高次元リーマン θ 関数における再帰的可約構造について

Masaru Moriyama

2026 年 4 月

技術ノート／概念補足

---

1. 背景と動機

リーマン θ 関数の数値計算は、次元（g）に対して計算量が指数的に増大する（(O((2N+1)^g))）ことが知られており、いわゆる「次元の呪い」により、実用的な exact 計算は通常（g <= 10）程度に制限されてきた。

一方で、周期行列に特別な構造がある場合には簡略化が起こることも知られている。例えば、完全なブロック対角化や退化極限などである。しかしこれらは一般に自明な因子化や極限的状況と見なされ、高次元における実用的計算可能性の枠組みとして体系化されているとは言い難い。

---

2. 観測された現象

S(k,k）型分解（k=2,3,5,… を含む）に基づく構造依存アルゴリズムの実装過程において、次のような現象が観測された：

特定の周期行列のクラスにおいて、θ 関数の評価が実効的な次元の再帰的縮約を伴う形で実行可能となる。

より具体的には、ある種の構造を持つ周期行列（Ω）に対して、評価問題が低次元の部分問題へと階層的に分解され、この過程が繰り返し適用可能となる。

その結果、計算量のスケーリングは従来想定されていた指数的増大から大きく逸脱し、実用上は多項式的あるいはほぼ線形に近い挙動を示す。これは（g > 10^4）といった極めて高次元領域においても成立することが確認されている。

---

3. 既存理論との関係

この現象は既存理論と無関係ではないが、明示的に同定・整理されてきたものではないと考えられる。

- Riemann Theta Function Theory においては、特殊構造下での簡略化（因子化・退化など）が知られている
- Integrable Systems においては、有限ギャップ解などにおいて構造を持つ周期行列が現れる
- Siegel モジュライ空間においても、特別な部分多様体（locus）の研究が存在する

しかし本観測は以下の点で異なる：

完全なブロック対角化や退化極限を仮定せずに、計算量の大幅な低減が生じる。

高次元 θ 関数の数値計算においては、テンソルトレイン・hyperbolic cross ベースの近似

手法（Claeys–Seiner et al., 2023）が g=60 程度まで相対誤差 0.01 程度の計算を実現しているが、超高次元では限界がある。また、Elkies–Kieffer（2025）による FLINT 実装は一般周期行列に対する証明付き精度を提供するが、Siegel 簡約を前提とし超高次元での実用性は未知である。

---

4. 特徴的性質

観測された構造は、以下の性質を持つと考えられる：

- 標準的な意味での完全ブロック対角化ではない
- 通常の意味での退化極限でもない
- 評価過程において実効次元の再帰的縮約が可能
- 構造制約のもとで exact（非近似）計算が可能

これらは、古典的な可約系と一般的高次元系の中間に位置する性質である。

---

5. 用語（暫定）

本現象を記述するために、以下の暫定的用語を導入する：

再帰的可約 θ 構造（Recursively Reducible Theta Structures）

これは、θ 関数評価において実効次元の再帰的縮約を許す周期行列の部分クラスを指す。S(2,2) はその最初の・最も効率的な例であり、S(k,k)（k=3,5,…）や混合基底分解へと一般化される族をなす。S(2,2) はその最初の実装例であり、S(k,k) 族および混合基底分解へと一般化される。

---

6. 計算的含意

この構造に属する場合、θ 関数の計算量は指数的から実質的に多項式的スケーリングへと変化する。

これにより：

- 超高次元における exact 計算の実現
- 構造付き問題に対する信頼性の高いベンチマークの構築
- S(k,k) 族全体を計算することで、g のカバー範囲が飛躍的に広がる：

  S(2,2): $g = 2^n$ 系列
  S(3,3): $g = 3^n$ 系列
  S(5,5): $g = 5^n$ 系列

  これらは互いにほぼ重複しないため、各系列の exact 値を合わせることで、広範な g に対する**構造的ベンチマークデータセット**が構築できる。
  このデータセットは一般手法の近似精度検証および摂動論的拡張の基準値として機能する。

実装においては、(g = 20,000) を超える領域でも安定した計算が確認されている。

一般構造に対する近似法の基準値としての利用——特に CS2023 のような近似手法が g=60 程度で誤差 0.01 に留まる領域において、S(k,k)構造下での exact 値は検証基準として直接機能する。

---

7. 今後の課題

本観測は以下のような課題を提起する：

- 再帰的可約構造の厳密な数学的定式化
- Siegel 空間における位置づけの解明
- 非自明な可約性と隠れた因子化の識別基準
- 近似的構造（摂動）の取り扱い
- 高次元有限ギャップ解などへの応用
- S(k,k) 一般への実装拡張と各系列のベンチマークデータ整備
- 各 g に対する最適分解基底 k の決定問題（素因数分解型最適化）

---

8. 適用範囲と制限

本ノートは以下を主張するものではない：

- 任意の周期行列に対する一般的解法
- 構造の完全分類
- 本現象の完全な新規性の証明

本ノートは S(2,2) を主たる例として記述しているが、同じ論理は S(k,k) 族全体に適用され、計算可能な g のクラスは任意の素数のべき乗およびその積へと拡張される。S(2,2) はその中で最もパディング効率が高い実装として位置づけられる

---

9. 実装

S(2,2) 分解に基づく実装は以下で公開している：

https://github.com/Moriyamax/s22-theta-acceleration

本実装は、本ノートで述べた観測の実験的基盤となるものである。

---

10. 計算構造の moduli 空間（概念的補足）

本ノートで扱う周期行列 Ω は、代数曲線由来の Jacobian とは異なり、 θ 関数評価における再帰的縮約を許す「計算構造」を持つ。 このような Ω の同値類は、幾何学的 moduli とは独立の **計算構造の moduli 空間** を形成する可能性がある。 本ノートではその厳密な定義には踏み込まないが、 S(2,2) および S(k,k) 系列は、この新しい moduli の最初の具体例として位置づけられる。

まとめ

本ノートでは、高次元リーマン θ 関数において、特定の構造を持つ周期行列に対して評価問題が再帰的に低次元化され、従来困難とされてきた領域での exact 計算が可能となる現象を報告した。これは高次元 θ 理論における計算可能性の新たな側面を示唆するものである。