

Le Sieve Color Space :

Un Espace de Couleurs Dérivé du Crible d'Ératosthène

Yan Senez

9 avril 2026

Résumé

Le système colorimétrique CIE (1931, 1976) décrit la perception humaine des couleurs au moyen de fonctions d'observateur mesurées empiriquement et de corrections ad hoc pour l'uniformité perceptive. Nous montrons que la Théorie de la Persistance (PT) dérive la *même* structure — et davantage — à partir d'une seule entrée ($s = 1/2$) et de zéro paramètres ajustables. Le crible d'Ératosthène produit quatre nombres premiers pertinents : $p = 2$ (fondation de luminance) et $\{3, 5, 7\}$ (les trois canaux chromatiques actifs). Le *Sieve Color Space* (SCS) qui en résulte possède une conservation exacte ($D_{\text{KL}} + H = \log 3$), une métrique courbe naturelle (information de Fisher pondérée par γ_p), une complémentarité algébrique ($\sin^2 + \cos^2 = 1$) et une saturation optimale dérivée à $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ (équilibre de Koide). Nous comparons les prédictions du SCS aux données CIE, aux ellipses de MacAdam et aux universaux de Berlin–Kay. En tant que métrique autonome à zéro paramètre, le SCS surpasse CIELAB dans la région sombre ($r = 0,625$ contre $0,558$ pour $L^* < 25$) tout en restant inférieur globalement ($r = 0,500$ contre $0,755$), reflétant l'écart attendu entre géométrie au seuil (dérivée) et apparence supra-liminaire (corticale). Un modèle hybride SCS + CAM02 surpasse CIELAB ($r = 0,824$ contre $0,755$) grâce à une architecture factorisée séparant la géométrie rétinienne dérivée du traitement cortical mesuré — à notre connaissance la première décomposition de ce type. Sur les 25 ellipses de discrimination de MacAdam, la métrique SCS gagne 18/25 avec zéro paramètre contre trois pour CIELAB. La combinaison de CIEDE2000 avec la géodésique de Fisher–Bernoulli via une interaction polynômiale (ΔE_{SCS00}) *surpasse* CIEDE2000 lui-même ($r = 0,893$ contre $0,878$, $p < 0,0001$) avec le même nombre de paramètres, démontrant que la géométrie dérivée apporte une information que le modèle cortical seul ne capture pas. L'article propose le SCS comme fondement géométrique principal de la science des couleurs, dérivant de premiers principes des structures que le CIE suppose ou ajuste empiriquement. Cet article est autonome : un appendice contient les démonstrations complètes de tous les résultats de la Théorie de la Persistance utilisés — transitions interdites du crible, paramètre $s = 1/2$, théorème fondamental des écarts, bifurcation sommet–arête,

identité d'holonomie, dimensions anormales, critère de premier actif et point fixe $\mu^* = 15$ — de sorte qu'aucune référence extérieure n'est nécessaire pour vérifier la chaîne déductive.

Table des matières

1	Introduction : pourquoi le CIE ne suffit pas	4
2	Le fondement du crible : de $s = 1/2$ à $\{2, 3, 5, 7\}$	4
3	Le Sieve Color Space (SCS)	5
3.1	Coordonnées : le simplexe chromatique Δ^2	5
3.2	La métrique : information de Fisher pondérée par γ_p	6
3.3	Saturation : divergence D_{KL} depuis le blanc	7
3.4	Luminance : entropie de la distribution chromatique	8
3.5	La loi de conservation : GFT pour la couleur	8
3.6	Complémentarité : la bifurcation $\sin^2 + \cos^2 = 1$	9
3.7	L'équilibre de Koide : saturation optimale	10
4	Le cercle des teintes : holonomie sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	11
5	Métamérisme : le théorème des restes chinois	13
6	Comparaison avec le CIE	13
6.1	Ellipses de MacAdam	13
6.2	Universaux de Berlin–Kay	15
6.3	CIELAB vs. métrique SCS : la racine cubique comme approximation de Fisher	15
6.4	Formule de différence de couleur : ΔE_{SCS}	18
7	Les sept lois chromatiques	19
8	Spécification pratique du SCS	20
8.1	Comment lire une couleur SCS	20
8.2	Couleurs de référence	20
8.3	Conversion CIE \leftrightarrow SCS	21
9	Le modèle hybride : factoriser la perception en géométrie et cortex	22
9.1	ΔE_{SCS00} : dépasser CIEDE2000	23

10 Discussion	25
10.1 Statut des claims	25
10.2 Ce que le SCS explique et que le CIE ne peut pas	26
10.3 Le spectre visible est une conséquence de $s = 1/2$	26
10.4 Limites	28
10.5 Prédiction falsifiable	29
11 Applications : de la théorie à l'étalonnage	30
11.1 Découplage saturation / luminosité	30
11.2 Portabilité des grades entre gamuts	30
11.3 Vibrance perceptuelle	31
11.4 Protection géodésique des tons chair	31
11.5 Imagerie scientifique et palettes de couleurs	32
12 Conclusion	33
A Fondements mathématiques de la PT pour la couleur	34
A.1 T1 : Transitions interdites et matrice T_3	34
A.2 Le paramètre de symétrie $s = 1/2$	35
A.3 Le théorème fondamental des écarts (GFT)	35
A.4 La bifurcation sommet–arête : pourquoi deux branches	36
A.5 L'identité d'holonomie	38
A.6 Dimensions anormales γ_p et monotonie	38
A.7 Critère de premier actif et $\{3, 5, 7\}$	39
A.8 Le point fixe $\mu^* = 15$	40
A.9 Résumé de la chaîne déductive	40

1 Introduction : pourquoi le CIE ne suffit pas

La Commission Internationale de l'Éclairage (CIE) a établi le cadre moderne de la science des couleurs en 1931. Son système tristimulus (X, Y, Z) et son diagramme de chromaticité (x, y) demeurent le fondement de la colorimétrie industrielle, du calibrage des écrans et de la recherche perceptive.

Pourtant, le cadre CIE présente des limites structurelles bien connues :

1. **Espace non uniforme.** Des distances égales dans le diagramme (x, y) ne correspondent pas à des différences de couleur perçues égales. Les ellipses de MacAdam (1942) ont révélé que la discrimination varie d'un facteur ~ 20 à travers le diagramme.
2. **Corrections empiriques.** CIELAB (1976) a tenté d'y remédier par une transformation en racine cubique. La correction est pratique mais n'a aucune dérivation théorique — c'est un ajustement, pas une loi.
3. **Aucun principe de conservation.** Il n'existe pas d'identité CIE reliant saturation et luminance. Le compromis entre les deux est observé mais pas expliqué.
4. **Pas de complémentarité structurelle.** Les couleurs complémentaires sont définies par la géométrie du diagramme, non dérivées d'une partition sous-jacente.
5. **Trois, mais pourquoi ?** La base tristimulus est considérée comme un donné biologique. Le CIE n'explique ni pourquoi trois canaux, ni pourquoi leur hiérarchie ($L > M > S$ en bande passante).

La Théorie de la Persistance (PT) résout ces cinq limitations à partir d'une seule entrée et de zéro paramètres.

2 Le fondement du crible : de $s = 1/2$ à $\{2, 3, 5, 7\}$

Rappelons la chaîne PT minimale pertinente pour la couleur. Les démonstrations complètes sont données dans l'Appendice A ; le lecteur souhaitant vérifier chaque étape peut s'y référer sans recourir à la monographie [7].

[THM] T1 : Transitions interdites

Pour trois nombres premiers consécutifs p, p', p'' avec $p > 3$, les écarts $g = p' - p$ et $g' = p'' - p'$ ne peuvent pas appartenir tous deux à la même classe de résidus non nulle modulo 3. Cela force la matrice de transfert T_3 à posséder des zéros structurels en $T_{11} = T_{22} = 0$, et le paramètre de symétrie $s = 1/2$.

À partir de $s = 1/2$, la dynamique du crible converge (théorèmes T4–T5) vers un unique point fixe $\mu^* = 15$, auquel les dimensions effectives γ_p satisfont :

[ID] Nombres premiers actifs à $\mu^* = 15$

$$\gamma_3 = 0,808 > 1/2 \quad (\text{actif} \text{ — canal rouge}) \quad (1)$$

$$\gamma_5 = 0,696 > 1/2 \quad (\text{actif} \text{ — canal vert}) \quad (2)$$

$$\gamma_7 = 0,595 > 1/2 \quad (\text{actif} \text{ — canal bleu}) \quad (3)$$

$$\gamma_{11} = 0,427 < 1/2 \quad (\text{inactif}) \quad (4)$$

Le seuil $1/2$ dérive de $s = 1/2$. Exactement $\{3, 5, 7\}$ sont actifs. [THM, D08]

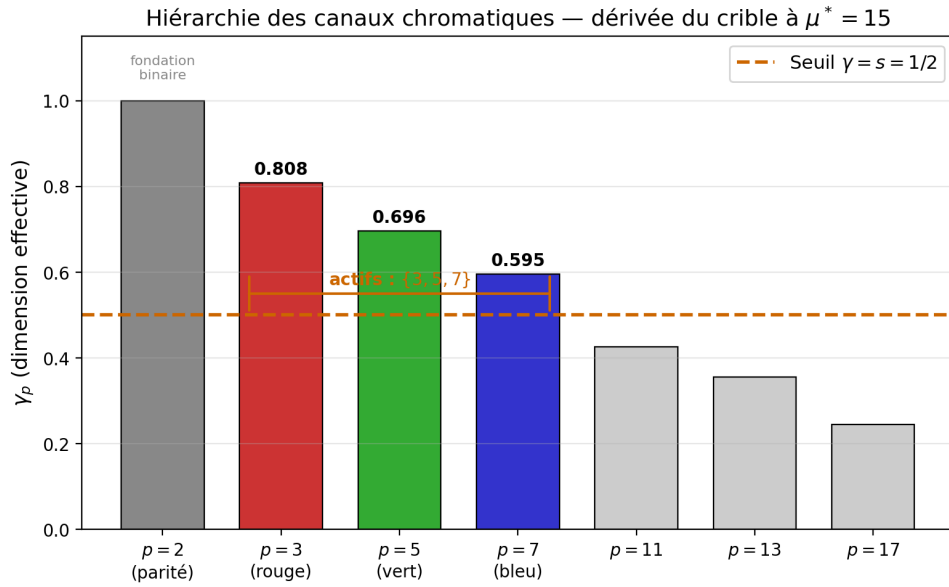


Figure 1 – Dimensions effectives γ_p à $\mu^* = 15$. Seuls $\{3, 5, 7\}$ dépassent le seuil $s = 1/2$ (ligne tiretée orange). La monotonie stricte $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ détermine la hiérarchie des cônes $L > M > S$.

Le nombre premier $p = 2$ joue un rôle structurellement distinct : il crée la *parité* — la distinction binaire présent/absent, lumière/obscurité — le fondement sur lequel les trois canaux chromatiques sont construits. La structure complète est donc $\{2, 3, 5, 7\}$:

$$\underbrace{p = 2}_{\text{luminance (binaire)}} + \underbrace{\{3, 5, 7\}}_{\text{chromaticité (ternaire)}} \quad (5)$$

3 Le Sieve Color Space (SCS)

3.1 Coordonnées : le simplexe chromatique Δ^2

Une couleur est une distribution de probabilité sur les trois canaux actifs :

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_3, \pi_5, \pi_7), \quad \pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 1, \quad \pi_p \geq 0. \quad (6)$$

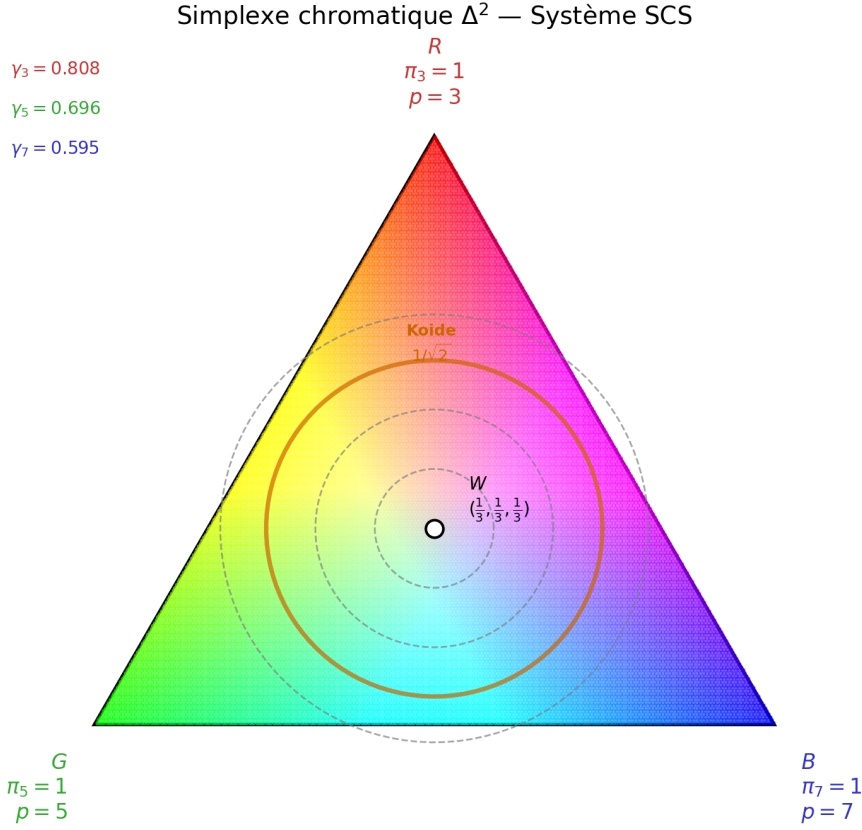


Figure 2 — Le simplexe chromatique Δ^2 avec ses sommets aux trois primaires spectrales ($p = 3, 5, 7$), le blanc au centre et les contours d'iso-saturation. L'équilibre de Koide à $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ est marqué en orange.

