21.

Elementarer Beweis eines in der Differenzen-Rechnung vorkommenden Ausdrucks.

(Von Herrn *E. Köhlau*, Lieut. im Königl. Preufs. 26sten Inf.-Reg.)

Wenn $u = x^m$ ist, und es wird der Ausdruck $\Delta^n u$ gebildet, Δx constant gleich n angenommen, so ist das allgemeine Glied desselben:

$$\frac{m(m-1)\dots(m-r+1)}{1.2.3\dots r} x^{m-r} h^r \left(n^r - \frac{n}{1}(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \text{etc.}\right).$$

Bei Bildung der successiven Differenzen Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ etc. zeigt sich aber, dafs $\Delta^n u$ keine Potenzen von n enthalten kann, deren Exponent kleiner ist als n; es mufs also, wenn $n > r$:

$$1. \quad n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}.(n-2)^r - \text{etc.} = 0$$

sein. Eben so findet man, dafs $\Delta^m u$ constant und dem Product der natürlichen Zahlen von 1 bis m in n^m gleich ist, es mufs also:

$$2. \quad m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \text{etc.} = 1.2.3\dots m$$

sein. Beide Ausdrücke lassen sich nun auch auf folgende Art, ohne Differenzen-Rechnung zu gebrauchen, beweisen.

So lange $n > 1$, ist immer:

$$(1-1)^{n-1} = 1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \text{etc.} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit n, so ist auch:

$$n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3) + \text{etc.} = 0.$$

Wird hier n mit $n-1$ vertauscht, so wird:

$$(n-1) - (n-1)(n-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3) - \text{etc.} = 0,$$

wenn $n-1 > 1$ oder $n > 2$ ist. Addirt man nun diese Gleichung zur vorigen, ordnet die Summe und multiplicirt sie mit n, so wird, wenn $n > 2$:

$$n^2 - n(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \text{etc.} = 0.$$

Eben so findet man, dafs

$$n^3 - n(n-1)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^3 - \text{etc} = 0$$

ist, wenn $n > 3$. Gesetzt nun, dieser Ausdruck hätte sich als richtig bewährt, wenn der Exponent r, und $n > r$ ist, und es wäre:

$$n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r - \text{etc.} = 0,$$

so wäre auch, wenn $n-1>r$ oder $n>r+1$:

$$(n-1)^r - (n-1)(n-2)^r + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^r - \text{etc.} = 0.$$

Werden nun diese beiden Gleichungen addirt und die Summe mit n multiplicirt, so ist:

$$n^{r+1} - n(n-1)^{r+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{r+1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^{r+1} + \text{etc.} = 0,$$

und die Richtigkeit des Ausdrucks (1.) hierdurch allgemein erwiesen.

Der Beweis für den Ausdruck (2.) folgt aus (1.) unmittelbar; denn setzt man: $n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n - \text{etc.} = f(n)$,

und addirt:

$$(n+1)^n - (n+1)n^n + \frac{(n+1)n}{1.2}(n-1)^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(n-2)^n + \text{etc.} = 0,$$

so wird der Werth von $f(n)$ nicht geändert, und es bleibt:

$$(n+1)^n - n^{n+1} + \frac{n}{2}(n-1)^{n+1} - \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} + \text{etc.} = f(n).$$

Werden nun beide Theile der Gleichung mit $(n+1)$ multiplicirt, so wird der erste so von $(n+1)$ abhängig, wie es $f(n)$ von n war, mithin $f(n+1)$ sein. Es wird daher: $f(n+1) = (n+1)f(n)$.

Setzt man nun $n=1$, so wird $f(n)$ auch der Einheit gleich, daher $f(2) = 2f(1) = 1.2$, $f(3) = 3f(2) = 1.2.3$ und $f(n) = 1.2.3\ldots.n$.

Läfst man nun den Exponent zunehmen, und geht zu den Reihen über, deren Anfangsglieder n^{n+1}, n^{n+2}, ... n^{n+r} etc. sind, so werden zwar die Ausdrücke für dieselben zusammengesetzter, doch ist das Gesetz, nach welchem sie nach und nach aus einander abgeleitet werden können, ganz einfach. Denn setzt man:

$$n^{n+r} - n(n-1)^{n+r} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+r} - \text{etc.} = f(n,r), \quad \text{und}$$

$$n^{n+r-1} - n(n-1)^{n+r-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+r-1} - \text{etc.} = f(n,r-1),$$

multiplicirt die zweite Gleichung mit n, und zieht sie von der ersten ab, so erhält man:

$$n(n-1)^{n+r-1} - \frac{n(n-1)}{1}(n-2)^{n+r-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{n+r-1} - \text{etc.}$$
$$= f(n,r) - nf(n,r-1).$$

Der erste Theil der Gleichung ist aber, wenn er analog mit den vorigen Ausdrücken bezeichnet wird: $nf(n-1,r)$; es ist demnach:

$$f(n,r) = nf(n-1,r) + nf(n,r-1).$$