en la frontera:

a) $y'' + y = x^2 + 1$, $y(0) = 5$, $y(1) = 0$

b) $y'' - 2y' + 2y = 2x - 2$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$

c) $y'' + 3y = 6x$, $y(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$

d) $y'' + 3y = 6x$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 0$

Transformada de Laplace

3.1 Descripción de la unidad

3.1.1 Competencia específica a desarrollar

Reconocer y aplicar la Transformada de Laplace como una herramienta útil en la solución de ecuaciones que se presentan en su campo profesional (Movimiento vibratorio y circuitos eléctricos).

3.1.2 Estrategias de enseñanza

- Transformar funciones usando la definición de la transformada de Laplace (Obtener algunas fórmulas).
- Transformar funciones utilizando las fórmulas de transformada de Laplace.
- Reconocer que cada fórmula de transformada de Laplace es al mismo tiempo una fórmula de transformada inversa.
- Recuperar la función $f(t)$ de una función transformada $F(s)$, utilizando las fórmulas de transformada de Laplace.
- Manejar las propiedades de la transformada de Laplace.
- Resolver ecuaciones diferenciales, integrales o integrodiferenciales usando transformada de Laplace.

3.2 Definición de transformada de Laplace

Definición 6

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.1)$$

es la transformada de Laplace de f , siempre que la integral converja.

Cuando la integral de la Definición 6 converge, el resultado es una función de s . Se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada, por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \quad \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

Ejemplo 3.1. Aplica la Definición 6 para $\mathcal{L}\{1\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}dt && \text{Integrando por sustitución:} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st}dt && \begin{cases} u = -st \\ du = -sdt \\ \frac{du}{-s} = dt \end{cases} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^u \frac{du}{-s} \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b e^u du \right) \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-st} \Big|_0^b \right) \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-sb} - 1) \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Lo anterior se cumple para valores de $s > 0$. Es decir, si $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \rightarrow 0$ cuando $b \rightarrow \infty$ ¹. Por otro lado, la integral diverge para $s < 0$. ▲

Nota. Adoptaremos la notación:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\quad \right) \Big|_0^b = \Big|_0^{\infty}$$

a fin de abreviar la notación de límites.

¹En general $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$, siempre que $k > 0$.

Así por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \text{ cuando } s > 0$$

En el límite superior, debe entenderse que $e^{-st} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, siempre que $s > 0$.

Ejemplo 3.2. Utiliza la Definición 6 para determinar $\mathcal{L}\{t\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}t dt && \text{Integrando por partes:} \\ &= \left. -\frac{t}{s}e^{-st} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt && \begin{cases} U = t & dU = dt \\ dV = e^{-st} dt & V = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases} \\ &= 0 + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} && \begin{cases} \text{Usando:} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-st} = 0, \text{ para } s > 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.3. Aplica la transformada para $\mathcal{L}\{t^2\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^2\} &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt && \text{Integrando por partes:} \\ &= \left. -\frac{t^2}{s}e^{-st} \right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st} 2t dt && \begin{cases} U = t^2 & dU = 2t dt \\ dV = e^{-st} dt & V = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases} \\ &= \left. -\frac{t^2}{s}e^{-st} \right|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\ &= 0 + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt \\ &= \frac{2}{s} \left(\frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.4. Aplica la ecuación de la transformada de Laplace para $\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{-3t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-3t} dt && \text{Integrando por sustitución:} \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(s+3)t} dt && \begin{cases} u = -(s+3)t \\ du = -(s+3)dt \\ \frac{du}{-(s+3)} = dt \end{cases} \\
 &= \int_0^{\infty} e^u \frac{du}{-(s+3)} \\
 &= \frac{1}{-(s+3)} \int_0^{\infty} e^u du \\
 &= \frac{1}{-(s+3)} e^{-(s+3)t} \Big|_0^{\infty} \\
 &= 0 - \left(-\frac{1}{s+3}\right) && \text{para } s > 0 \\
 &= \frac{1}{s+3} && \text{para } s > 0
 \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.5. Aplica la Definición 6 para $\mathcal{L}\{\sin 2t\}$

Solución.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t dt && \text{Integrando por partes:} \\
 &= -\frac{e^{-st}}{2} \cos 2t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{s}{2} e^{-st} \cos 2t dt && \begin{cases} U = e^{-st} & dU = -se^{-st} dt \\ dV = \sin 2t dt & V = -\frac{1}{2} \cos 2t \end{cases} \\
 &= 0 + \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos 2t dt && \begin{cases} U = e^{-st} & dU = -se^{-st} dt \\ dV = \cos 2t dt & V = \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \left(\frac{e^{-st}}{2} \sin 2t \Big|_0^{\infty} + \frac{s}{2} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin 2t dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{s}{2} (0 - 0 + \frac{s}{2} \mathcal{L}\{\sin 2t\}) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{s^2}{4} \mathcal{L}\{\sin 2t\}
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} + \frac{s^2}{4} \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \frac{1}{2} \\
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} (1 + \frac{s^2}{4}) &= \frac{1}{2} \\
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} (\frac{4+s^2}{4}) &= \frac{1}{2} \\
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \left(\frac{4}{4+s^2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \\
 \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \frac{2}{s^2+4}
 \end{aligned}$$

▲

3.3 Linealidad de la transformada

Teorema 7

La transformada de Laplace es una transformación lineal:

$$\text{I. } \mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\text{II. } \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Ejemplo 3.6. (Utilización de la linealidad de la transformada)

$$\text{a) } \mathcal{L}\{1 + 5t\} = \mathcal{L}\{1\} + 5\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10\sin 2t\} = 4\mathcal{L}\{e^{-3t}\} - 10\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}$$

Nota. En adelante se entenderá que s está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la transformada de Laplace.

3.4 Fórmulas básicas para determinar transformada de Laplace

De acuerdo a los Ejemplos 3.1-3.5, es posible deducir algunas reglas muy útiles para el cálculo de la transformada.