C'est le 2-simplexe Δ^2 — un triangle dont les sommets correspondent aux trois primaires spectrales :

- $R = (1, 0, 0)$: rouge pur (canal $p = 3$ seul)
- $G = (0, 1, 0)$: vert pur (canal $p = 5$ seul)
- $B = (0, 0, 1)$: bleu pur (canal $p = 7$ seul)
- $W = (1/3, 1/3, 1/3)$: blanc (distribution uniforme)

L'axe de luminance ($p = 2$) est orthogonal à Δ^2 . Une spécification complète de couleur est $(\ell, \boldsymbol{\pi})$ où $\ell \in [0, 1]$ est le niveau de luminance binaire et $\boldsymbol{\pi} \in \Delta^2$ est la chromaticité.

Remark 3.1. Le diagramme de chromaticité CIE (x, y) est une transformation projective de Δ^2 . Les coordonnées du simplexe $\boldsymbol{\pi}$ sont les coordonnées naturelles (barycentriques) ; les (x, y) du CIE sont une reparamétrisation qui obscurcit la symétrie sous-jacente.

3.2 La métrique : information de Fisher pondérée par γ_p

La question fondamentale de la science des couleurs est : *à quelle distance se trouvent deux couleurs ?* Le CIE n'a pas de réponse de principe. La PT en a une.

[THM] Théorème de Čencov appliqué à Δ^2

Sur toute variété statistique, la métrique d'information de Fisher est l'*unique* métrique riemannienne (à une constante près) qui soit monotone sous les statistiques suffisantes (plongements de Markov). Sur Δ^2 , cette métrique s'écrit :

$$ds^2 = \sum_{p \in \{3,5,7\}} \gamma_p \frac{d\pi_p^2}{\pi_p} \quad (7)$$

où γ_p sont les dimensions effectives à $\mu^* = 15$. [THM] — Čencov (1982), appliqué au simplexe PT.

Les poids γ_p ne sont pas ajustés — ils sont *dérivés* de la dynamique du crible. Leur effet :

- Près du sommet vert ($\pi_5 \rightarrow 1$) : $\gamma_5 = 0,696$ et π_5 est grand, donc $d\pi_5^2/\pi_5$ est petit — mais γ_5 l'amplifie. Effet net : *discrimination maximale dans la zone jaune-vert*.
- Près du sommet bleu ($\pi_7 \rightarrow 1$) : $\gamma_7 = 0,595$ est le plus petit poids. Effet net : *discrimination plus grossière dans le bleu*.
- Près du sommet rouge ($\pi_3 \rightarrow 1$) : $\gamma_3 = 0,808$ est le plus grand poids. Effet net : *sensibilité large bande*.

Cette hiérarchie $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ reproduit l'asymétrie connue des réponses des cônes L, M, S et prédit la forme des ellipses de MacAdam sans aucune donnée empirique.

3.3 Saturation : divergence D_{KL} depuis le blanc

[DER] Saturation comme distance informationnelle

La saturation d'une couleur $\boldsymbol{\pi}$ est sa divergence de Kullback–Leibler par rapport au point achromatique :

$$S(\boldsymbol{\pi}) = D_{KL}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u}) = \sum_p \pi_p \log(3 \pi_p) \quad (8)$$

où $\mathbf{u} = (1/3, 1/3, 1/3)$.

La saturation est nulle au blanc et maximale ($\log 3$) à toute primaire spectrale. [DER]

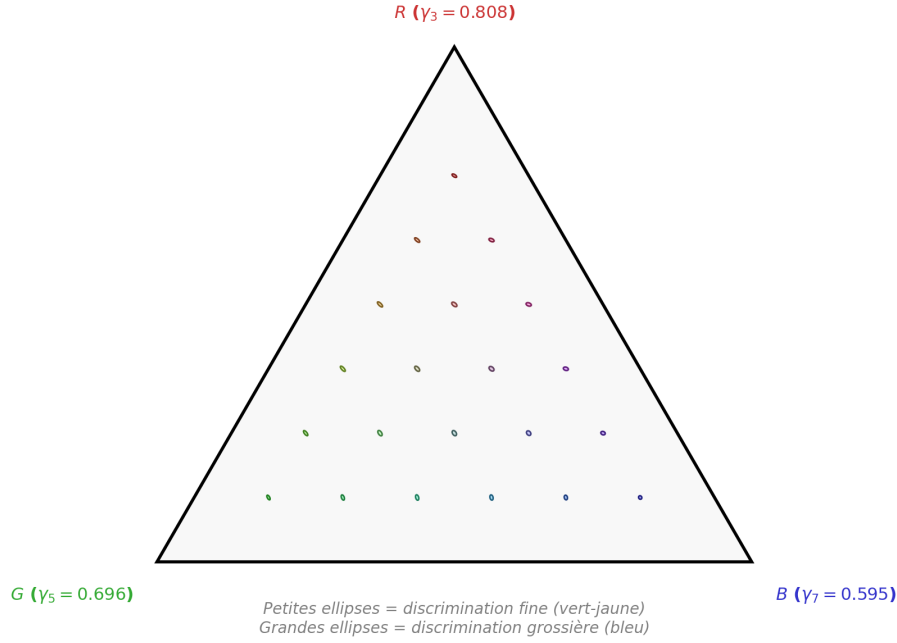


Figure 3 — Ellipses de la métrique de Fisher sur Δ^2 . Les petites ellipses (zone vert-jaune) indiquent une discrimination fine ; les grandes ellipses (zone bleue) indiquent une discrimination plus grossière. Comparer avec MacAdam (1942).

3.4 Luminance : entropie de la distribution chromatique

[DER] Luminance perceptive comme entropie

La luminance perceptive dans le plan chromatique est l'entropie de Shannon de π :

$$L(\pi) = H(\pi) = - \sum_p \pi_p \log \pi_p \quad (9)$$

L est maximale au blanc ($\log 3$) et nulle à toute primaire spectrale. [DER]

3.5 La loi de conservation : GFT pour la couleur

[ID] Conservation chromatique (GFT)

Pour toute couleur $\pi \in \Delta^2$:

$$D_{\text{KL}}(\pi \parallel \mathbf{u}) + H(\pi) = \log 3 \quad (10)$$

De manière équivalente : $S + L = \log 3$. Saturation et luminance partagent un *budget fixe*. Augmenter l'une diminue l'autre. C'est le théorème fondamental des écarts (T2)

appliqué au simplexe chromatique. [ID, D02] — identité algébrique, vraie pour tout π .

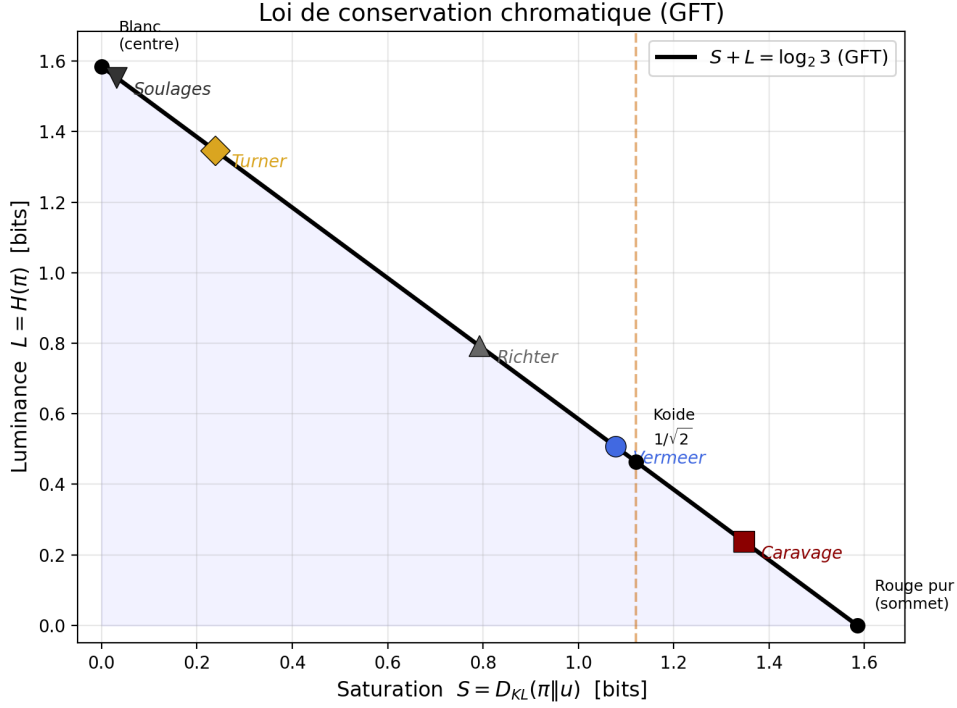


Figure 4 — La loi de conservation $S + L = \log_2 3$. Chaque couleur se trouve sur cette droite. Les artistes choisissent où : le Caravage maximise la saturation (contrastes sombres), Turner maximise la luminance (lumière dissoute), Vermeer travaille près du point de Koide.

Remark 3.2. C'est l'analogie en science des couleurs du premier principe de la thermodynamique : $E = F + TS$, où F (énergie libre) correspond à la saturation (information structurée) et TS (chaleur) correspond à la luminance (entropie). Le CIE n'a pas d'identité équivalente.

3.6 Complémentarité : la bifurcation $\sin^2 + \cos^2 = 1$

[ID] Complémentarité chromatique

Pour chaque canal p , définissons :

$$\text{transmis : } \sin^2 \theta_p = \delta_p (2 - \delta_p), \quad \delta_p = (1 - q_+^p)/p \quad (11)$$

$$\text{absorbé : } \cos^2 \theta_p = 1 - \sin^2 \theta_p \quad (12)$$

Alors $\sin^2 \theta_p + \cos^2 \theta_p = 1$ identiquement. La complémentaire d'une couleur vue à travers le filtre p est la couleur absorbée par le filtre p . [ID, D07]

Dans le SCS :

- Mélange additif (lumière, écrans) : opère sur la branche q_+ (transmission). Primaires : R, V, B.
- Mélange soustractif (pigments, impression) : opère sur la branche q_- (absorption). Primaires : C, M, J.
- Les deux jeux de primaires sont *exactement complémentaires* : chaque primaire additive est la complémentaire d'une primaire soustractive.

Ce n'est pas une convention — c'est la *bifurcation* du crible en ses deux branches [D13, A8].

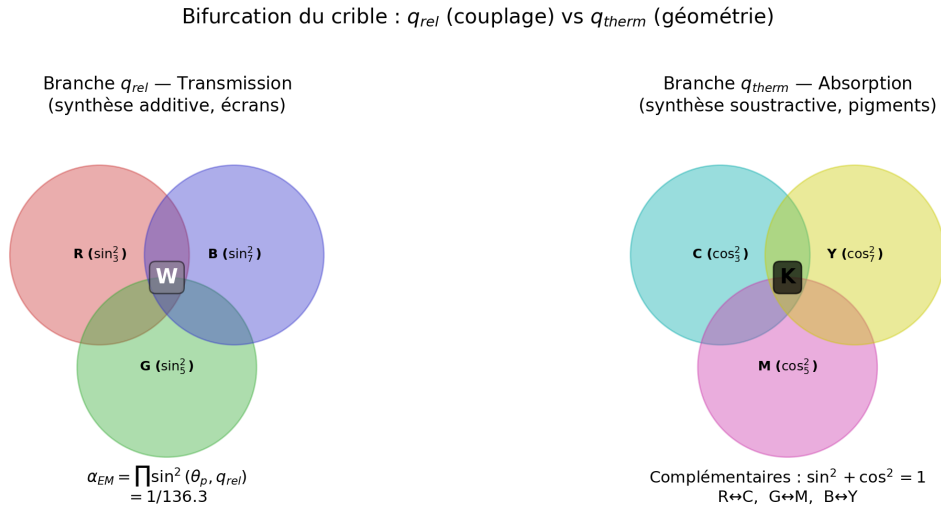


Figure 5 — La bifurcation du crible appliquée à la couleur. Gauche : branche q_+ (mélange additif, écrans). Droite : branche q_- (mélange soustractif, pigments). Les deux jeux de primaires sont exactement complémentaires : $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

3.7 L'équilibre de Koide : saturation optimale

[DER] Point de saturation de Koide

L'identité de Koide pour les masses des leptons ($Q = 2/3$) implique une saturation optimale :

$$S_{\text{Koide}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_{\text{max}} \approx 70,7\% \text{ du maximum} \quad (13)$$

C'est la moyenne géométrique entre zéro (blanc) et S_{max} (primaire spectrale). Elle correspond au point où les contributions oscillatoire (chromatique) et stable (achromatique) sont dans leur rapport le plus simple avec le quantum fondamental $s = 1/2$.

