

## SULLA SUPERFICIE A LINEE DI CURVATURA ISOTERME.

Nota del Dr. **Pasquale Calapso**, in Palermo.

---

Adunanza del 10 maggio 1903.

---

La ricerca delle superficie a linee di curvatura isoterme è uno dei problemi più difficili della geometria differenziale, e dipende dall'integrazione di una equazione alle derivate parziali di 4° ordine \*).

Si conoscono classi particolari di queste superficie, ed alcune trasformazioni mediante le quali si possono dedurre da superficie isoterme note infinite altre superficie pure isoterme.

Tutto ciò si conosce per via indiretta e indipendente dall'equazione fondamentale di 4° ordine, perchè essa è d'integrazione difficile.

Nella presente ricerca ho anzitutto stabilito una nuova equazione alle derivate parziali di 4° ordine da cui si può far dipendere il problema. Essa è della forma :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\omega^2) = 0,$$

ed è assai più semplice di quelle finora conosciute.

In secondo luogo ho segnalati gl'invarianti dell'inversione delle su-

---

\*) J. WEINGARTEN, *Ueber die Differentialgleichungen der Oberflächen, welche durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate getheilt werden können*. (Sitzungsberichte der K. P. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, t. II, p. 1163; 1883).— Cfr. anche DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des Surfaces*, t. II, p. 250; 253.

perficie isoterme, che sono di grande utilità per lo studio intrinseco delle trasformazioni di queste superficie.

In terzo luogo ho stabilita l'espressione analitica della trasformazione indicata dal DARBOUX \*), la quale consiste nel comporre l'inversione e la trasformazione involutoria di CHRISTOFFEL. Intorno a questa trasformazione ho stabilito il corrispondente procedimento analitico, mediante il quale si può dedurre da una nota soluzione dell'equazione sopra segnata una nuova soluzione contenente tre costanti arbitrarie \*\*).

Da ultimo ho segnalato che questa trasformazione appartiene ad un tipo più generale, che fornisce ogni volta una soluzione dell'equazione di 4° ordine con *quattro* costanti arbitrarie.

Ritornero prossimamente sull'argomento per sviluppare da questo nuovo punto di vista la teoria delle trasformazioni di queste superficie.

### Equazione fondamentale di 4° ordine.

1. Il problema della ricerca delle superficie a linee di curvatura isoterme può enunciarsi nel modo seguente:

Determinare tre funzioni  $\varphi$ ,  $D$ ,  $D''$  tali, che esista una superficie avente per prima e seconda forma fondamentale le due forme differenziali quadratiche:

$$(I) \quad \begin{cases} e^{2\varphi}(du^2 + dv^2), \\ Ddu^2 + D''dv^2. \end{cases}$$

Per risolvere il problema basterà imporre che le equazioni di CODAZZI e la equazione di GAUSS siano verificate.

Calcolando sulla prima forma quadratica l'espressione della curvatura e i simboli di CHRISTOFFEL che interessano al nostro argomento, si trova:

$$K = -\frac{1}{e^{2\varphi}} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right),$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

---

\*) DARBOUX, l. c., p. 246.

\*\*) Per il significato della funzione  $\omega$ , nessuna di queste costanti può dipendere da omotetia della superficie corrispondente.

Le funzioni  $\varphi$ ,  $D$ ,  $D''$  si debbono adunque determinare dal sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} = (D + D'') \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = (D + D'') \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{DD''}{e^{2\varphi}} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right). \end{cases}$$

Noi vogliamo esporre per questo sistema un metodo d'integrazione, che riduce la principale difficoltà all'integrazione di una equazione d'aspetto notevolmente semplice.

A tale scopo poniamo

$$(3) \quad \begin{cases} D = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega) e^{\varphi}, \\ D'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega - \Omega) e^{\varphi}. \end{cases}$$

In questo modo il sistema (2) diventa:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial u} - (\omega + \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v} = - \frac{\partial \omega}{\partial v} + (\omega - \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2) = 0. \end{cases}$$

Ciò posto, consideriamo questo come un sistema di tre equazioni nelle due funzioni incognite  $\Omega$ ,  $\varphi$  e ricerchiamo come deve determinarsi  $\omega$  affinchè esse diventino coesistenti.

Derivando la prima delle (4) rispetto a  $v$  e la seconda rispetto a  $u$ , ed eliminando per mezzo delle stesse equazioni le derivate delle funzioni  $\Omega$ , questa scompare identicamente e si perviene alla relazione

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}.$$

Inoltre, derivando la terza delle (4) rispetto ad  $u$  e sostituendo per la  $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$  la sua espressione data dalla prima delle (4) stesse e per la  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v^2}$  la sua espressione calcolata dalla (5), si ha:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \Omega (\omega + \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \quad - (\omega - \Omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right). \end{cases}$$

Analogamente si trova :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial v^3} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Omega(\omega - \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ &- (\omega + \Omega) \frac{\partial \omega}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right). \end{aligned} \right.$$

Dalla (5) poi per derivazione possiamo ottenere le altre derivate terze della  $\varphi$  espresse per le derivate d'ordine inferiore ; avremo :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right), \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial v^2} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right). \end{aligned} \right.$$

Ed ora calcolando le condizioni di integrabilità del sistema di equazioni differenziali (4), (5), (6), (7), (8) si trova che esse si riducono alla sola :

$$(9) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\omega^2) = 0.$$

Concludiamo adunque che, affinchè le equazioni differenziali (4) nelle due funzioni incognite  $\Omega$ ,  $\varphi$  siano coesistenti, è necessario che la funzione  $\omega$  verifichi l'equazione differenziale alle derivate parziali di 4° ordine (9).