Teorema 8 (Transformadas de algunas funciones elementales)

$$\text{(i) } \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\text{(v) } \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$\text{(ii) } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{(vi) } \mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$$

$$\text{(iii) } \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{(vii) } \mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

$$\text{(iv) } \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Nota. Para el caso de las funciones hiperbólicas:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Ejemplo 3.7. Use las fórmulas básicas para determinar las transformadas de:

$$\text{a) } f(t) = 2t^4$$

Solución.

$$\mathcal{L}\{2t^4\} = 2\mathcal{L}\{t^4\} = 2\frac{4!}{s^5} = \frac{48}{s^5}$$

▲

b) $f(t) = 4t - 10$

Solución.

$$\mathcal{L}\{4t - 10\} = \mathcal{L}\{4t\} - \mathcal{L}\{10\} = 4\mathcal{L}\{t\} - 10\mathcal{L}\{1\} = \frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$$

▲

c) $f(t) = (1 + e^{2t})^2 = 1 + 2e^{2t} + e^{4t}$

Solución.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1 + 2e^{2t} + e^{4t}\} &= \mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{e^{2t}\} + \mathcal{L}\{e^{4t}\} \\ &= \frac{1}{s} + 2\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-4} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}\end{aligned}$$

▲

d) $f(t) = 4t^2 - 5\text{sen } 3t$

Solución.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{4t^2 - 5\text{sen } 3t\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 5\mathcal{L}\{\text{sen } 3t\} \\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 5\left(\frac{3}{s^2+9}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2+9}\end{aligned}$$

▲

3.5 Más ejemplos de transformadas

Ejemplo 3.8. Calcula la transformada $\mathcal{L}\{(1 + e^{-2t})^3\}$.

Solución. Simplificando $(1 + e^{-2t})^3 = 1 + 3e^{-2t} + 3e^{-4t} + e^{-6t}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1 + e^{-2t})^3\} &= \mathcal{L}\{1\} + 3\mathcal{L}\{e^{-2t}\} + 3\mathcal{L}\{e^{-4t}\} + \mathcal{L}\{e^{-6t}\} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{3}{s+4} + \frac{1}{s+6}\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.9. Determina por definición $\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}$.

Solución.

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\} = \int_0^\infty e^{-st} t^2 e^{-2t} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-2t-st} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t(s+2)} dt$$

Integrando por partes:

$$U = t^2 \quad dU = 2t dt$$

$$dV = e^{-t(s+2)} \quad V = \frac{-e^{-t(s+2)}}{s+2}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 e^{-t(s+2)} dt &= \left. \frac{-t^2}{s+2} e^{-t(s+2)} \right|_0^\infty + \frac{2}{s+2} \int_0^\infty t e^{-t(s+2)} dt \\ &= \frac{2}{s+2} \int_0^\infty t e^{-t(s+2)} dt, \text{ para } s > 0 \end{aligned}$$

Integrando nuevamente por partes:

$$U = t \quad dU = dt$$

$$dV = e^{-t(s+2)} \quad V = \frac{-e^{-t(s+2)}}{s+2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 e^{-t(s+2)} dt &= \frac{2}{s+2} \left(\left. \frac{-t}{s+2} e^{-t(s+2)} \right|_0^\infty + \frac{1}{s+2} \int_0^\infty e^{-t(s+2)} dt \right) \\ &= \frac{2}{(s+2)^2} \left(\left. \frac{e^{-t(s+2)}}{s+2} \right|_0^\infty \right) \\ &= \frac{2}{(s+2)^2} \left(\frac{1}{s+2} \right) \\ &= \frac{2}{(s+2)^3}, \text{ para } s > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\} = \frac{2}{(s+2)^3}$, para $s > 0$. ▲

Ejemplo 3.10 (Transformada de una función continua por partes). Evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ donde:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

Solución. Dado que $f(t)$ se define por partes, tenemos la integral como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^3 e^{-st}(0) dt + \int_3^\infty e^{-st}(2) dt \\ &= 2 \int_3^\infty e^{-st} dt \\ &= 2 \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) \Big|_3^\infty \\ &= \frac{2e^{-3s}}{s}, \quad s > 0 \end{aligned} \quad \text{▲}$$

3.5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1. Utilice la Definición 6 para determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

a) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & t \geq 1 \end{cases}$

g) $f(t) = e^{t+7}$

b) $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

h) $f(t) = e^{-2t-5}$

c) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$

i) $f(t) = te^{4t}$

j) $f(t) = t^2e^{-2t}$

d) $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

k) $f(t) = e^{-t}\text{sen } t$

l) $f(t) = e^t \cos t$

e) $f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

m) $f(t) = t \cos t$

f) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

n) $f(t) = t \text{sen } t$

Ejercicio 3.2. Aplique el Teorema 8 para determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

a) $f(t) = 2t^4$

j) $f(t) = t^5$

b) $f(t) = 4t - 10$

k) $f(t) = 7t + 3$

c) $f(t) = t^2 + 6t - 3$

l) $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

d) $f(t) = (t+1)^3$

m) $f(t) = (2t-1)^3$

e) $f(t) = 1 + e^{4t}$

n) $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

f) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

o) $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

g) $f(t) = 4t^2 - 5\text{sen } 3t$

p) $f(t) = \cos 5t + \text{sen } 2t$

h) $f(t) = \text{senh } kt$

q) $f(t) = \cosh kt$

i) $f(t) = e^t \text{senh } t$

r) $f(t) = e^{-t} \cosh t$

Ejercicio 3.3. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ utilizando alguna identidad trigonométrica.

a) $f(t) = \text{sen } 2t \cos 2t$

c) $f(t) = \text{sen } (4t + 5)$

b) $f(t) = \cos^2 t$

d) $f(t) = 10 \cos(t - \frac{\pi}{6})$

3.6 Transformada inversa de Laplace

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, se decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, se denota como $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Por ejemplo, de acuerdo a los Ejemplos 3.1-3.5:

Transformada directa	Transformada inversa
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$
$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$
$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$	$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$

Análogo al Teorema 8, se presenta la versión para la transformada inversa.

Teorema 9 (Transformadas inversas elementales)

- | | |
|---|---|
| (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$ | (v) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt$ |
| (ii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$ | (vi) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \sinh kt$ |
| (iii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$ | (vii) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt$ |
| (iv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin kt$ | |

Para el cálculo de transformadas inversas suele suceder que una función en la variable s no coincide con alguna de las formas del Teorema 9. En estos casos puede ser necesario maquillar la función de s multiplicando y dividiendo entre alguna constante conveniente.