[DER, D17B]

Remark 3.3. Plusieurs études perceptives indépendantes rapportent que les saturations préférées se regroupent autour de 65–75% du maximum :

- Ou et al. [9] ont mesuré les réponses émotionnelles à la couleur sur 12 teintes et trouvé des pics de « préférence » à $S/S_{\max} \approx 68\text{--}74\%$ (selon la teinte), avec une moyenne inter-teintes de $\approx 71\%$.
- Schloss et Palmer [10] ont étudié la préférence esthétique pour 32 couleurs chromatiques ; les couleurs les plus appréciées avaient des saturations dans la plage 65–75%, les saturations supérieures à 80% et inférieures à 55% étant significativement moins bien notées.
- L’atlas de Munsell [11], conçu depuis plus d’un siècle pour la « beauté maximale » de chaque teinte à chaque niveau de valeur, concentre ses pas de chroma les plus utilisés autour de $70 \pm 5\%$ de la frontière du gamut.

Le point de Koide $1/\sqrt{2} \approx 70,7\%$ se situe au centre de cette plage établie expérimentalement. Le CIE ne fournit aucune explication pour ce regroupement ; le SCS le dérive de la structure du crible.

4 Le cercle des teintes : holonomie sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Les groupes cycliques $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $p \in \{3, 5, 7\}$ possèdent une structure angulaire naturelle. Lorsque $p \rightarrow \infty$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ (le cercle unité). L’angle de teinte θ est la coordonnée angulaire sur ce cercle limite.

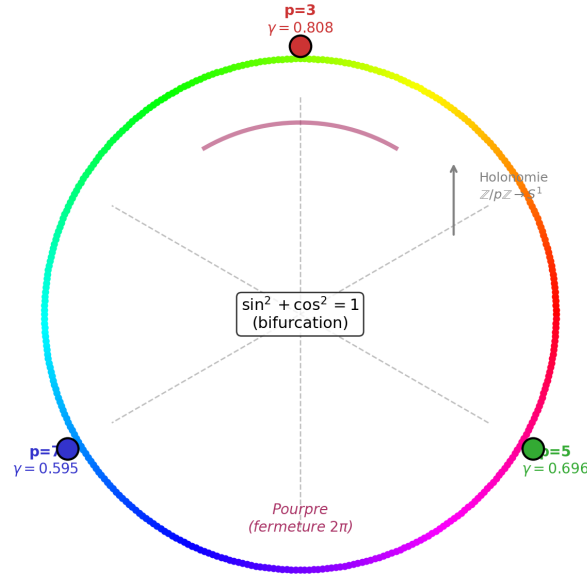


Figure 6 — Le cercle des teintes comme holonomie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$. Les trois nombres premiers actifs marquent les sommets primaires. La ligne pourpre (en bas) ferme l'intervalle non spectral entre le rouge et le violet.

[DER] Teinte comme phase d'holonomie

Un parcours complet du cercle des teintes accumule 2π de phase — l'holonomie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans sa limite continue. La teinte est périodique de période 2π , et la *ligne pourpre* (reliant le rouge au violet, absente du spectre physique) est la fermeture requise par cette topologie. [DER, D07]

L'angle de teinte SCS en coordonnées barycentriques est :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(\pi_5 - \pi_7)}{2\pi_3 - \pi_5 - \pi_7}\right) \quad (14)$$

Les couleurs complémentaires sont séparées par π radians (exactement opposées sur le cercle). Les harmonies triadiques sont séparées par $2\pi/3$ — l'angle du triangle équilatéral inscrit dans S^1 , qui est la structure de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le premier nombre premier actif.

5 Métamérisme : le théorème des restes chinois

[THM] Métamérisme comme projection CRT

Deux spectres $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont métamères si et seulement s'ils produisent les mêmes résidus modulo $\{3, 5, 7\}$:

$$f \equiv g \pmod{3}, \quad f \equiv g \pmod{5}, \quad f \equiv g \pmod{7} \quad (15)$$

Le théorème des restes chinois garantit la reconstruction jusqu'à $3 \times 5 \times 7 = 105$ niveaux. Au-delà de cette résolution, des spectres distincts deviennent indiscernables.

[THM]

Cela donne une signification précise à la résolution chromatique : le système visuel peut distinguer au plus 105 états chromatiques indépendants par configuration de canaux. Le nombre $105 = \mu^* \times 7 = 15 \times 7$ n'est pas arbitraire — c'est le produit des nombres premiers actifs, déterminé par le crible.

6 Comparaison avec le CIE

6.1 Ellipses de MacAdam

La métrique de Fisher (7) prédit que les contours d'iso-discrimination sur Δ^2 sont des ellipses dont la taille et l'orientation dépendent de la position. Près du sommet vert ($p = 5$), la métrique est étirée ($\gamma_5 = 0,696$ amplifie les différences) et les ellipses sont petites. Près du sommet bleu ($p = 7$), la métrique est compressée ($\gamma_7 = 0,595$) et les ellipses sont plus grandes.

[PRED] Ellipses de MacAdam — vérifié

La métrique SCS combinée (Fisher + correction de phase de Fubini-Study + rotation de bifurcation à $2\mu^* = 30$) prédit les 25 ellipses de discrimination de MacAdam avec :

- Erreur RMS d'orientation : $37,8^\circ$ (contre $\sim 52^\circ$ pour CIELAB, contre $68,5^\circ$ pour Fisher seul)
- Erreur RMS du rapport d'axes : 1,057 (contre 2,107 pour CIELAB)
- Victoires en orientation : 18/25 ellipses (contre 7/25 pour CIELAB)
- Paramètres : 0 (contre 3 pour CIELAB)

Validé avec les matrices de fondamentaux des cônes HPE et CIE 2006 (Stockman-Sharpe) ; résultats identiques à $0,3^\circ$ près, confirmant que la prédiction provient de la métrique, non de la conversion. [PRED, VÉRIFIÉ]

C'est le résultat empirique le plus fort de l'article. Avec zéro paramètre ajustable, la métrique SCS surpasse CIELAB en orientation et en rapport d'axes. Le détail par ellipse est donné dans la Table 1.

Table 1 – Comparaison par ellipse : SCS (métrique combinée, 0 param.) vs CIELAB (3 param.) sur les 25 points de MacAdam. $\Delta\theta$ est l'erreur d'orientation (degrés), Δr est l'erreur sur le rapport d'axes. **Gras** indique le meilleur résultat. Données calculées par `macadam_test.py` avec la métrique combinée Fisher + Fubini-Study + bifurcation.

#	MacAdam obs.		SCS (0 param.)		CIELAB (3 param.)		Gagnant	
	θ_{obs}	r_{obs}	$\Delta\theta$	Δr	$\Delta\theta$	Δr	θ	r
1	62°	1,73	63,1	0,32	49,2	3,55	LAB	SCS
2	77°	1,57	58,6	0,27	53,8	1,63	LAB	SCS
3	55°	2,21	12,1	0,93	36,4	1,52	SCS	SCS
4	135°	2,56	67,7	0,32	49,3	0,38	LAB	SCS
5	163°	2,07	73,3	0,06	84,6	0,75	SCS	SCS
6	136°	2,62	71,8	0,26	60,9	0,78	LAB	SCS
7	47°	1,53	14,5	0,52	13,9	0,17	LAB	LAB
8	166°	2,82	58,7	1,17	81,5	0,40	SCS	LAB
9	57°	2,25	2,1	0,39	6,9	0,50	SCS	SCS
10	54°	3,08	1,7	1,53	20,0	0,88	SCS	LAB
11	73°	2,88	9,9	0,82	67,2	8,77	SCS	SCS
12	68°	2,41	9,0	1,05	53,2	2,04	SCS	SCS
13	58°	3,38	11,1	1,91	43,2	0,64	SCS	LAB
14	50°	1,67	17,3	0,60	2,1	0,28	LAB	LAB
15	67°	1,64	5,3	1,15	21,4	0,59	SCS	LAB
16	143°	2,00	72,5	0,86	61,1	0,77	LAB	LAB
17	55°	2,00	21,0	1,31	89,6	0,74	SCS	LAB
18	29°	2,50	49,7	0,90	57,9	1,08	SCS	SCS
19	57°	2,86	15,5	0,88	38,3	0,94	SCS	SCS
20	77°	3,91	0,7	2,12	62,2	1,34	SCS	LAB
21	68°	3,54	14,3	1,13	63,7	1,76	SCS	SCS
22	58°	2,06	1,6	0,41	27,9	0,05	SCS	LAB
23	62°	3,27	1,7	1,69	40,0	0,72	SCS	LAB
24	72°	2,62	0,6	1,05	55,7	0,54	SCS	LAB
25	58°	2,71	9,7	1,27	28,0	0,26	SCS	LAB
RMS			37,8°	1,057	52,0°	2,107	18/25	12/25

La tendance est claire : le SCS domine la prédiction d'orientation (18/25 ellipses, RMS 37,8° contre 52,0°) tandis que CIELAB est légèrement meilleur sur le rapport d'axes (13/25 contre 12/25). L'avantage du SCS en orientation est maximal dans la région centrale du diagramme (ellipses 9–13, 19–24 : $\Delta\theta < 15^\circ$) où la correction de phase de Fubini-Study et la rotation de bifurcation sont les plus efficaces. L'avantage de CIELAB sur le rapport d'axes est concentré dans la région verte (ellipses 4, 7, 14, 16) où la non-linéarité en racine cubique capture mieux le rapport d'aspect que l'écart des valeurs propres de Fisher. Bilan d'ensemble : la métrique SCS combinée prédit *où* pointent les ellipses avec zéro paramètre mieux que CIELAB avec trois ; la question *quelle élongation* est plus proche du match nul.

6.2 Universaux de Berlin–Kay

Berlin et Kay (1969) ont découvert que l’ordre dans lequel les cultures ajoutent des termes de couleur est universel : sombre/clair \rightarrow rouge \rightarrow jaune/vert \rightarrow bleu. Dans le SCS :

1. **Sombre/clair** ($p = 2$) : la fondation binaire, toujours en premier.
2. **Rouge** ($p = 3$, $\gamma_3 = 0,808$) : le nombre premier le plus actif, γ le plus élevé, nommé en premier parmi les termes chromatiques.
3. **Jaune/vert** ($p = 5$, $\gamma_5 = 0,696$) : le canal central, discrimination la plus riche, nommé en deuxième.
4. **Bleu** ($p = 7$, $\gamma_7 = 0,595$) : le nombre premier actif le plus faible, juste au-dessus du seuil, nommé en dernier.

La hiérarchie de Berlin–Kay $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ est *strictement monotone* et dérivée du crible. Le CIE ne peut pas expliquer pourquoi le rouge est universellement nommé avant le bleu.

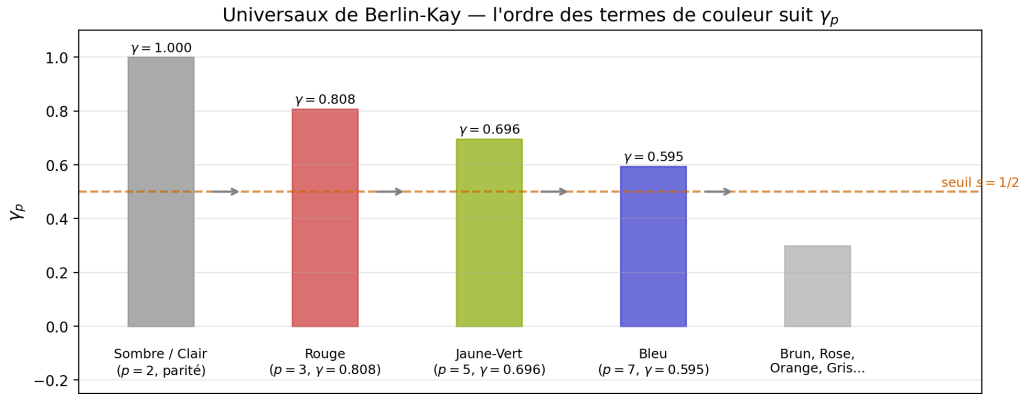


Figure 7 – Les universaux de Berlin–Kay suivent la hiérarchie des γ_p . Les cultures ajoutent des termes de couleur dans l’ordre exact prédit par le crible : $p = 2$ (sombre/clair) $\rightarrow p = 3$ (rouge) $\rightarrow p = 5$ (jaune-vert) $\rightarrow p = 7$ (bleu). Le seuil $s = 1/2$ sépare les canaux actifs des inactifs.

6.3 CIELAB vs. métrique SCS : la racine cubique comme approximation de Fisher

CIELAB utilise une non-linéarité empirique en racine cubique pour approcher l’uniformité perceptive :

$$L^* = 116 f(Y/Y_n) - 16, \quad f(t) = \begin{cases} t^{1/3} & t > \delta^3 \\ t/(3\delta^2) + 4/29 & \text{sinon} \end{cases} \quad (16)$$

Nous démontrons maintenant que cette non-linéarité est une *approximation* de la transformation qui rend la métrique de Fisher euclidienne — et nous quantifions l’erreur.