Ejemplo 3.11. Evalúe:

- a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$

Solución. a) En este caso $n + 1 = 5$, entonces $n = 4$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} &= \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} \\
 &= \frac{1}{4!}t^4 \\
 &= \frac{t^4}{24}
 \end{aligned}$$



Solución. b) Aquí $k^2 = 7$, luego $k = \sqrt{7}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}}\text{sen } \sqrt{7}t\end{aligned}$$

▲

3.7 Linealidad de la transformada inversa

Teorema 10

La transformada inversa de Laplace es una transformación lineal:

$$\text{I. } \mathcal{L}^{-1}\{cF(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\text{II. } \mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de funciones f y g ,

Ejemplo 3.12. Determine la transformada inversa de Laplace en los siguientes casos:

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$$

$$(d) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

Solución. Completando adecuadamente, tenemos:

$$(a) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}t^4 = \frac{t^4}{24}$$

▲

$$(b) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}\text{sen } \sqrt{7}t$$

▲

(c) Separando en dos fracciones, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} \\ &= -2\cos 2t + 3\text{sen } 2t\end{aligned}$$

▲

(d) Procediendo por fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4} \\ &= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}\end{aligned}$$

Luego:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Si } s = 2 \Rightarrow 25 = 6B \Rightarrow B = 25/6$$

$$\text{Si } s = 1 \Rightarrow 16 = -5A \Rightarrow A = -16/5$$

$$\text{Si } s = -4 \Rightarrow 1 = 30C \Rightarrow C = 1/30$$

De esta manera, calculamos la transformada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{16}{5(s-1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{25}{6(s-2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{30(s+4)}\right\} \\ &= -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}\end{aligned}$$

▲

Veamos un ejemplo más complicado.

Ejemplo 3.13. Determina la transformada $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$.

Solución. Observemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{(s^2+4)(s^2+1)}\right\}$$

Simplificando por el método de las fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{6s+3}{(s^2+4)(s^2+1)} &= \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ &= \frac{(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 6s + 3 &= (As + B)(s^2 + 1) + (Cs + D)(s^2 + 4) \\ &= As^3 + Bs^2 + As + B + Cs^3 + Ds^2 + 4Cs + 4D \\ &= (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (A + 4C)s + B + 4D \end{aligned}$$

obtenemos el sistema lineal:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 6 &= A + 4C \\ 3 &= B + 4D \end{aligned}$$

Para resolver el sistema, tomamos las ecuaciones (1) y (3), donde se obtiene $C = 2$, $A = -2$.

De igual manera, resolviendo ecuaciones (2) y (4) es posible obtener $D = 1$, $B = -1$.

Luego, la descomposición en fracciones parciales queda:

$$\frac{6s + 3}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{-2s - 1}{s^2 + 4} + \frac{2s + 1}{s^2 + 1} = -\frac{2s}{s^2 + 4} - \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s + 3}{s^4 + 5s^2 + 4} \right\} &= -2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\} \\ &\quad + 2\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 1} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\} \\ &= -2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 2 \cos t + \sin t \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s + 3}{s^4 + 5s^2 + 4} \right\} = -2 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 2 \cos t + \sin t$

▲

3.7.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.4. Determine la transformada inversa que se indica:

a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3} \right\}$

d) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3} \right)^2 \right\}$

f) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+2)^2}{s^3} \right\}$

b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5} \right\}$

g) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \right\}$

c) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\}$

e) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+1)^3}{s^4} \right\}$

h) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} - \frac{1}{s+8} \right\}$

- i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$ l) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$ o) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$
j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$ m) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$
k) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$ n) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$ p) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$

Ejercicio 3.5. Utilice fracciones parciales, cuando sea necesario, para calcular la transformada inversa que se indica:

- a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$ f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$ k) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$
b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$ g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$ l) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$
c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$ h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$ m) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$
d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$ i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$ n) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$
e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$ j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$

3.8 Transformada de una derivada

Teorema 11

Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continua para t en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua por partes en $[0, \infty)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (3.2)$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

A partir del Teorema anterior se observa que $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ depende de $F(s)$ y las $(n-1)$ derivadas de f evaluadas en $t = 0$. Este resultado implica que la utilización de la transformada de Laplace sea sumamente relevante para determinar soluciones a problemas de valores iniciales con ecuaciones diferenciales en coeficientes constantes.

Ejemplo 3.14. Ejemplos

- (a) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
(b) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
(c) $\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$
(d) $\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} = s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$

3.8.1 Método de la transformada de Laplace para resolver una EDO

Ejemplo 3.15. Use la transformada de Laplace para resolver el PVI:

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13\text{sen } 2t, \quad y(0) = 6$$

Solución. Como primer paso se determina la transformada de la ED:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt} + 3y\right\} &= \mathcal{L}\{13\text{sen } 2t\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{L}\{y\} &= 13\mathcal{L}\{\text{sen } 2t\} \\ sY(s) - y(0) + 3Y(s) &= 13\frac{2}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

Ahora despejamos $Y(s)$:

$$\begin{aligned}sY(s) - 6 + 3Y(s) &= \frac{26}{s^2 + 4} \\ (s + 3)Y(s) &= \frac{26}{s^2 + 4} + 6 \\ (s + 3)Y(s) &= \frac{26 + 6s^2 + 24}{s^2 + 4} \\ (s + 3)Y(s) &= \frac{6s^2 + 50}{s^2 + 4} \\ Y(s) &= \frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)}\end{aligned}$$

Por último, determinamos la transformada inversa \mathcal{L}^{-1} :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)}\right\}$$

Dado que $(s^2 + 4)$ no es factorizable en números reales, se asume la descomposición en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)} &= \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{C}{s + 3} \\ &= \frac{(As + B)(s + 3) + C(s^2 + 4)}{(s^2 + 4)(s + 3)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}6s^2 + 50 &= (As + B)(s + 3) + C(s^2 + 4) \\ &= As^2 + 3As + Bs + 3B + Cs^2 + 4C \\ &= (A + C)s^2 + (3A + B)s + 3B + 4C\end{aligned}$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}A + C &= 6 \\ 3A + B &= 0 \\ 3B + 4C &= 50\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, puede obtenerse $A = -2$, $B = 6$, $C = 8$. Entonces queda lo siguiente:

$$\frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)} = \frac{-2s + 6}{s^2 + 4} + \frac{8}{s + 3}$$

Luego:

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2 + 50}{(s^2 + 4)(s + 3)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 6}{s^2 + 4} + \frac{8}{s + 3}\right\} \\ &= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\} + 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} \\ &= -2\cos 2t + \frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} + 8e^{-3t} \\ &= -2\cos 2t + 3\sin 2t + 8e^{-3t}\end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.16. Resuelva el PVI:

$$y'' + y = \sqrt{2}\sin \sqrt{2}t, \quad y(0) = 10, y'(0) = 0$$

utilizando la transformada de Laplace.

Solución. Calculamos la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\sqrt{2}\sin \sqrt{2}t\} \\
 s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2} = \frac{2}{s^2 + 2} \\
 Y(s)(s^2 + 1) - 10s &= \frac{2}{s^2 + 2} \\
 Y(s) &= \left(\frac{2}{s^2 + 2} + 10s \right) \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \\
 &= \frac{2 + 10s(s^2 + 2)}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)} \\
 &= \frac{2}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)} + \frac{10s}{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)} + \frac{10s}{s^2 + 1} \right\}$$

Descomponiendo en fracciones parciales el primer término:

$$\frac{2}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)} = \frac{As + B}{s^2 + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1} = \frac{(As + B)(s^2 + 1) + (Cs + D)(s^2 + 2)}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 2 &= As^3 + Bs^2 + As + B + Cs^3 + Ds^2 + 2Cs + 2D \\
 &= (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (A + 2C)s + B + 2D
 \end{aligned}$$

Nos queda el sistema:

$$\begin{aligned}
 0 &= A + C \\
 0 &= B + D \\
 0 &= A + 2C \\
 2 &= B + 2D
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones se obtiene $A = 0, B = -2, C = 0, D = 2$.

Así, la descomposición en fracciones parciales genera:

$$\frac{2}{(s^2 + 2)(s^2 + 1)} = -\frac{2}{s^2 + 2} + \frac{2}{s^2 + 1}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{2}{s^2+2} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{10s}{s^2+1} \right\} \\
 &= -\sqrt{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} \right\} + 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} + 10 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} \\
 &= -\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t + 2 \operatorname{sen} t + 10 \cos t
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es:

$$y(t) = -\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t + 2 \operatorname{sen} t + 10 \cos t$$

▲

Ejemplo 3.17. Resuelva el PVI:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, y(0) = 1, y'(0) = 5$$

Solución. Aplicamos la transformada a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+4} \\
 s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\
 s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\
 (s^2 - 3s + 2)Y(s) - s - 2 &= \frac{1}{s+4} \\
 (s-2)(s-1)Y(s) &= \frac{1}{s+4} + s + 2 \\
 &= \frac{1 + (s+4)(s+2)}{s+4} \\
 &= \frac{s^2 + 6s + 9}{s+4}
 \end{aligned}$$

Despejando $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)} \\
 &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+4} \\
 &= \frac{A(s-1)(s+4) + B(s-2)(s+4) + C(s-2)(s-1)}{(s-2)(s-1)(s+4)}
 \end{aligned}$$

Lo cual implica:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-1)(s+4) + B(s-2)(s+4) + C(s-2)(s-1)$$

Procediendo por valores críticos:

Si $s = 1$, entonces:

$$16 = B(-1)(5) = -5B \Rightarrow B = -\frac{16}{5}$$

Si $s = -4$,

$$1 = C(-6)(-5) = 30C \Rightarrow C = \frac{1}{30}$$

Si $s = 2$,

$$25 = A(1)(6) = 6A \Rightarrow A = \frac{25}{6}$$

luego:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)} = \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{-\frac{16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

utilizando la transformada inversa, tenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{25}{6} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{16}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{30} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= \frac{25}{6} e^{2t} - \frac{16}{5} e^t + \frac{1}{30} e^{-4t} \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 3.18. Utiliza la transformada de Laplace para resolver el PVI:

$$2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

Solución. Calculamos la transformada:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}\{y'''\} + 3\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ 2s^3Y(s) - 2s^2y(0) - 2sy'(0) - 2y''(0) \\ + 3s^2y(s) - 3sy(0) - 3y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) - 2Y(s) &= \frac{1}{s+1} \\ (2s^3 + 3s^2 - 3s - 2)Y(s) - 2 &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \left(\frac{1}{s+1} + 2 \right) \left(\frac{1}{2s^3 + 3s^2 - 3s - 2} \right) \\
 &= \frac{1}{(s+1)(2s^3 + 3s^2 - 3s - 2)} + \frac{2}{2s^3 + 3s^2 - 3s - 2} \\
 &= \frac{2s+3}{(s+1)(2s^3 + 3s^2 - 3s - 2)} \\
 &= \frac{2s+3}{2s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 2s + 2s^3 + 3s^2 - 3s - 2} \\
 &= \frac{2s+3}{2s^4 + 5s^3 - 5s - 2} \\
 &= \frac{2s+3}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+3}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)} \right\}$$

Por fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{2s+3}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)} &= \frac{A}{2s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} \\
 &= \frac{A(s-1)(s+1)(s+2) + B(2s+1)(s+1)(s+2)}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)} \\
 &\quad + \frac{C(2s+1)(s-1)(s+2) + D(2s+1)(s-1)(s+1)}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 2s+3 &= A(s-1)(s+1)(s+2) + B(2s+1)(s+1)(s+2) \\
 &\quad + C(2s+1)(s-1)(s+2) + D(2s+1)(s-1)(s+1)
 \end{aligned}$$

Resolviendo por valores críticos:

$$\text{Si } s = 1, \Rightarrow 5 = 18B \Rightarrow B = \frac{5}{18}$$

$$\text{Si } s = -1, \Rightarrow 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } s = -\frac{1}{2}, \Rightarrow 2 = -\frac{9}{8}A \Rightarrow A = -\frac{16}{9}$$

$$\text{Si } s = -2, \Rightarrow -1 = -9D \Rightarrow D = \frac{1}{9}$$

De esta forma la descomposición en fracciones parciales resulta en:

$$\frac{2s+3}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)} = -\frac{16}{9(2s+1)} + \frac{5}{18(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{9(s+2)}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+3}{(2s+1)(s-1)(s+1)(s+2)} \right\} &= -\frac{16}{18} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\frac{1}{2}} \right\} + \frac{5}{18} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + \frac{1}{9} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} \\ &= -\frac{8}{9} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{18} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-2t} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es:

$$y(t) = -\frac{8}{9} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{5}{18} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{9} e^{-2t}$$