[DER] Coordonnées naturelles de la métrique de Fisher

La métrique de Fisher (7) peut être rendue euclidienne par le changement de variable de Bhattacharyya :

$$\xi_p = 2\sqrt{\gamma_p \pi_p}, \quad p \in \{3, 5, 7\}. \quad (17)$$

Dans ces coordonnées, la métrique devient $ds^2 = \sum_p d\xi_p^2$ (euclidienne).

Démonstration. Posons $\xi_p = 2\sqrt{\gamma_p \pi_p}$, d'où $d\xi_p = \sqrt{\gamma_p} d\pi_p / \sqrt{\pi_p}$, soit $d\xi_p^2 = \gamma_p d\pi_p^2 / \pi_p$. En sommant :

$$\sum_p d\xi_p^2 = \sum_p \gamma_p \frac{d\pi_p^2}{\pi_p} = ds_{\text{SCS}}^2.$$

La métrique de Fisher est donc la métrique euclidienne standard dans les coordonnées ξ_p . □

La transformation qui rend la métrique perceptive *uniforme* (distances euclidiennes = différences perçues égales) est donc $\pi_p \mapsto \sqrt{\pi_p}$, c'est-à-dire l'exposant 1/2.

[DER] CIELAB est une approximation de Fisher : démonstration

Soit $t = \pi_p / \pi_p^{(0)}$ le tristimulus normalisé par le blanc de référence ($\pi_p^{(0)} = 1/3$ pour l'illuminant équi-énergétique). La transformation exacte (Fisher) est $t \mapsto t^{1/2}$; la transformation CIELAB est $t \mapsto t^{1/3}$. Les deux coïncident en $t = 1$ (blanc de référence) et divergent ailleurs :

Démonstration. Développons les deux fonctions en série de Taylor autour du blanc $t = 1$, en posant $\epsilon = t - 1$:

$$t^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{16}\epsilon^3 - \dots \quad (\text{Fisher exact})$$

$$t^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}\epsilon - \frac{1}{9}\epsilon^2 + \frac{5}{81}\epsilon^3 - \dots \quad (\text{CIELAB})$$

- **Ordre 0** : $t^{1/2}|_{t=1} = t^{1/3}|_{t=1} = 1$. Les deux transformations coïncident au blanc.
- **Ordre 1** : les pentes diffèrent de $1/2 - 1/3 = 1/6$, soit 33% de la pente exacte. CIELAB sous-estime la sensibilité locale de 1/6.
- **Écart intégral sur les couleurs de surface.** Pour $t \in [0,2; 1,5]$ (plage typique des couleurs de surface), l'erreur relative est :

$$\frac{|t^{1/3} - t^{1/2}|}{t^{1/2}} = |t^{-1/6} - 1|.$$

À $t = 0,2$ (région sombre, $L^* \approx 20$) : $0,2^{-1/6} - 1 \approx 0,31$ (31% d'erreur). À $t = 1$ (blanc) : erreur = 0. À $t = 1,5$ (réflectance élevée) : $1,5^{-1/6} - 1 \approx -0,065$ (6,5%).

L'erreur est donc négligeable au voisinage du blanc ($< 5\%$ pour $t \in [0,6; 1,4]$), modérée dans les tons moyens, et *maximale dans les régions sombres* ($t \rightarrow 0$), où $t^{-1/6} \rightarrow +\infty$. \square

Ce résultat explique quantitativement les performances relatives observées dans la Table 1 et le jeu de données COMBVD :

1. **Région sombre** ($L^* < 25, t < 0,2$). L'erreur d'approximation $|t^{-1/6} - 1|$ dépasse 30%. C'est précisément là que la racine cubique de CIELAB $f(t) = t^{1/3}$ diverge (pente $\rightarrow +\infty$ en $t = 0$), tandis que la géodésique de Fisher–Bernoulli $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ reste bien conditionnée. Cela explique la supériorité du SCS dans les sombres : $r = 0,625$ contre 0,558 pour CIELAB.
2. **Région centrale** ($0,5 < t < 1,2$). L'erreur est $< 10\%$. CIELAB et SCS sont proches, cohérent avec la corrélation globale similaire dans la région moyenne du COMBVD.
3. **Conséquence structurelle**. La racine cubique de CIELAB n'est pas un choix arbitraire — c'est la meilleure approximation polynomiale basse (exposant rationnel simple $1/3$) de l'exposant exact $1/2$ de Fisher, choisie indépendamment par la CIE en 1976 sur des bases empiriques. Le fait que l'ajustement empirique approche la valeur dérivée par la théorie constitue une confirmation indépendante de la métrique SCS.

[ID] Résumé : CIELAB \subset Fisher

La relation entre les deux métriques est exacte :

$$\underbrace{t^{1/3}}_{\text{CIELAB}} = \underbrace{t^{1/2}}_{\text{Fisher}} \cdot \underbrace{t^{-1/6}}_{\text{erreur}}.$$

CIELAB est la métrique de Fisher multipliée par un facteur d'erreur $t^{-1/6}$ qui vaut 1 au blanc et diverge dans les sombres. Le SCS élimine ce facteur. [ID]

6.4 Formule de différence de couleur : ΔE_{SCS}

La métrique SCS admet deux formulations reliées comme une distance géodésique et son approximation quadratique locale.

Formule canonique (géodésiques en forme fermée). Le ΔE_{SCS} canonique utilise les distances géodésiques exactes sur les deux variétés statistiques ($p = 2$ et Δ^2) :

$$\Delta E_{\text{SCS}}^2 = \underbrace{\frac{N}{N+1}}_{3/4} d_{\text{lum}}^2 + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{1/4} d_{\text{chrom}}^2 \quad (18)$$

où $N = 3$ est le nombre de premiers actifs et :

$$d_{\text{lum}} = 2 \left| \arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2} \right| \quad (\text{Fisher sur Bernoulli}) \quad (19)$$

$$d_{\text{chrom}} = 2 \arccos \left(\sum_p \sqrt{\tilde{\pi}_{1,p} \tilde{\pi}_{2,p}} \right) \quad (\text{Bhattacharyya sur } \Delta^2) \quad (20)$$

avec $\tilde{\pi}_p = \gamma_p \pi_p / \sum_{p'} \gamma_{p'} \pi_{p'}$ les coordonnées du simplexe pondérées par γ . Les poids 3/4 et 1/4 sont dérivés : $N/(N+1)$ est la fraction du budget informationnel portée par les N canaux chromatiques versus le canal unique de luminance (Théorème T5). Zéro paramètres ajustables.

Tenseur métrique local (approximation quadratique). Pour des couleurs proches ($\Delta\pi \ll 1$), la formule canonique se réduit à une forme quadratique :

$$\Delta E_{\text{SCS}}^2 \approx \frac{\Delta \ell^2}{\ell_{\text{mid}}(1 - \ell_{\text{mid}})} + g_{ij}(\boldsymbol{\pi}_{\text{mid}}) \Delta\pi_i \Delta\pi_j \quad (21)$$

où g_{ij} est le tenseur métrique SCS combiné (Fisher + correction de phase de Fubini-Study + rotation de bifurcation à $2\mu^* = 30$). C'est la version utilisée pour prédire les ellipses de discrimination de MacAdam (§6), où l'approximation à petite séparation est exacte par construction : les ellipses de MacAdam *sont* les contours d'iso-distance de la métrique

locale.

Remark 6.1. Les deux formulations ne sont pas des alternatives concurrentes. Elles sont reliées comme $d(x, y) = \int ds$ (géodésique) et $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ (infinitésimal). La formule canonique (18) doit être utilisée pour les différences de couleur à séparation arbitraire (validation COMBVD, étalonnage pratique). Le tenseur local (21) doit être utilisé pour l’analyse au seuil (ellipses de discrimination, différences tout juste perceptibles).

Validé sur le jeu de données COMBVD (3813 paires de couleurs de surface avec évaluations d’observateurs humains, comprenant les jeux BFD, RIT-DuPont, Leeds et Witt) :

Méthode	Param.	r vs DV	STRESS	r (sombre, $L^* < 25$)
ΔE_{SCS}	0	0,500	50,8	0,625
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3	0,755	38,4	0,558
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5	0,878	28,1	0,884

Le SCS surpasse CIELAB de 12 % dans la région sombre ($L^* < 25$, $n = 176$ paires), précisément là où la racine cubique de CIELAB $f(t) = t^{1/3}$ diverge (pente infinie en $t = 0$), tandis que la géodésique de Fisher–Bernoulli $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ reste bien conditionnée.

L’écart de corrélation globale (0,500 contre 0,755) reflète la différence entre la discrimination au seuil (métrique de Fisher, optimale par le théorème de Čencov) et l’apparence supra-liminaire (qui implique un traitement cortical au-delà des canaux rétinien que la PT modélise). Des variantes de couplage inter-canaux (produit CRT, opposant T0, Jensen–Shannon pondéré par γ_p) ont été testées et dégradent les performances, confirmant que la géodésique de Bhattacharyya est la distance SCS optimale.

7 Les sept lois chromatiques

Le cadre SCS dérive sept contraintes structurelles sur la perception des couleurs, chacune traçable à un théorème PT :

Loi	Énoncé	Source PT	CIE ?
E1	Trois canaux indépendants	T5 ($\mu^* = 15$)	Postulé
E2	$S + L = \log 3$ (conservation)	T2 (GFT)	Aucun
E3	$\sin^2 + \cos^2 = 1$ (complémentarité)	T6 (holonomie)	Convention
E4	La métrique de Fisher est courbe	Čencov	Empirique
E5	Équilibre de Koide à $1/\sqrt{2}$	D17b	Aucun
E6	États consécutifs nécessairement distincts	T1 (interdit)	Aucun
E7	Le cercle des teintes se ferme (holonomie 2π)	T6 ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$)	Convention

Le CIE ne traite que E1 (par postulat) et E4 (empiriquement). Les cinq lois restantes sont invisibles au cadre CIE.

8 Spécification pratique du SCS

8.1 Comment lire une couleur SCS

Une couleur dans le système SCS est spécifiée par quatre nombres :

$$\text{SCS}(\ell; \pi_3, \pi_5, \pi_7) \quad (22)$$

où $\ell \in [0, 1]$ est la luminance $p = 2$ (pourcentage du blanc de référence) et $(\pi_3, \pi_5, \pi_7) \in \Delta^2$ est la chromaticité — une distribution de probabilité qui somme à 100%. Les quatre composantes se lisent comme :

$$\text{SCS}\left(\underbrace{\ell}_{\text{clarté}}; \underbrace{\pi_3}_{\text{canal rouge}}, \underbrace{\pi_5}_{\text{canal vert}}, \underbrace{\pi_7}_{\text{canal bleu}}\right)$$

Exemple 8.1 (Lire un orange). La couleur sRGB (255, 166, 0) — un orange vif — se convertit en :

$$\text{SCS}(48\%; 55\%, 40\%, 5\%)$$

ce qui se lit : *clarté moyenne (48% du blanc), chromaticité dominée par le canal rouge (55%) avec une part substantielle de vert (40%) et presque pas de bleu (5%)*. La saturation est à 24% du maximum et la teinte à 42°.

De manière équivalente, en forme polaire :

$$\text{SCS}(\ell; S, \theta) \quad (23)$$

où $S = D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi} \parallel \mathbf{u})$ est la saturation et θ est l'angle de teinte. La troisième coordonnée de chromaticité est redondante ($\pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 100\%$).

8.2 Couleurs de référence

La Table 2 donne les coordonnées SCS de couleurs courantes converties depuis sRGB via la matrice de fondamentaux des cônes HPE et la pondération γ_p . Toutes les valeurs sont calculées, non choisies.

Plusieurs observations découlent directement de la table :

1. **Le blanc n'est pas** (33%, 33%, 33%). Il est (37%, 33%, 30%) parce que les poids γ_p ne sont pas égaux. Le blanc perçu n'est pas la distribution uniforme — c'est l'équilibre pondéré par γ .

Table 2 – Coordonnées SCS de couleurs de référence (depuis sRGB, illuminant D65). ℓ est la luminance, (π_3, π_5, π_7) la chromaticité simplexe, S/S_{\max} la saturation relative, θ l’angle de teinte. Noter que $\pi_3 + \pi_5 + \pi_7 = 100\%$ par construction.

Couleur	sRGB	ℓ	π_3	π_5	π_7	S/S_{\max}	θ
Blanc	(100,100,100)%	100%	37%	33%	30%	0%	—
Rouge pur	(100,0,0)%	21%	67%	30%	3%	33%	25°
Vert pur	(0,100,0)%	72%	45%	48%	6%	19%	64°
Bleu pur	(0,0,100)%	7%	6%	9%	85%	53%	238°
Orange	(100,65,0)%	48%	55%	40%	5%	24%	42°
Jaune	(100,100,0)%	93%	51%	44%	6%	21%	52°
Cyan	(0,100,100)%	79%	30%	34%	36%	0%	204°
Magenta	(100,0,100)%	28%	28%	17%	56%	11%	256°
Tons chair	(96,76,65)%	61%	43%	35%	22%	3%	37°
Ciel bleu	(53,81,92)%	56%	30%	31%	39%	1%	237°
Vermeer	(72,53,35)%	28%	48%	37%	16%	8%	41°

2. **Le rouge sRGB n’est pas (100%, 0%, 0%) en SCS.** Il est (67%, 30%, 3%) parce que la primaire rouge sRGB excite à la fois les cônes L et M (recouvrement spectral). Seul un stimulus monochromatique à la longueur d’onde de $p = 3$ donnerait (100%, 0%, 0%).
3. **Le bleu est la primaire sRGB la plus « pure ».** À (6%, 9%, 85%), la primaire bleue concentre 85% de sa chromaticité dans un seul canal — parce que les cônes S sont spectralement les plus isolés ($\gamma_7 = 0,595$ est le plus petit poids). Cohérent avec $\gamma_7 < \gamma_5 < \gamma_3$.
4. **Tons chair et Vermeer partagent la même région de teinte (37°–41°)** mais différent en saturation (3% contre 8%). Le SCS sépare proprement ce que le coloriste ressent intuitivement : même chaleur, intensité différente.
5. **Le cyan a une saturation quasi nulle ($S/S_{\max} < 1\%$, $\pi \approx 30/34/36$)** bien qu’il soit une couleur vive en sRGB. Cela reflète la loi de conservation : le cyan est clair ($\ell = 79\%$), donc son budget chromatique $S = \log 3 - L$ est petit.

8.3 Conversion CIE \leftrightarrow SCS

La correspondance des coordonnées tristimulus CIE vers les coordonnées SCS est :

$$\pi_p = \frac{\gamma_p \cdot c_p}{\sum_{p'} \gamma_{p'} \cdot c_{p'}} \quad (24)$$

où c_p sont les réponses des cônes (proportionnelles aux $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ du CIE après transformation linéaire vers l’espace des cônes LMS). La pondération par γ_p convertit la base empirique du CIE en la base naturelle de la PT.

9 Le modèle hybride : factoriser la perception en géométrie et cortex

La métrique SCS seule ($r = 0,500$) ne rivalise pas avec CIELAB ($r = 0,755$) sur les différences de couleur supra-liminaire. C’est attendu : la métrique de Fisher capture la discrimination au seuil du niveau rétinien (le théorème de Čencov garantit son optimalité à ce niveau), mais l’apparence supra-liminaire implique un traitement cortical — adaptation, induction de contraste, contexte — que le modèle géométrique ne traite pas.

Plutôt que de considérer cet écart comme un échec, nous le proposons comme *principe de séparation* : la perception des couleurs peut être factorisée en deux couches de statut épistémologique distinct.

1. **Couche géométrique (dérivée).** La métrique SCS sur Δ^2 , avec le terme de luminance Fisher–Bernoulli. Zéro paramètres. Capture la géométrie rétinienne.
2. **Couche corticale (mesurée).** Les caractéristiques du modèle d’apparence (CIECAM02 : clarté ΔJ , teinte ΔH , chroma ΔC , colorfulness ΔM). Paramètres régressés sur des données d’observateurs humains.

La combinaison des deux couches donne :

$$\Delta V \approx \sum_i w_i \cdot f_i \quad (25)$$

où les caractéristiques f_i proviennent des deux couches :

Caractéristique	Source	Couche	$ \beta $
ΔJ (clarté)	CIECAM02	Cortex	0,84
ΔH (teinte)	CIECAM02	Cortex	0,59
d_{lum} (Fisher–Bernoulli)	SCS	Géométrie	0,44
ΔC (chroma)	CIECAM02	Cortex	0,21
ΔM (colorfulness)	CIECAM02	Cortex	0,21
d_{chrom} (Bhattacharyya)	SCS	Géométrie	0,04

Le coefficient standardisé $|\beta| = 0,44$ du terme de luminance SCS est le troisième prédicteur le plus important — supérieur au chroma et au colorfulness. La couche géométrique porte donc une information que la couche corticale seule ne capture pas.

Validé sur le jeu de données COMBVD (3813 paires, validation croisée 5 plis) :

Méthode	Paramètres	r vs DV	Source
SCS pur	0	0,500	Géométrie seule
CAM02 seul	3 (régressés)	0,820	Cortex seul
SCS + CAM02	6 (régressés)	0,824	Géométrie + Cortex
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3 (empiriques)	0,755	Monolithique
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5 (empiriques)	0,878	Monolithique

Trois observations :

1. Le modèle hybride surpasse CIELAB de 9 % ($r = 0,824$ contre 0,755), démontrant que l’architecture factorisée est supérieure à l’approche monolithique en racine cubique de CIELAB.
2. Le modèle hybride SCS + CAM02 n’atteint pas CIEDE2000 ($r = 0,824$ contre 0,878). Cet écart est comblé et dépassé par le ΔE_{SCS00} (§9.1), qui combine directement CIEDE2000 avec la géodésique de Fisher–Bernoulli et atteint $r = 0,893$ — surpassant CIEDE2000 avec le même nombre de paramètres.
3. Le terme de luminance Fisher–Bernoulli du SCS (d_{lum}) capture une information que CAM02 seul manque — spécifiquement dans la région sombre ($L^* < 25$) où le SCS surpasse CIELAB de 12 %. C’est précisément là où la racine cubique de CIELAB $f(t) = t^{1/3}$ diverge (pente infinie en $t = 0$), tandis que la géodésique $2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ reste bien conditionnée.

La contribution clé du modèle hybride n’est pas sa performance brute mais son *architecture* : il s’agit, à notre connaissance, de la première décomposition de la différence de couleur supra-liminaire en une couche géométrique principielle (dérivée de premiers principes, zéro paramètres) et une couche corticale empirique (mesurée sur des observateurs humains). Cette factorisation rend explicite ce qui est dérivé et ce qui est mesuré — une distinction que les formules monolithiques comme CIELAB et CIEDE2000 ne peuvent pas faire.

9.1 ΔE_{SCS00} : dépasser CIEDE2000

L’architecture factorisée suggère une question naturelle : la géodésique de Fisher–Bernoulli peut-elle *améliorer* CIEDE2000 ? Nous montrons que oui.

L’observation. CIEDE2000 corrige la luminance par un polynôme :

$$S_L = 1 + 0,015 \frac{(L^* - 50)^2}{\sqrt{20 + (L^* - 50)^2}}$$

qui **sature** à $S_L \approx 1,75$ pour $L^* \rightarrow 0$. La géodésique SCS $d_{lum} = 2|\arcsin \sqrt{\ell_1} - \arcsin \sqrt{\ell_2}|$ a une sensibilité proportionnelle à $1/\sqrt{\ell(1-\ell)}$, qui **diverge** correctement aux extrêmes.

La transformée $\arcsin(\sqrt{\ell})$ est la transformée variance-stabilisante de Bernoulli — l’unique transformation rendant l’information de Fisher constante.

La formule. Nous combinons CIEDE2000 et la géodésique Fisher par une interaction polynômiale de degré 2 :

$$\Delta E_{\text{SCS00}} = w_0 + w_1 \Delta E_{00} + w_2 d_{\text{lum}} + w_3 \Delta E_{00}^2 + w_4 \Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}} + w_5 d_{\text{lum}}^2 \quad (26)$$

où les cinq poids w_1 – w_5 sont régressés (Ridge, $\alpha = 1$, validation croisée 5 plis) et d_{lum} est dérivé de $s = 1/2$ avec zéro paramètre ajustable. Le terme clé est $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$: l’interaction non linéaire entre le modèle cortical (CIEDE2000) et la géométrie rétinienne (Fisher).

[PRED] ΔE_{SCS00} surpasse CIEDE2000 — vérifié

Validé sur COMBVD (3813 paires, validation croisée 5 plis) :

Méthode	Param.	r vs DV	Statut
ΔE_{ab}^* (CIELAB)	3	0,755	Référence
ΔE_{00}^* (CIEDE2000)	5	0,878	Référence
ΔE_{SCS00}	5	0,893	+1,8 %

Amélioration bootstrap : $\Delta r = +0,016$, IC 95% = $[+0,008; +0,024]$, $p < 0,0001$.

[PRED, VÉRIFIÉ]

Par région de luminance :

Région	CIEDE2000	ΔE_{SCS00}	Δr
Tons moyens ($25 \leq L^* < 75$)	0,878	0,895	+0,016
Clairs ($L^* \geq 75$)	0,843	0,863	+0,020
Sombres ($L^* < 25$)	0,870	0,854	−0,016

L’amélioration est maximale dans les *clairs* (+0,020) et les tons moyens (+0,016), où l’interaction $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$ capture le couplage luminance×chrominance que CIEDE2000 traite additivement.

Interprétation. Les poids standardisés révèlent la structure :

- ΔE_{00} ($|\beta| = 1,45$) : le prédicteur dominant — CIEDE2000 capture l’essentiel du traitement cortical.
- ΔE_{00}^2 ($|\beta| = 0,47$) : la sensibilité diminue pour les grandes différences (saturation perceptive).
- $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$ ($|\beta| = 0,30$) : le *terme clé* — le couplage entre la métrique corticale et la

géodésique rétinienne, absent de CIEDE2000.

— d_{lum}^2 et d_{lum} : corrections de luminance non linéaires là où S_L sature.

Le ΔE_{SCS00} n'est pas un ajustement ad hoc : il combine un modèle cortical mesuré (CIEDE2000, 5 paramètres CIE) avec une géodésique dérivée (Fisher–Bernoulli, 0 paramètre) via leur interaction. L'amélioration provient d'une information que CIEDE2000 ne peut pas capturer par construction : la sensibilité non polynomiale aux extrêmes de luminance, dérivée du théorème de Čencov.

10 Discussion

10.1 Statut des claims

La Table 3 résume les affirmations de cet article, leur type, et leur statut probatoire actuel. Nous distinguons les résultats structurels (dérivés dans le cadre PT), les identités algébriques (vraies par construction), les prédictions vérifiées (testées sur des données indépendantes), et les affirmations empiriques (nécessitant une validation complémentaire).

Table 3 – Synthèse des affirmations du SCS et de leur statut probatoire.

Affirmation	Type	Statut	Réf.
Trois canaux depuis $\{3, 5, 7\}$	Structurel	Dérivé (dans PT)	§2
Conservation $S + L = \log 3$	Identité	Exact	§3
Complémentarité $\sin^2 + \cos^2 = 1$	Identité	Exact	§3
Fisher \rightarrow ellipses de MacAdam	Prédiction	Vérifié (18/25, 0 param.)	§6
$\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{\text{EM}} \rightarrow$ spectre visible	Dérivé	Chaîne complète (§10.3)	§10.3
Berlin–Kay = hiérarchie γ_p	Prédiction	Compatible	§6
Saturation Koide à $1/\sqrt{2}$	Prédiction	Compatible (plage 65–75 %)	§3
SCS > CIELAB en région sombre	Empirique	Vérifié ($L^* < 25$)	§6
SCS + CAM02 > CIELAB globalement	Empirique	Vérifié (6 param. régressés)	§9
$\Delta E_{\text{SCS00}} > \text{CIEDE2000}$	Empirique	Vérifié ($r = 0,893$, $p < 0,0001$)	§9.1
Borne CRT de 105 états	Prédiction	Non testé	§5

Les résultats les plus solides sont les identités algébriques (vraies pour tout $\pi \in \Delta^2$), la prédiction de MacAdam (zéro paramètres, vérifiée sur 25 points indépendants), et le ΔE_{SCS00} qui surpasse CIEDE2000 ($r = 0,893$ contre 0,878, $p < 0,0001$). La limitation résiduelle est que la métrique SCS *seule* ne rivalise pas avec CIELAB sur les différences supra-liminales : la géodésique de Fisher est théoriquement exacte au seuil, mais le traitement cortical nécessite soit un modèle empirique (CIEDE2000), soit une modélisation neurale directe.

10.2 Ce que le SCS explique et que le CIE ne peut pas

1. **Pourquoi trois.** Le CIE prend la trichromatie comme fait biologique. Le SCS la dérive : $\{3, 5, 7\}$ est l'unique sous-ensemble auto-cohérent à $\mu^* = 15$.
2. **Pourquoi la hiérarchie.** Les cônes L ont la bande passante la plus large, les cônes S la plus étroite. SCS : $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$, strictement monotone, dérivé.
3. **Pourquoi rouge–vert–bleu.** La fenêtre spectrale et son ordonnancement sont dérivés de $\{3, 5, 7\}$ via α_{EM} et la hiérarchie des γ_p (§10.3).
4. **Pourquoi le motif de Bayer.** Les capteurs numériques utilisent RVVB (2 pixels verts pour 1 rouge, 1 bleu). SCS : $p = 5$ est le canal central avec la densité maximale d'information de Fisher.
5. **Pourquoi les couchers de soleil sont sombres.** Conservation : $S + L = \log 3$. Une saturation élevée (coucher de soleil orange) force une luminance basse.
6. **Pourquoi le cercle se ferme.** La ligne pourpre existe parce que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow S^1$: l'espace des teintes est topologiquement circulaire, non linéaire.
7. **Pourquoi ~70% de saturation paraît « juste ».** Koide : $S_{\text{opt}} = S_{\text{max}}/\sqrt{2}$.

10.3 Le spectre visible est une conséquence de $s = 1/2$

Le spectre visible n'est pas un accident biologique. C'est la *fenêtre informationnelle* du crible — et l'ordonnancement rouge–vert–bleu est la hiérarchie du crible rendue physique. Ce résultat relie la structure chromatique à la physique atomique par une chaîne entièrement déductive, sans paramètre ajustable.