▲

Ejemplo 3.19. Resuelva:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$$

Solución. Aplicamos la transformada a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y\} &= \mathcal{L}\{e^{-4t}\} \\ \mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+4} \\ s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\ s^2Y(s) - s - 5 - 3sY(s) + 3 + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \\ (s^2 - 3s + 2)Y(s) - s - 2 &= \frac{1}{s+4} \\ (s-2)(s-1)Y(s) &= \frac{1}{s+4} + s + 2 \\ (s-2)(s-1)Y(s) &= \frac{s^2 + 6s + 9}{s+4} \\ Y(s) &= \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)} \end{aligned}$$

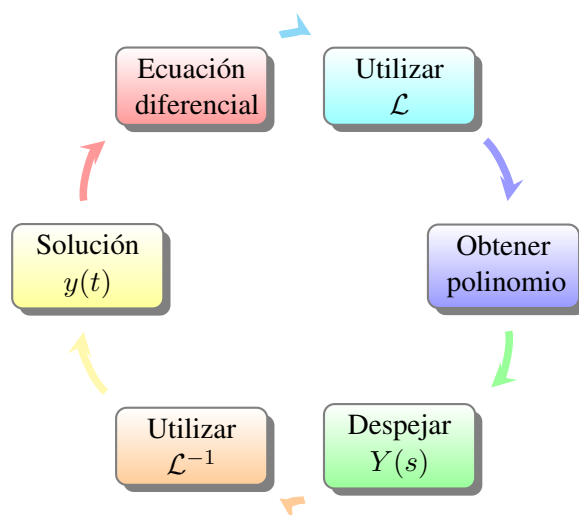


Figura 3.1: Esquema que resume la resolución de una ED mediante Laplace.

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+4}$$

Al ser los denominadores iguales, tenemos:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-1)(s+4) + B(s-2)(s+4) + C(s-2)(s-1)$$

$$\text{Si } s = 1, \Rightarrow 16 = -5B \Rightarrow B = -\frac{16}{5}$$

$$\text{Si } s = -4, \Rightarrow 1 = 30C \Rightarrow C = \frac{1}{30}$$

$$\text{Si } s = 2, \Rightarrow 25 = 6A \Rightarrow A = \frac{25}{6}$$

Luego:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-2)(s-1)(s+4)} = \frac{\frac{25}{6}}{s-2} + \frac{\frac{-16}{5}}{s-1} + \frac{\frac{1}{30}}{s+4}$$

y utilizando \mathcal{L}^{-1} tenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{25}{6} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-2} \right\} - \frac{16}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + \frac{1}{30} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\} \\ &= \frac{25}{6} e^{2t} - \frac{16}{5} e^t + \frac{1}{30} e^{-4t} \end{aligned}$$



3.8.2 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.6. Utilice la transformada de Laplace para resolver los problemas de valor inicial:

- a) $\frac{dy}{dt} - y = 1, y(0) = 0$
- b) $2\frac{dy}{dt} + y = 0, y(0) = -3$
- c) $y' + 6y = e^{4t}, y(0) = 2$
- d) $y' - y = 2 \cos 5t, y(0) = 0$
- e) $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
- f) $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, y(0) = 1, y'(0) = -1$
- g) $y'' + y = \sqrt{2}\sin \sqrt{2}t, y(0) = 10, y'(0) = 0$
- h) $y'' + 9y = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0$
- i) $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$
- j) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1$

Ejercicio 3.7. Considerando las fórmulas:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at} \cos bt \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{at} \sin bt \quad (3.3)$$

Utilice la transformada de Laplace para resolver los PVI:

- a) $y' + y = e^{-3t} \cos 2t, y(0) = 0$
- b) $y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -3$

Sistemas de ecuaciones diferenciales.

4.1 Descripción de la unidad

4.1.1 Competencias específicas a desarrollar

- Modelar y describir situaciones diversas (tanques de mezclado, resortes acoplados y redes eléctricas) a través de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales utilizando el método de los operadores diferenciales y la transformada de Laplace.
- Integrar las herramientas estudiadas en las unidades previas al reconocer las limitaciones y ventajas de los métodos aplicados.

4.1.2 Estrategias de enseñanza

- Identificar en situaciones cotidianas y de ingeniería la presencia de más de una variable que dependen de una sola variable independiente.
- Reconocer en un problema, la existencia de más de una situación y que cada una de ellas puede ser representada por una EDL.
- Con la mediación del docente modelar diversas situaciones presentes en un problema utilizando sistemas de EDL.
- Reconocer que el resolver un sistema de EDL implica solamente aplicar conceptos ya estudiados (por lo menos solución de sistemas de ecuaciones lineales y solución de EDL).
- Resolver sistemas de EDL, utilizando operador diferencial o transformada de Laplace.
- Interpretar las soluciones de sistemas de EDL utilizados en la modelación de problemas.
- Predecir comportamientos y analizar fenómenos en condiciones distintas, al estudiar problemas modelados con sistemas de EDL.

4.2 Introducción

En este Capítulo se usará la notación matricial y sus propiedades se usarán con mucha frecuencia a lo largo del mismo. Es indispensable un repaso de álgebra lineal si no se está familiarizado con estos conceptos.

Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de Laplace de cada ED dentro de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, reduce el sistema de ED a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas. Luego, se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas para cada una de las funciones transformadas y luego se determinan las transformadas de Laplace inversas.

4.3 Sistemas lineales homogéneos

Ejemplo 4.1. Resuelva:

$$\begin{aligned}x_1'' + 10x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 &= 0\end{aligned}$$

sujeta a: $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_2'(0) = -1$.