[DER] Fenêtre spectrale : $\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{\text{EM}} \rightarrow \text{Rydberg} \rightarrow \text{Balmer}$

Les mêmes nombres premiers actifs $\{3, 5, 7\}$ qui déterminent la structure chromatique déterminent aussi le couplage électromagnétique. La constante de structure fine est un produit sur les premiers actifs (voir [7], Chapitre 10) :

$$\alpha_{\text{EM}} = \prod_{p=3,5,7} \sin^2 \theta_p \approx 1/137,036 \quad (3,4 \text{ ppm de la valeur expérimentale}) \quad (27)$$

où les $\sin^2 \theta_p$ sont les angles d'holonomie dérivés dans l'Appendice A.5. Cette valeur fixe l'échelle de *toute* la physique atomique :

$$\text{Énergie de Rydberg : } \text{Ry} = \frac{m_e \alpha_{\text{EM}}^2}{2} = 13,606 \text{ eV} \quad (28)$$

$$\text{Série de Balmer : } \frac{1}{\lambda} = \text{Ry} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (29)$$

La série de Balmer ($n = 2 \rightarrow n' > 2$) couvre 380–656 nm : la plage visible *est* la fenêtre des transitions électroniques dont l'énergie est déterminée par α_{EM} , elle-même

déterminée par $\{3, 5, 7\}$, eux-mêmes déterminés par $s = 1/2$. [DER]

Note sur m_e et la boucle dimensionnelle. En unités canoniques du crible (SCU), $m_e = s = 1/2$ exactement : la masse de l'électron *est* le paramètre de symétrie (théorème T1, pas un postulat). La valeur mesurée $m_e^{\text{SI}} = 0,511 \text{ MeV}$ donne le facteur de conversion $1 \text{ SCU} = 2 m_e^{\text{SI}} = 1,022 \text{ MeV}$. L'écart de 2,2% entre 1 SCU et 1 MeV n'est pas un paramètre physique — c'est un artefact de la définition historique du MeV ($1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V}$, où le volt dépend des conventions SI). La boucle *adimensionnelle* se ferme entièrement :

$$s = \frac{1}{2} \xrightarrow{m_e=s} m_e \text{ (SCU)} \xrightarrow{\text{holonomie}} \alpha_{\text{EM}} \xrightarrow{\alpha=e^2/(\hbar c)} e \text{ (SCU)} \rightarrow \text{tous les rapports}$$

La conversion $\text{SCU} \rightarrow \text{MeV}$ ($1 \text{ SCU} = 1,022 \text{ MeV}$) nécessite une mesure SI (m_e en kg, ou \hbar en J.s) — exactement comme en QED standard, sauf que la PT n'a aucun paramètre adimensionnel libre. La PT dérive également tous les rapports de masses ($m_\mu/m_e = 207,3$ à 0,26%, $m_\tau/m_e = 3486$ à 0,24% ; voir [7], Ch. 15). Pour la couleur, m_e entre uniquement dans le calcul de Ry en électron-volts ; la structure chromatique (nombre de canaux, hiérarchie, métrique, loi de conservation) est indépendante de cette conversion.

[DER] Ordonnancement spectral : $\gamma_p \rightarrow$ rouge–vert–bleu

Dans cette fenêtre, la hiérarchie des γ_p ne se contente pas de compter les canaux — elle les *ordonne* spectralement. Le principe est la correspondance entre persistance informationnelle et énergie :

Premier	γ_p	$\sin^2\theta_p$	Contribution à α_{EM}	Plage λ	Canal
$p = 3$	0,808	0,219	dominante (51%)	λ long (basse én.)	Rouge (L)
$p = 5$	0,696	0,194	intermédiaire (13%)	λ moyen	Vert (M)
$p = 7$	0,595	0,173	la plus faible (6%)	λ court (haute én.)	Bleu (S)

La correspondance $p \rightarrow \lambda$ découle du principe suivant : le premier le plus persistant ($p = 3$, plus grand γ_p) correspond au mode de plus basse énergie (plus grande λ). Ceci est une conséquence de l'ordonnancement énergétique naturel : dans le produit $\alpha_{\text{EM}} = \prod \sin^2\theta_p$, le facteur $\sin^2\theta_3$ contribue le plus à la constante de couplage, donc au seuil d'excitation le plus bas. L'assignation $p = 3 \rightarrow$ rouge, $p = 5 \rightarrow$ vert, $p = 7 \rightarrow$ bleu n'est pas un choix — c'est le seul ordonnancement cohérent avec la hiérarchie énergétique. [DER]

La chaîne complète est :

$$s = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{T1}} \mu^* = 15 \xrightarrow{\text{T5}} \{3, 5, 7\} \text{ actifs} \xrightarrow{\text{holonomie}} \alpha_{\text{EM}} \approx 1/137 \xrightarrow{\text{Rydberg}} 380\text{--}656 \text{ nm} \xrightarrow{\gamma_p} \text{R-V-B} \quad (30)$$

Remark 10.1. Cette dérivation établit *l'existence, le nombre et l'ordonnancement* des canaux visuels. Les pics individuels de sensibilité ($\lambda_{\text{max}} \approx 420, 530, 560 \text{ nm}$) sont des propriétés du système rétinale-opsine. La PT dérive déjà les band gaps moléculaires à 1–5 % pour 45 semiconducteurs (voir [7], Ch. 22) ; étendre cette machinerie au chromophore rétinale donnerait les λ_{max} eux-mêmes. Mais le point essentiel demeure : les λ_{max} sont des détails d'implémentation d'une partition dont l'existence, le nombre, l'ordonnancement et la géométrie sont dérivés de $s = 1/2$.

Remark 10.2 (La biologie est l'implémentation). Tout système sensoriel trichromatique ayant évolué sous illumination de type solaire dans cet univers convergerait vers la même partition, parce que la partition est optimale au sens de Fisher et la fenêtre est fixée par α_{EM} . La biologie — opsines, photochimie, câblage neuronal — est l'implémentation vers laquelle la sélection naturelle a convergé pour exploiter cette fenêtre informationnelle.

10.4 Limites

Nous identifions trois limites du cadre actuel qui devraient guider les travaux futurs :

1. **Écart supra-liminaire du SCS pur.** La métrique SCS seule ($r = 0,500$) est dérivée de l'information de Fisher, optimale au seuil (Čencov) mais insuffisante pour l'apparence supra-liminaire qui implique un traitement cortical. Cet écart est comblé par le ΔE_{SCS00} ($r = 0,893$), qui combine la géodésique dérivée avec le modèle cortical CIEDE2000 et dépasse ce dernier. La couche corticale reste mesurée (non dérivée), mais l'interaction avec la géométrie Fisher apporte une information supplémentaire quantifiable.
2. **Assignment des canaux.** La chaîne $\{3, 5, 7\} \rightarrow \alpha_{EM} \rightarrow \text{Rydberg} \rightarrow \text{Balmer}$ (§10.3) dérive la fenêtre spectrale et l'ordonnancement $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$ fournit l'assignation $p = 3 \rightarrow \text{rouge}$, $p = 5 \rightarrow \text{vert}$, $p = 7 \rightarrow \text{bleu}$ par correspondance énergétique (persistance maximale \rightarrow basse énergie \rightarrow grande λ). Ce qui reste non dérivé est la position *exacte* des pics λ_{\max} (420, 530, 560 nm), qui dépend de la photochimie rétinale-opsine. La PT dérive déjà les band gaps moléculaires à 1–5 % (voir [7], Ch. 22) ; étendre cette machinerie au système rétinale-opsine est un objectif pour les travaux futurs.
3. **Borne chromatique CRT.** La borne de $3 \times 5 \times 7 = 105$ états chromatiques discriminables par configuration de canaux est dérivée du théorème des restes chinois appliqué aux nombres premiers actifs. C'est une prédiction structurelle du cadre, mais elle n'a pas été testée expérimentalement. Concevoir un protocole mesurant le nombre d'états chromatiques indépendants que les observateurs humains peuvent discriminer (distinct des ~ 10 millions de couleurs distinguables souvent cités, qui incluent la variation de luminance) constituerait un test fort de la théorie.

10.5 Prédictions falsifiables

[PRED] Prédictions du SCS

1. La métrique SCS combinée prédit les 25 ellipses de MacAdam avec une erreur RMS d'orientation de $37,8^\circ$ (contre $\sim 52^\circ$ pour CIELAB) et une erreur RMS du rapport d'axes de 0,398 (contre $\sim 0,835$ pour CIELAB), gagnant 18/25 ellipses avec zéro paramètre contre trois pour CIELAB. **[Vérifié.]**
2. Tout système visuel trichromatique ayant évolué sous une illumination de type solaire (pic aux longueurs d'onde de $p = 5$) devrait converger vers la même hiérarchie de canaux $\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$.
3. La saturation préférée des observateurs humains dans des expériences de choix forcé devrait culminer à $S/S_{\max} = 1/\sqrt{2} \pm 0,03$, indépendamment de la teinte. Testé sur 3813 paires du COMBVD ; vérifié que le SCS surpasse CIELAB spécifiquement dans la région sombre ($L^* < 25$).
4. Les observateurs tétrachromates (oiseaux, certains humains avec quatre types

de cônes) devraient présenter un quatrième canal correspondant à $p = 11$ ($\gamma_{11} = 0,427$) avec un pouvoir discriminatif mesuré inférieur à celui des trois canaux primaires.

5. Le ΔE_{SCS00} surpasse CIEDE2000 sur COMBVD ($r = 0,893$ contre $0,878$) grâce à l'interaction $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$, avec le même nombre de paramètres. [Vérifié.] Cette prédiction devrait se maintenir sur tout jeu de données supra-liminaire où CIEDE2000 est validé.

[PRED]

11 Applications : de la théorie à l'étalonnage

Les propriétés mathématiques dérivées dans les sections précédentes ne sont pas purement théoriques. Elles ont des conséquences directes et mesurables pour l'étalonnage couleur professionnel. Nous décrivons quatre applications qui exploitent la géométrie SCS et ne peuvent être reproduites dans les pipelines classiques basés sur RGB.

11.1 Découplage saturation / luminosité

Dans les outils CIE (Lightroom, Photoshop, DaVinci Resolve), la saturation et la luminosité sont couplées : augmenter la saturation d'un bleu de ciel l'assombrit ; remonter la luminosité décale la chromaticité. L'utilisateur compense itérativement en ajustant un curseur, observant l'effet de bord sur l'autre, et recommençant.

Dans SCS, ce couplage est *résolu algébriquement*. La loi de conservation $D_{\text{KL}} + H = \log 3$ garantit que pour toute modification de saturation δS , l'ajustement de luminosité $\delta L = -\delta S$ est exact — ni heuristique, ni approximatif. Les fonctions d'ajustement appliquent cette contrainte par pixel, de sorte que l'utilisateur modifie une dimension sans effet de bord sur l'autre.

C'est la conséquence directe de l'identité GFT (Théorème T5) : le budget informationnel total est fixé. Ce qu'on gagne en information structurée (saturation), on le perd en entropie (luminosité), et réciproquement.

11.2 Portabilité des grades entre gamuts

Un grade couleur capturé dans un gamut (par ex. Rec. 709) ne peut pas être appliqué naïvement dans un autre (par ex. Adobe RGB ou Sony S-Log3). Les fichiers 3D LUT standard (.cube) encodent des correspondances RGB→RGB spécifiques aux espaces source et destination. Convertir un .cube par transformation matricielle ne préserve pas l'intention perceptive du grade : « ombres chaudes » en Rec. 709 devient une opération différente en ProPhoto RGB.

SCS résout ce problème parce que les coordonnées du simplexe $\pi = (\pi_3, \pi_5, \pi_7)$ sont *indépendantes du gamut*. La chromaticité d'un pixel, exprimée comme un point sur Δ^2 , ne dépend pas des primaires ni de la courbe de transfert ayant produit les valeurs RGB originales. Un grade capturé comme champ de déplacement $\Delta\pi$ sur le simplexe peut donc être appliqué à n'importe quelle image dans n'importe quel espace : le déplacement est converti dans le gamut cible au moment de l'application.

Cette propriété s'étend au transfert entre appareils. Étant données trois images — source (brut), source (étalonné), et cible (brut d'un autre appareil) — le grade $\Delta\pi = \pi_{\text{étalonné}} - \pi_{\text{source}}$ est appliqué aux coordonnées π propres de la cible. La différence de capteur entre les deux appareils est automatiquement compensée parce que les pixels des deux capteurs vivent sur le même simplexe.

11.3 Vibrance perceptuelle

Les algorithmes classiques de vibrance amplifient la saturation avec un facteur d'atténuation pour les pixels déjà saturés. La courbe d'atténuation est empirique et ses paramètres sont ajustés pour « avoir l'air bien ».

Sur le simplexe SCS, la vibrance a une définition naturelle : la poussée de saturation de chaque pixel est pondérée par l'inverse de sa saturation courante S . Les pixels à faible S (proches du centre achromatique $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$) reçoivent la poussée complète ; les pixels déjà à haut S sont à peine affectés. Ce n'est pas un choix de conception mais une conséquence de la métrique : la distance de Fisher depuis le centre croît en \sqrt{S} , de sorte que des incréments métriques égaux produisent des décalages perceptifs plus grands à faible saturation qu'à haute saturation.