Solución. Calculamos la transformada de Laplace de ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x_1''\} + 10\mathcal{L}\{x_1\} - 4\mathcal{L}\{x_2\} &= 0 \\ -4\mathcal{L}\{x_1\} + \mathcal{L}\{x_2''\} + 4\mathcal{L}\{x_2\} &= 0\end{aligned}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) &= 0\end{aligned}$$

Simplificando y sustituyendo las condiciones iniciales, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}s^2X_1(s) - 1 + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \Rightarrow (s^2 + 10)X_1(s) - 4X_2(s) = 1 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) + 1 + 4X_2(s) &= 0 \Rightarrow -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) = -1\end{aligned}$$

Despejando $X_2(s)$:

$$X_2(s) = \frac{1 - (s^2 + 10)X_1(s)}{-4}$$

Sustituyendo $X_2(s)$:

$$-4X_1 - \frac{1}{4}(s^2 + 4)[1 - (s^2 + 10)X_1(s)] = -1$$

Ahora despejamos $X_1(s)$ para poder aplicarle \mathcal{L}^{-1} :

$$\begin{aligned} -4X_1(s) - \frac{1}{4}(s^2 + 4) + \frac{1}{4}(s^2 + 4)(s^2 + 10)X_1(s) &= -1 \\ (-4 + \frac{1}{4}(s^2 + 4)(s^2 + 10))X_1(s) &= \frac{1}{4}(s^2 + 4) - 1 \\ (\frac{-16 + s^4 + 14s^2 + 40}{4})X_1(s) &= \frac{s^2 + 4 - 4}{4} \\ (s^4 + 14s^2 + 24)X_1(s) &= s^2 \\ (s^2 + 2)(s^2 + 12)X_1(s) &= s^2 \\ X_1(s) &= \frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)} \end{aligned}$$

Calculamos \mathcal{L}^{-1} por medio de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2 + 2)(s^2 + 12)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{s^2 + 2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + 12}\right\} \end{aligned}$$

equivalente a la ecuación:

$$\begin{aligned} s^2 &= (As + B)(s^2 + 12) + (Cs + D)(s^2 + 2) \\ s^2 &= As^3 + Bs^2 + 12As + 12B + Cs^3 + Ds^2 + 2Cs + 2D \\ s^2 &= (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (12A + 2C)s + 12B + 2D \end{aligned}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \longrightarrow A = 0 \quad (B + D = 1) - 2 \\ B + D &= 1 \quad C = 0 \quad 12B + 2D = 0 \\ 12A + 2C &= 0 \quad -2B - 2D = -2 \\ 12B + 2D &= 0 \quad \frac{12B + 2D}{10B} = 0 \\ &\quad 10B = -2 \quad \rightarrow B = -\frac{1}{5} \quad \rightarrow D = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Ahora podemos aplicar \mathcal{L}^{-1} :

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1 &= -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2 + 12}\right\} \\ &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\text{sen } \sqrt{2}t + \frac{6}{5\sqrt{12}}\text{sen } \sqrt{12}t \end{aligned}$$

Ahora sustituimos X_1 en $X_2(s)$:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1-(s^2+10)\frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+2)}}{\frac{-4}{s^2(s^2+10)}} \\ &= \frac{s^2(s^2+10)}{4(s^2+2)(s^2+12)} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{s^4+10s^2-s^4-14s^2-24}{4(s^2+2)(s^2+12)} \\ &= \frac{-(s^2+6)}{(s^2+2)(s^2+12)} \end{aligned}$$

Calculamos \mathcal{L}^{-1}

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-(s^2+6)}{(s^2+2)(s^2+12)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{(s^2+2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{s^2+12}\right\} \end{aligned}$$

Por fracciones parciales:

$$\begin{aligned} -s^2 - 6 &= (As + B)(s^2 + 12) + (Cs + D)(s^2 + 2) \\ -s^2 - 6 &= As^3 + Bs^2 + 12As + 12B + Cs^3 + Ds^3 + Ds^2 + 2Cs + 2D \\ -s^2 - 6 &= (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (12A + 2C)s + 12B + 2D \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} A + C = 0 & A = C = 0 \quad (B + D = -1) - 2 \\ B + D = -1 & \frac{12B + 2D = -6}{-2B - 2D = 2} \\ 12A + 2C = 0 & \frac{12B + 2D = -6}{10B = -4} \rightarrow B = -\frac{2}{5} \rightarrow D = -\frac{3}{5} \\ 12B + 2D = -6 & \end{array}$$

Ahora podemos aplicar \mathcal{L}^{-1}

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} - \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+12}\right\} \\ &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\text{sen } \sqrt{2}t - \frac{3}{5\sqrt{12}}\text{sen } \sqrt{12}t \end{aligned}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\text{sen } \sqrt{2}t + \frac{6}{5\sqrt{12}}\text{sen } \sqrt{12}t \\ x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\text{sen } \sqrt{2}t - \frac{3}{5\sqrt{12}}\text{sen } \sqrt{12}t \end{aligned}$$



4.4 Sistemas lineales no homogéneos

Ejemplo 4.2. Resuelve:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + 3x + \frac{dy}{dt} &= 1 \\ \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} - y &= e^t\end{aligned}$$

sujeta a $x(0) = 0, y(0) = 0$.

Solución. Aplicamos \mathcal{L} a las EDO:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x'\} + 3\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y'\} &= \mathcal{L}\{1\} \\ \mathcal{L}\{x'\} - \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^t\}\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}sX(s) - x(0) + 3X(s) + sY(s) - y(0) &= \frac{1}{s} \\ sX(s) - x(0) - X(s) + sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

Simplificamos para obtener un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}(s+3)X(s) + sY(s) &= \frac{1}{s^2} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{(s+3)X(s)}{s} \\ (s-1)X(s) + (s-1)Y(s) &= \frac{1}{(s-1)}\end{aligned}$$

Sustituimos $Y(s)$ en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}(s-1)X(s) + (s-1)\left[\frac{1}{s^2} - \frac{(s+3)X(s)}{s}\right] &= \frac{1}{s-1} \\ (s-1)X(s) + (s-1)\left[\frac{1 - s(s+3)X(s)}{s^2}\right] &= \frac{1}{s-1} \\ X(s) + \frac{1 - s(s+3)X(s)}{s^2} &= \frac{1}{(s-1)^2} \\ s^2X(s) + 1 - s(s+3)X(s) &= \frac{s^2}{(s-1)^2} \\ 1 - 3sX(s) &= \frac{s^2}{(s-1)^2} \\ X(s) &= \frac{-s^2}{3s(s-1)^2} + \frac{1}{3s} \\ X(s) &= \frac{-s}{3(s-1)^2} + \frac{1}{3s} \\ X(s) &= \frac{-s^2 + s^2 - 2s + 1}{3s(s-1)^2}\end{aligned}$$