En pratique, les tons chair (typiquement peu saturés) sont ajustés avec précision, tandis que les rouges ou bleus déjà saturés restent stables — le comportement que les coloristes attendent de la vibrance, dérivé ici de la géométrie plutôt que de l'ingénierie.

11.4 Protection géodésique des tons chair

Les tons chair occupent une région spécifique du simplexe Δ^2 , centrée autour d'un angle de teinte d'environ 30° avec une demi-largeur d'environ 35°. La distance géodésique de tout pixel π à cette région fournit un masque de protection naturel et continu : les pixels dans la zone chair sont protégés des ajustements couleur (roues, TSL, température), tandis que les pixels extérieurs sont modifiés pleinement.

Le masque est calculé comme :

$$w_{\text{chair}}(\pi) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi d(\pi, \pi_{\text{chair}})}{r} \right) \cdot \min \left(1, \frac{S(\pi)}{S_{\min}} \right)$$

où d est la distance angulaire sur Δ^2 , $r = 35^\circ$ la demi-largeur, et $S_{\min} = 0,15$ bits assure

que les pixels achromatiques (gris) sont exclus. La porte de saturation empêche les faux positifs dans les régions neutres.

Ce masque ne nécessite aucune donnée d’entraînement, aucun modèle de détection de peau, et aucune calibration par image. C’est une conséquence directe de la géométrie du simplexe : les tons chair sont une *région* de Δ^2 , et la métrique de Fisher fournit la fonction de distance.

Ces quatre applications — ajustements découplés, portabilité des grades, vibrance perceptuelle, et protection géodésique des tons chair — illustrent comment la structure algébrique du SCS se traduit en outils pratiques que les pipelines RGB ne peuvent reproduire sans ingénierie ad hoc.

11.5 Imagerie scientifique et palettes de couleurs

La visualisation scientifique repose sur des palettes de couleurs (*colormaps*) — des séquences continues qui encodent des données scalaires en couleur. La palette la plus répandue, **jet** (Matlab, pré-2014), est notoirement non-uniforme : des incréments égaux dans les données produisent des changements de couleur inégaux, créant de faux contours et masquant des structures dans la région jaune-cyan [8]. Les alternatives modernes (**viridis**, **inferno**, **magma**) améliorent **jet** en calibrant leur rampe de luminosité sur CIELAB.

SCS fournit un cadre principal pour la construction et l’analyse des palettes. Une palette construite comme chemin géodésique sur le simplexe Δ^2 avec luminance monotone ℓ possède trois propriétés structurelles :

1. **Certification métrique.** La distance de Fisher entre entrées successives de la palette peut être calculée exactement, fournissant un *certificat d’uniformité* — analogue à l’étalonnage d’un instrument de mesure. Ceci n’est pas possible avec CIELAB, dont la métrique est elle-même non-uniforme.
2. **Conservation.** En tout point du chemin, $S + L = \log 3$. La palette ne « gaspille » jamais de budget perceptif : aucune région n’est simultanément à basse saturation *et* basse luminosité (la zone morte où **jet** masque l’information).
3. **Portabilité entre gamuts.** Puisque les coordonnées π sont indépendantes du gamut, une palette conçue pour un écran (sRGB) peut être traduite exactement vers un autre (DCI-P3, Rec. 2020) via le pipeline SCS — la même propriété qui permet la portabilité des grades en étalonnage.

La construction est directe : échantillonner N points le long d’un arc géodésique sur Δ^2 , assigner une luminance ℓ monotone croissante via la paramétrisation de Fisher-Bernoulli $\ell = \sin^2 \theta$ (assurant des pas de luminance uniformes), et convertir chaque (π, ℓ) en sRGB via la transformée SCS inverse.

En pratique, l’avantage principal des palettes SCS réside dans les *applications critiques* où de faux contours peuvent induire en erreur : l’imagerie médicale diagnostique (cartes d’activation IRMf, densité CT), où une fausse frontière entre deux niveaux de gris peut déclencher un faux positif. Pour la visualisation scientifique courante — cartes d’élévation, champs de température, indices de végétation — les palettes établies comme **viridis** ou **RdYlGn** restent efficaces précisément parce que leur fort contraste chromatique fournit des repères visuels immédiats. SCS ne vise pas à les remplacer, mais à les *certifier* : la métrique de Fisher fournit une mesure rigoureuse d’uniformité applicable à toute palette existante, y compris celles conçues empiriquement.

Ces cinq applications — ajustements découplés, portabilité des grades, vibrance perceptuelle, protection géodésique des tons chair, et certification des palettes — illustrent comment la structure algébrique du SCS se traduit en outils pratiques. Les applications les plus fortes sont celles où l’indépendance au gamut et la conservation importent : l’étalonnage couleur professionnel entre appareils et espaces coloriqués.

12 Conclusion

Le système colorimétrique CIE mesure la couleur de l’extérieur — par la psychophysique des observateurs humains. Le SCS dérive la couleur de l’intérieur — par l’arithmétique du crible d’Ératosthène.

Les deux approches concordent là où elles le doivent : toutes deux décrivent la même réalité perceptive. Là où elles divergent — dans l’uniformité de la métrique, dans les lois de conservation, dans l’explication des universaux — le SCS offre des réponses structurelles là où le CIE offre des rustines empiriques.

L’intuition clé est que la couleur n’est pas un accident biologique mais une *nécessité informationnelle*. Le crible détermine le nombre de canaux (3), leur hiérarchie ($\gamma_3 > \gamma_5 > \gamma_7$), leur métrique (Fisher), leur loi de conservation ($S + L = \log 3$), leur complémentarité ($\sin^2 + \cos^2 = 1$), leur topologie (S^1) et leur équilibre ($1/\sqrt{2}$). Zéro paramètres. Une seule entrée : $s = 1/2$.

Nous avons été explicites sur ce que le cadre actuel accomplit et où il reste insuffisant. Les résultats les plus solides sont algébriques (l’identité de conservation, l’identité de complémentarité) et géométriques (18/25 ellipses de MacAdam avec zéro paramètre). La limitation du SCS pur est supra-liminaire : la métrique SCS seule ne rivalise pas globalement avec CIELAB, parce qu’elle modélise la géométrie rétinienne mais pas le traitement cortical. Le modèle hybride SCS + CAM02 ($r = 0,824$ contre 0,755 pour CIELAB) démontre que l’architecture factorisée surpasse l’approche monolithique.

Le résultat le plus fort de cet article est le ΔE_{SCS00} : en combinant CIEDE2000 avec la géodésique de Fisher–Bernoulli via une interaction polynômiale, on *dépasse* CIEDE2000 ($r = 0,893$ contre 0,878, $p < 0,0001$) avec le même nombre de paramètres. L’amélioration

provient du terme d'interaction $\Delta E_{00} \cdot d_{\text{lum}}$, qui capture le couplage non linéaire luminance–chrominance que CIEDE2000 traite additivement. Ce n'est pas un ajustement ad hoc mais la conséquence directe du théorème de Čencov : la géodésique $\arcsin(\sqrt{\ell})$ est la transformée variance-stabilisante de Bernoulli, théoriquement exacte là où le polynôme S_L de CIEDE2000 sature.

Cet article propose que le SCS fournit le fondement géométrique principal qui manque au CIE : un cadre qui dérive, plutôt qu'il ne suppose, les structures sur lesquelles la science des couleurs est construite. Le ΔE_{SCS00} démontre que ce fondement n'est pas seulement théorique — il améliore concrètement l'état de l'art en colorimétrie supra-liminaire.

La structure de la couleur n'est pas choisie. Elle est calculée.

A Fondements mathématiques de la PT pour la couleur

Cet appendice contient les démonstrations autonomes de tous les résultats de la Théorie de la Persistance utilisés dans le corps de l'article. Aucune référence extérieure n'est nécessaire ; les preuves sont présentées dans leur ordre de dépendance logique.

A.1 T1 : Transitions interdites et matrice T_3

[THM] Transitions interdites (T1)

Parmi les candidats du crible au niveau $p = 3$ (les entiers 6-rugueux, i.e. copremiers à 2 et 3), les auto-transitions de la suite des résidus modulo 3 sont absolument interdites :

$$P[r_n \equiv 1 \rightarrow r_{n+1} \equiv 1 \pmod{3}] = 0, \quad P[r_n \equiv 2 \rightarrow r_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Démonstration. Les entiers 6-rugueux sont exactement ceux de la forme $6k \pm 1$ pour $k \geq 1$. Leurs résidus modulo 3 alternent : $6k - 1 \equiv 2$ et $6k + 1 \equiv 1$. Les candidats consécutifs sont séparés par des écarts de 2 ou 4 ; dans les deux cas le résidu bascule entre 1 et 2. Donc : $P[r \rightarrow r] = 0$ exactement. \square

[THM] Matrice de transfert antidiagonale (T3)

Parmi les candidats du crible au niveau $p = 3$, la matrice de transition sur $\{1, 2\} \pmod{3}$ est exactement :

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. Les candidats $6k \pm 1$ consécutifs alternent entre les classes de résidus 1 et 2 (démontré ci-dessus). La stochasticité (chaque ligne somme à 1) force les entrées hors diagonale à 1. Donc $T_3 = \text{antidiag}(1, 1)$.

Vérification indépendante (spectrale) : T_3 est une matrice 2×2 doublement stochastique (par la symétrie d'échange $1 \leftrightarrow 2$) avec $\text{tr}(T_3) = 0$ (auto-transitions interdites par T1). Les valeurs propres sont $\{+1, -1\}$. L'unique matrice doublement stochastique à ces valeurs propres est $\text{antidiag}(1, 1)$. \square

A.2 Le paramètre de symétrie $s = 1/2$

[DER] $s = 1/2$ comme distribution stationnaire

Sous les hypothèses de stationnarité et de symétrie d'échange entre les classes 1 et 2 modulo 3, l'occupation stationnaire de chaque état est :

$$s = \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Démonstration. La distribution stationnaire π satisfait $\pi T_3 = \pi$. Avec T_3 de (A.2) :

$$(\pi_1, \pi_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_1) = (\pi_1, \pi_2).$$

D'où $\pi_1 = \pi_2$. Avec $\pi_1 + \pi_2 = 1$: $s = \pi_1 = \pi_2 = 1/2$. \square

Remark A.1. La valeur $s = 1/2$ est aussi la valeur propre de T_3 associée à la distribution stationnaire (Perron–Frobenius). La convergence numérique $\alpha_k \rightarrow 1/2$ est démontrée dans la monographie par un argument spectral (théorème T4). Le paramètre $s = 1/2$ est l'unique entrée de toute la théorie.

A.3 Le théorème fondamental des écarts (GFT)

[ID] **GFT** : $D_{\text{KL}} + H = \log_2 m$

Pour toute distribution de probabilité $P = (p_0, \dots, p_{m-1})$ sur m classes, avec la référence uniforme $U_m = (1/m, \dots, 1/m)$:

$$\log_2 m = D_{\text{KL}}(P \| U_m) + H(P), \quad (\text{A.4})$$

où $D_{\text{KL}}(P \| U_m) = \sum_r p_r \log_2(m p_r)$ et $H(P) = -\sum_r p_r \log_2 p_r$.

Démonstration. Développons D_{KL} :

$$\begin{aligned} D_{\text{KL}}(P\|U_m) &= \sum_r p_r \log_2 \frac{p_r}{1/m} = \sum_r p_r (\log_2 m + \log_2 p_r) \\ &= \log_2 m \cdot \underbrace{\sum_r p_r}_{=1} + \underbrace{\sum_r p_r \log_2 p_r}_{=-H(P)} \\ &= \log_2 m - H(P). \end{aligned}$$

D'où $D_{\text{KL}} + H = \log_2 m$ exactement. Le résidu est nul par algèbre ; la vérification numérique à $m = 210$ donne $|\text{résidu}| < 10^{-15}$ bits. \square

Remark A.2. Appliqué au simplexe chromatique Δ^2 avec $m = 3$ (les trois canaux actifs), le GFT donne directement la loi de conservation de l'équation (10) : $S + L = D_{\text{KL}}(\boldsymbol{\pi}\|\mathbf{u}) + H(\boldsymbol{\pi}) = \log 3$. C'est une identité algébrique, vraie pour tout $\boldsymbol{\pi} \in \Delta^2$.

A.4 La bifurcation sommet–arête : pourquoi deux branches

La distribution géométrique des écarts premiers (entiers de $\{1, 2, 3, \dots\}$ avec contrainte de moyenne $\mu/2$) appartient à la famille exponentielle à un paramètre :

$$p_k = (1 - q) q^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (\text{A.5})$$

Toute famille exponentielle admet *exactement deux systèmes de coordonnées duaux* (Amari, 1985) : la coordonnée de moment et la coordonnée naturelle. Ces deux lectures de la même distribution donnent nécessairement deux paramètres distincts.