Tenemos:

$$X(s) = \frac{-2s+1}{3s(s-1)^2}$$

Aplicamos \mathcal{L}^{-1} mediante fracciones parciales:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s(s-1)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{(s-1)^2}\right\}\right] \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación:

$$-2s+1 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs$$

donde si $s = 1$, $C = -1$; si $s = 0$, $A = 1$ y $B = -1$. Entonces:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3e^t} - \frac{1}{3}te^t \end{aligned}$$

Simplificamos ahora para $Y(s)$:

$$(s+3)X(s) + sY(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{(s+3)}{s}X(s)$$

$$(s-1)X(s) + (s-1)Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Sustituimos $X(s)$ en $Y(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{(s+3)}{s}\left[\frac{-2s+1}{3s(s-1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{s^2} + \frac{2s^2+5s-3s}{3s^2(s-1)^2} \\ &= \frac{3s^2-6s+3+2s^2+5s-3}{3s^2(s-1)^2} \\ &= \frac{5s^2-s}{3s^2(s-1)^2} \\ &= \frac{s(5s-1)}{3s^2(s-1)^2} \\ &= \frac{5s-1}{3s(s-1)^2} \end{aligned}$$

Calculamos \mathcal{L}^{-1} por fracciones parciales:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5s-1}{s(s-1)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s-1} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C}{(s-1)^2} \right\} \end{aligned}$$

como los denominadores son iguales tenemos:

$$5s - 1 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs \quad (4.1)$$

Ahora si: $s = 1$ entonces $C = 4$; si $s = 0$, $A = -1$ y $B = 1$ si $s = 1$. Luego sustituyendo los valores de las constantes obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} + \frac{4}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^t + \frac{4}{3} t e^t \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{3} t e^t \\ y(t) &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^t + \frac{4}{3} t e^t \end{aligned}$$

▲

Ejemplo 4.3. Una red con un inductor, un resistor y un capacitor, como en la Figura 4.1, están gobernados por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \quad (4.2)$$

$$RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \quad (4.3)$$

Resuelva el sistema anterior bajo las condiciones $E(t) = 60V$, $L = 1h$, $R = 50\Omega$, $C = 10^{-4}f$, $i_1(0) = i_2(0) = 0$

Solución. Tenemos el sistema de ED:

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \quad (4.4)$$

$$50(10)^{-4} \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \quad (4.5)$$

Calculamos la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{di_1}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{50i_2\} = \frac{60}{s} \quad (4.6)$$

$$\frac{50}{1000}\mathcal{L}\left\{\frac{di_2}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{i_2\} - \mathcal{L}\{i_1\} = 0 \quad (4.7)$$

La ecuación 4.6 se convierte en:

$$\begin{aligned} sI_1(s) - i_1(0) + 50I_2(s) &= \frac{60}{s} \\ sI_1(s) + 50I_2(s) &= \frac{60}{s} \\ sI_1(s) &= \frac{60}{s} - 50I_2(s) \\ sI_1(s) &= \frac{60 - 50sI_2(s)}{s} \\ I_1(s) &= \frac{60 - 50sI_2(s)}{s^2} \end{aligned}$$

También, la ecuación 4.7 se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{50}{10^4}[sI_2(s) - i_2(0)] + I_2(s) - I_1(s) &= 0 \\ -I_1(s) + \left(\frac{50s}{10^4} + 1\right)I_2(s) &= 0 \\ \left(\frac{50s + 10^4}{10^4}\right)I_2(s) &= I_1(s) \\ I_2(s) &= \frac{10^4 I_1(s)}{50s + 10^4} \end{aligned}$$

sustituyendo I_1 en I_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{50s + 10^4}{10^4}\right)I_2(s) &= \frac{60 - 50sI_2(s)}{s^2} \\ s^2\left(\frac{50s + 10^4}{10^4}\right)I_2(s) + 50sI_2(s) &= 60 \\ s\left(s\left(\frac{50s + 10^4}{10^4}\right) + 50\right)I_2(s) &= 60 \\ s\left(\left(\frac{50s^2 + 10^4s}{10^4}\right) + 50\right)I_2(s) &= 60 \\ s\left(\frac{50}{10^4}(s^2 + 200s + 10000)\right)I_2(s) &= 60 \\ s\left(\frac{50}{10^4}(s + 100)^2\right)I_2(s) &= 60 \\ I_2(s) &= \frac{60}{\frac{50}{10^4}s(s + 100)^2} \end{aligned}$$

descomponiendo en fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{60}{\frac{50}{10^4}s(s+100)^2} &= \frac{A}{\frac{50}{10^4}s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2} \\ &= \frac{A(s+100)^2 + B(\frac{50}{10^4}s(s+100)) + C(\frac{50}{10^4}s)}{\frac{50}{10^4}s(s+100)^2}\end{aligned}$$

por lo que:

$$60 = A(s+100)^2 + B(\frac{50}{10^4}s(s+100)) + C(\frac{50}{10^4}s) \quad (4.8)$$

sustituyendo los valores $s = -100$, $s = 0$, $s = 1$ es posible obtener $A = \frac{60}{10^4}$, $B = -\frac{6}{5}$, $C = -120$.