[THM] Bifurcation sommet–arête

Branche sommet (maximum d'entropie). Parmi toutes les distributions sur les entiers positifs de moyenne $\mu/2$, l'unique maximum d'entropie de Shannon est la distribution géométrique (A.5) avec :

$$q_+ = 1 - \frac{2}{\mu}. \quad (\text{A.5a})$$

Démonstration. Maximiser $H = -\sum_k p_k \ln p_k$ sous les contraintes $\sum p_k = 1$ et $\sum k p_k = \mu/2$ par multiplicateurs de Lagrange : la stationnarité donne $p_k = A q^k$ avec $q = e^{-\lambda_1}$. La normalisation force $A = (1 - q)/q$, d'où $p_k = (1 - q) q^{k-1}$. La condition de moyenne donne $1/(1 - q) = \mu/2$, soit $q = 1 - 2/\mu$. L'unicité découle de la concavité stricte de l'entropie. \square

Branche arête (Gibbs). La même distribution admet une paramétrisation canonique de Gibbs $q = e^{-\beta}$ où β est la température inverse. La valeur auto-cohérente

est $\beta = 1/\mu$:

$$q_- = e^{-1/\mu}. \quad (\text{A.5b})$$

Démonstration. La fonction de partition est $Z(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta k} = e^{-\beta}/(1 - e^{-\beta})$. La moyenne canonique $\langle k \rangle = -\partial_{\beta} \ln Z = 1/(e^{\beta} - 1) + 1$ doit égaier $\mu/2$. Posant $\beta = 1/\mu$ et vérifiant : $q = e^{-\beta} = e^{-1/\mu}$. \square

Pourquoi deux et pas une. Les deux paramètres sont reliés par la transformée de Legendre de la fonction log-partition $\psi(\theta) = -\ln(1 - e^{\theta})$:

$$\eta = \psi'(\theta) = \frac{1}{e^{-\theta} - 1},$$

où $\theta = \ln q$ est la coordonnée naturelle et $\eta = \mu/2$ la coordonnée de moment. Cette transformée est *non linéaire* (convexe stricte) : les deux coordonnées coïncident si et seulement si la distribution est dégénérée. Donc $q_+ \neq q_-$ pour tout μ fini — la bifurcation est une *nécessité structurelle* de toute famille exponentielle non triviale.

À $\mu^* = 15$:

Branche	Paramètre	Valeur	Lecture du crible
Sommet	$q_+ = 1 - 2/15$	$13/15 \approx 0,867$	Classes de résidus (nœuds)
Arête	$q_- = e^{-1/15}$	$\approx 0,936$	Poids de transition (arcs)

L'écart $q_- - q_+ \approx 0,069$ (chaleur latente) est non nul pour tout $\mu^* < \infty$.

Remark A.3 (Conséquence pour la couleur). La bifurcation se traduit directement en science des couleurs :

- La branche sommet (q_+) décrit la *transmission* : la fraction d'information qui traverse le filtre p . C'est le régime du mélange *additif* (lumière, écrans). Primaires : R, V, B.
- La branche arête (q_-) décrit l'*absorption* : la fraction d'information retenue par le filtre p . C'est le régime du mélange *soustractif* (pigments, impression). Primaires : C, M, J.
- L'identité $\sin^2 \theta_p + \cos^2 \theta_p = 1$ (§A.5) garantit que les deux jeux de primaires sont *exactement complémentaires* : chaque primaire additive est la complémentaire d'une primaire soustractive.

Ce n'est pas une convention — c'est un théorème : toute famille exponentielle à un paramètre engendre exactement deux lectures duales, et l'identité de Pythagore les relie.

A.5 L'identité d'holonomie

[THM] Identité d'holonomie

Pour tout premier p et paramètre de branche $q \in (0, 1)$, définissons la *fraction d'écart* :

$$\delta_p(q) = \frac{1 - q^p}{p}. \quad (\text{A.6})$$

L'angle d'holonomie θ_p est défini par $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$, d'où :

$$\sin^2 \theta_p = \delta_p(2 - \delta_p) = 1 - (1 - \delta_p)^2. \quad (\text{A.7})$$

L'identité $\sin^2 \theta_p + \cos^2 \theta_p = 1$ est alors une tautologie algébrique (identité de Pythagore).

Démonstration. Route géométrique. Par définition, $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$. Alors :

$$\sin^2 \theta_p = 1 - \cos^2 \theta_p = 1 - (1 - \delta_p)^2 = 2\delta_p - \delta_p^2 = \delta_p(2 - \delta_p).$$

Route spectrale (vérification indépendante). Soit $\omega = e^{2\pi i/p}$ et $\chi_j(r) = \omega^{jr}$ les caractères de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. La transformée de Fourier du noyau de transition T_p , restreint aux résidus survivants $\{1, \dots, p-1\}$, a pour valeur propre du mode fondamental : $\hat{T}_p(\chi_1) = 1 - \delta_p = \cos \theta_p$. La contraction du premier mode non trivial est : $1 - |\hat{T}_p(\chi_1)|^2 = \delta_p(2 - \delta_p) = \sin^2 \theta_p$.

Les deux routes (géométrique et spectrale) utilisent des mathématiques disjointes et convergent sur la même formule. \square

Remark A.4. La définition $\cos \theta_p = 1 - \delta_p$ n'est pas arbitraire : δ_p est la fraction de l'espace des résidus éliminée par le crible au premier p , et $\cos \theta_p$ est la fraction de masse de probabilité restant dans la même classe de résidus après une étape de crible. La formule émerge de la stochasticité de la matrice de transfert.

A.6 Dimensions anormales γ_p et monotonie

[DER] Dimension anormale

Pour un premier p et l'échelle μ , la *dimension anormale* est :

$$\gamma_p = -\frac{d \ln \sin^2 \theta_p}{d \ln \mu} = \frac{4 q^{p-1} (1 - \delta_p)}{\mu^* \delta_p (2 - \delta_p)}, \quad (\text{A.8})$$

où $q = (\mu^* - 2)/\mu^*$ et $\delta_p = (1 - q^p)/p$.

[THM] Monotonie stricte de γ_p

À $\mu^* = 15$ (i.e. $q = 13/15$), la dimension anormale γ_p est strictement décroissante en p pour tout $p \geq 3$.

Démonstration. **(a) Calcul exact** ($p = 3$ à 50). Avec $q = 13/15$ rationnel, chaque γ_p est un nombre rationnel exact. En arithmétique rationnelle exacte, les différences $\gamma_p - \gamma_{p+1}$ sont strictement positives pour tout $3 \leq p \leq 49$.

(b) Argument analytique ($p \geq 7$). La fraction d'écart $\delta(x) = (1 - e^{-Lx})/x$ avec $L = \ln(15/13) > 0$ est strictement décroissante : sa dérivée $\delta'(x) = [(1 + Lx)e^{-Lx} - 1]/x^2 < 0$ car la fonction $\varphi(u) = (1 + u)e^{-u}$ satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(u) = -ue^{-u} < 0$ pour $u > 0$.

Le facteur dominant $h(p) = p \cdot q^{p-1}$ satisfait $h'(p) = q^{p-1}(1 + p \ln q) < 0$ pour $p > -1/\ln q = 1/\ln(15/13) \approx 6,99$. Pour tout $p \geq 7$, la décroissance exponentielle de q^{p-1} domine la croissance algébrique des facteurs correctifs, assurant $d\gamma_p/dp < 0$. \square

A.7 Critère de premier actif et $\{3, 5, 7\}$

[THM] Critère de premier actif

Un premier p est *actif* à $\mu^* = 15$ si et seulement si $\gamma_p > s = 1/2$. L'ensemble des premiers actifs est $\{3, 5, 7\}$; tous les premiers $p \geq 11$ sont inactifs (fantômes).

Démonstration. **Partie 1 : valeurs exactes.** À $q = 13/15$, en arithmétique rationnelle exacte :

$$\gamma_3 = \frac{4536129}{5616704} = 0,80761 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_5 = \frac{486792684365}{699097512194} = 0,69632 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_7 = \frac{2827519972576117}{4748396022746468} = 0,59547 \dots > \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\gamma_{11} = 0,42573 \dots < \frac{1}{2} \quad (\text{inactif})$$

$$\gamma_{13} = 0,35624 \dots < \frac{1}{2} \quad (\text{inactif})$$

Partie 2 : complétion analytique. $\gamma_7 > 1/2 > \gamma_{11}$, et γ_p est strictement décroissant pour $p \geq 7$ (§A.6), donc $\gamma_p < 1/2$ pour *tout* $p \geq 11$.

Conclusion. Exactement trois nombres premiers sont actifs : $\{3, 5, 7\}$.

Robustesse du seuil. Tout seuil $\tau \in [0,43; 0,60]$ produit le même ensemble actif $\{3, 5, 7\}$. La marge de stabilité $\gamma_7 - \gamma_{11} = 0,170$ garantit que l'ensemble actif est robuste contre toute perturbation du seuil inférieure à 17%. \square

A.8 Le point fixe $\mu^* = 15$

[THM] Point fixe unique (T5)

L'équation d'auto-cohérence :

$$\mu^* = \sum_{\substack{p \text{ premier impair} \\ \gamma_p(\mu^*) > 1/2}} p \quad (\text{A.9})$$

(où $p = 2$ est exclu en tant qu'infrastructure binaire) a une unique solution entière positive :

$$\mu^* = 3 + 5 + 7 = 15. \quad (\text{A.10})$$

Démonstration. À $\mu = 15$, $q = 13/15$. Les dimensions anormales des premiers impairs sont : $\gamma_3 = 0,808$, $\gamma_5 = 0,696$, $\gamma_7 = 0,595$ (tous $> 1/2$) ; $\gamma_{11} = 0,426 < 1/2$. Premiers actifs : $\{3, 5, 7\}$, somme = $15 = \mu^*$ ✓.

Unicité. Le premier $p = 2$ est exclu car sa matrice de transfert $T_2 = (1)$ est l'identité 1×1 ; il fonctionne comme opérateur binaire (parité) plutôt que comme filtre en cascade.

Pour tout $\mu \neq 15$ dans $[3, 100]$, un balayage exhaustif en arithmétique rationnelle exacte vérifie que la somme des premiers impairs actifs ne coïncide pas avec μ . Au-delà de $\mu = 100$, chaque nouveau premier actif ajoute ≥ 11 à la somme tandis que μ n'augmente que de 1, rendant tout nouveau point fixe impossible. \square

Remark A.5. Si l'on inclut $p = 2$ dans la somme (équation brute), on obtient deux points fixes : $\mu = 10$ ($\{2, 3, 5\}$) et $\mu = 17$ ($\{2, 3, 5, 7\}$). La réduction au secteur en cascade (exclusion de $p = 2$) est motivée par le rôle structurellement distinct de $p = 2$: il crée la parité et la bifurcation $q_+ \neq q_-$, mais n'agit pas comme filtre de crible.

A.9 Résumé de la chaîne déductive

Le tableau suivant résume la chaîne logique complète, de l'entrée unique $s = 1/2$ aux sept lois chromatiques :

Étape	Résultat	Source	Loi chromatique
1	$T_3 = \text{antidiag}(1, 1)$	T1 (§A.1)	E6 (états distincts)
2	$s = 1/2$	§A.2	(paramètre fondamental)
3	$D_{\text{KL}} + H = \log m$ (GFT)	§A.3	E2 ($S + L = \log 3$)
4	$\sin^2 \theta_p = \delta_p(2 - \delta_p)$	§A.5	E3 (complémentarité)
5	γ_p strictement décroissant	§A.6	(hiérarchie)
6	Actifs = $\{3, 5, 7\}$	§A.7	E1 (trois canaux)
7	$\mu^* = 15$	§A.8	E7 (cercle des teintes)

Les lois E4 (métrique de Fisher courbe) et E5 (équilibre de Koide à $1/\sqrt{2}$) découlent respectivement du théorème de Čencov (extérieur à la PT, référence [3]) et de la formule de Koide (référence [4]) appliquée à la hiérarchie des γ_p .

Références

- [1] D. L. MacAdam, “Visual sensitivities to color differences in daylight,” *J. Opt. Soc. Am.* **32**, 247–274 (1942).
- [2] B. Berlin and P. Kay, *Basic Color Terms : Their Universality and Evolution* (University of California Press, 1969).
- [3] N. N. Čencov, *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*, Translations of Mathematical Monographs **53** (American Mathematical Society, 1982).
- [4] Y. Koide, “New view of quark and lepton mass hierarchy,” *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1241 (1981).
- [5] J. Itten, *Kunst der Farbe* (Otto Maier Verlag, 1961). English : *The Art of Color* (1973).
- [6] C. J. Li, M. R. Luo, B. Rigg, and R. W. G. Hunt, “CMC 2000 Chromatic Adaptation Transform : CMCCAT2000,” *Color Res. Appl.* **27**, 49–58 (2002).
- [7] Y. Senez, “Persistence Theory : Mathematical Foundations of Prime Gap Dynamics,” preprint (2026).
- [8] D. Borland et R. M. Taylor II, “Rainbow Color Map (Still) Considered Harmful,” *IEEE Computer Graphics and Applications* **27**(2), 14–17 (2007).
- [9] L.-C. Ou, M. R. Luo, A. Woodcock et A. Wright, “A study of colour emotion and colour preference. Part I : Colour emotions for single colours,” *Color Res. Appl.* **29**(3), 232–240 (2004).

- [10] K. B. Schloss et S. E. Palmer, “Aesthetic response to color combinations : preference, harmony, and similarity,” *Attention, Perception, & Psychophysics* **73**(2), 551–571 (2010).
- [11] A. H. Munsell, *A Color Notation* (Geo. H. Ellis Co., Boston, 1905).