De esta manera:

$$\begin{aligned}i_2(t) &= \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 120\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} \\ &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}\end{aligned}$$

Haciendo lo propio para I_1 , sustituyendo I_2 se puede obtener:

$$\begin{aligned}I_1(s) &= \frac{60 - 50sI_2(s)}{s^2} \\ &= \frac{60 - 50s\left(\frac{10^4 I_1(s)}{50s+10^4}\right)}{s^2}\end{aligned}$$

simplificando términos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{50(10^4) + s(50s+10^4)}{s(50s+10^4)}\right)I_1(s) &= \frac{60}{s^2} \\ \frac{(s+100)^2}{s(s+200)}I_1(s) &= \frac{60}{s^2} \\ I_1(s) &= \frac{60s(s+200)}{s^2(s+100)^2}\end{aligned}$$

procediendo por fracciones parciales:

$$\begin{aligned}\frac{60s(s+200)}{s^2(s+100)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+100} + \frac{D}{(s+100)^2} \\ 60s(s+200) &= As(s+100)^2 + B(s+100)^2 + Cs^2(s+100) + Ds^2\end{aligned}$$

sustituyendo los valores $s = 0$, $s = -100$, $s = 1$, $s = 2$ se puede obtener $A = \frac{6}{5}$, $B = 0$, $C = -\frac{6}{5}$, $D = -60$. Por lo que:

$$\begin{aligned}i_1(t) &= \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 60\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} \\ &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}\end{aligned}$$

Luego la solución al sistema consiste en:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} \\ i_2(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t} \end{aligned}$$

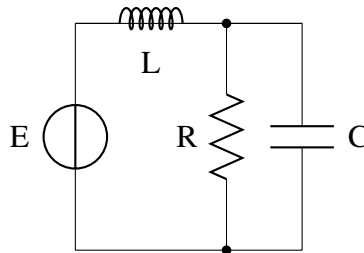


Figura 4.1: Esquema de un circuito RCL para la descarga del capacitor.

▲

4.5 Ejercicios complementarios

Ejercicio 4.1. En los incisos siguientes escriba el sistema lineal en forma matricial.

a)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 8y \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2z \\ \frac{dz}{dt} &= -x + z \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - 7y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x \end{aligned}$$

e)

c)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3x + 4y - 9z \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y \\ \frac{dz}{dt} &= 10x + 4y + 3z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + z + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y - z - 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + z + t^2 - t + 2 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + 4y + e^{-t} \sin 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 9z + 4e^{-t} \cos 2t \\ \frac{dz}{dt} &= y + 6z - e^{-t}\end{aligned}$$

Ejercicio 4.2. En los incisos siguientes escriba el sistema lineal sin el uso de matrices.

a) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$

b) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$

c) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$

d) $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} t-4 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{4t}$

Ejercicio 4.3. Aplique la transformada de Laplace para resolver el sistema dado de ecuaciones diferenciales:

a)

$$\begin{aligned}x' &= -x + y \\ y' &= 2x \\ x(0) &= 0, y(0) = 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x' &= x - 2y \\ y' &= 5x - y \\ x(0) &= -1, y(0) = 2\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}x' + x - y' + y &= 0 \\ x' + y' + 2y &= 0 \\ x(0) &= 0, y(0) = 1\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x' + 3x + y' &= 1 \\ x' - x + y' - y &= e^t \\ x(0) &= 0, y(0) = 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x' &= 2y + e^t \\ y' &= 8x - t \\ x(0) &= 1, y(0) = 1\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}x'' + x - y &= 0 \\ y'' + y - x &= 0 \\ x(0) &= 0, x'(0) = -2 \\ y(0) &= 0, y'(0) = 1\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}2x' + y' - 2x &= 1 \\ x' + y' - 3x - 3y &= 2 \\ x(0) &= 0, y(0) = 0\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}x'' + x' + y' &= 0 \\y'' + y' - 4x' &= 0 \\x(0) &= 1, x'(0) = 0 \\y(0) &= -1, y'(0) = 5\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}x'' + 3y' + 3y &= 0 \\x'' + 3y &= te^{-t} \\x(0) &= 0, x'(0) = 2 \\y(0) &= 0\end{aligned}$$

n)

$$\begin{aligned}x'' + y'' &= e^{2t} \\2x' + y'' &= -e^{2t} \\x(0) &= 0, x'(0) = 0 \\y(0) &= 0, y'(0) = 0\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}x'' + y'' &= t^2 \\x'' - y'' &= 4t \\x(0) &= 8, x'(0) = 0 \\y(0) &= 0, y'(0) = 0\end{aligned}$$

l)

$$\begin{aligned}x' &= 4x - 2y \\y' &= 3x - y \\x(0) &= 0, y(0) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

o)

$$\begin{aligned}x'_1 &= 2x_1 + 8x_2 \\x'_2 &= -1x_1 - 2x_2 \\x_1(0) &= 2, x_2(0) = -1\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}x' - 4x + y''' &= 6\text{sen } t \\x' + 2x - 2y''' &= 0 \\x(0) &= 0, y(0) = 0 \\y'(0) &= 0, y''(0) = 0\end{aligned}$$

m)

$$\begin{aligned}x' + y &= t \\4x + y' &= 0 \\x(0) &= 1, y(0) = 2\end{aligned}$$

p)

$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{1}{2}x_1 \\x'_2 &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\x_1(0) &= 3, x_2(0) = 5\end{aligned}$$

Ejercicio 4.4. Considere una red eléctrica con un inductor, un resistor y un capacitor, gobernado por el sistema:

$$\begin{aligned}L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\RC \frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0\end{aligned}$$

Resuelva el sistema anterior bajo las condiciones:

a) $E(t) = 60V, L = \frac{1}{2}h, R = 50\Omega, C = 10^{-4}f, i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$

b) $E(t) = 60V, L = 2h, R = 50\Omega, C = 10^{-4}f, i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$

Bibliografía

- [1] Zill D. and Cullen M.R. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson Learning, 5a Ed. México, 2002.
- [2] Simmons G.F. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Mc Graw Hill, Segunda edición, España, 1999.
- [3] Lowen D. and Lovelock D. *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. John Wiley & Sons, Inc., México, 1999.
- [4] Dennis Z. and Cullen M.R. *Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería I Ecuaciones Diferenciales*. Tercera Edición. Ed. McGraw-Hill, México, 2008.
- [5] Edwards H. and Penney D. *Ecuaciones diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Cuarta Edición. Ed. Pearson, México, 2009.
- [6] Rainville E. *Ecuaciones Diferenciales Elementales*. Segunda Edición. Ed. Trillas, México, 2006.
- [7] Spiegel M. *Teoría y problemas de transformadas de Laplace*. McGraw-Hill, México, 1989.
- [8] Ayres F. *Ecuaciones Diferenciales*. Primera edición. McGraw- Hill. Serie Schaum, México, 1996.
- [9] <http://www.wolframalpha.com/>.