Inversamente ad ogni soluzione di questa equazione, corrispondono infinite soluzioni del nostro problema dipendenti da *quattro* costanti, arbitrarie.

Infatti, se  $\omega$  è una soluzione della (9) il sistema di equazioni differenziali (4), (5), (6), (7), (8) nelle funzioni incognite  $\Omega$ ,  $\varphi$  è completo.

Per determinare nel modo più generale una coppia di soluzioni  $\Omega$ ,  $\varphi$ , si possono assegnare ad arbitrio per un sistema iniziale di valori  $u_0$ ,  $v_0$  delle variabili  $u$ ,  $v$ , i valori di

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}.$$

L'integrazione introdurrà adunque cinque costanti arbitrarie, ma si riconosce immediatamente che una di esse è additiva in  $\varphi$ , quindi si avranno soltanto quattro costanti essenziali \*).

Partendo adunque da una soluzione  $\omega$  della equazione differenziale

---

\*) Non consideriamo come diverse due superficie isoterme che si possono dedurre l'una dall'altra mediante omotetia.

(9) e integrando il sistema completo (4), (5), (6), (7), (8), si hanno due funzioni  $\Omega$ ,  $\varphi$  con quattro costanti arbitrarie. Le funzioni  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $\varphi$  così determinate soddisfaranno alle equazioni (4), e quindi le funzioni

$$\varphi, \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)e^{\varphi}, \quad D'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)e^{\varphi}$$

soddisfaranno al sistema (2).

È così stabilita la proposizione.

2. Mettiamo il risultato ora conseguito sotto altra forma che meglio si presta per ulteriori ricerche.

Sottraendo dalla (6) la seconda delle (8) ed osservando le (4), si ricava:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \\ & - \omega \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \Omega \frac{\partial \omega}{\partial u} = - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} (\omega^2), \end{aligned}$$

che si può anche scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega \right] \\ & = - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} (\omega^2). \end{aligned}$$

Con procedimento analogo si trova:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega \right] \\ & = 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (\omega^2). \end{aligned}$$

Intanto in forza della equazione (9), cui soddisfa la  $\omega$ , si ha per quadrature una funzione  $J$  che verifica le equazioni

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u} = - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} (\omega^2), \\ \frac{\partial J}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (\omega^2). \end{cases}$$

Per una tale funzione  $J$  potremo scrivere la relazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega = J,$$

che considerata insieme alle equazioni (4), (5) fornisce il sistema simultaneo illimitatamente integrabile

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2 - 2 \omega \Omega) + J, \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} &= -2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{2}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}, \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{2} (\omega^2 - \Omega^2 + 2 \omega \Omega) - J; \end{aligned} \right.$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} - (\omega + \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} + (\omega - \Omega) \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Così, partendo da una soluzione  $\omega$  dell'equazione fondamentale (9), per ogni funzione  $J$  ricavata dalle (10) si hanno dal sistema (A), (B) le funzioni  $\Omega$ ,  $\varphi$  contenenti tre costanti essenziali.

3. OSSERVAZIONE.—Le equazioni fondamentali (4) non si alterano, se si scambiano fra loro  $\omega$  e  $\Omega$  e se si cambia di segno  $\varphi$ . Così si hanno ogni volta due superficie isoterme  $S$ ,  $\bar{S}$  con

$$ds^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2), \quad d\bar{s}^2 = e^{-2\varphi}(du^2 + dv^2),$$

$$\bar{D} = e^{-2\varphi}D, \quad \bar{D}'' = -e^{-2\varphi}D''.$$

Queste superficie  $S$ ,  $\bar{S}$  hanno la medesima rappresentazione sferica delle linee di curvatura e quindi possono collocarsi in guisa che le normali in punti corrispondenti siano parallele.

Questa trasformazione (involutoria) delle superficie isoterme è dovuta a CHRISTOFFEL.

### Gli invarianti dell'inversione delle superficie isoterme.

4. TEOREMA. — Siano  $x$ ,  $y$ ,  $z$  le coordinate d'un punto di una superficie isoterma  $S$ , e siano

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} &e^{-2\varphi}(du^2 + dv^2), \\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)e^{-\varphi}du^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)e^{-\varphi}dv^2 \end{aligned} \right.$$

le due forme quadratiche fondamentali di questa superficie.

Applicando alla  $S$  l'inversione più generale a potenza negativa \*), si ottengono, come è ben noto, infinite superficie isoterme  $S_1$ ; denotando con

$$(12) \quad \begin{cases} e^{-2\varphi_1} (du^2 + dv^2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_1 + \Omega_1) e^{-\varphi_1} du^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_1 - \Omega_1) e^{-\varphi_1} dv^2, \end{cases}$$

le due forme fondamentali della superficie generica  $S_1$ , si hanno le relazioni \*\*)

$$\omega_1 = \omega, \quad J_1 = J;$$

ove si è posto

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega, \\ J_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 - \omega_1 \Omega_1. \end{aligned}$$

Per dimostrare questo teorema assumiamo la potenza dell'inversione eguale a  $-1$ , il che è lecito non volendo considerare come diverse due superficie omotetiche; in questo modo denotando con  $a, b, c$  le coordinate del polo dell'inversione e con  $x, y, z$  le coordinate d'un punto della superficie generica  $S_1$ ; posto

$$\rho = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

avremo le formole seguenti:

$$(13) \quad x_1 - a = -\frac{x - a}{\rho}, \quad y_1 - b = -\frac{y - b}{\rho}, \quad z_1 - c = -\frac{z - c}{\rho}.$$

Derivando queste si ottiene:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{x - a}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{x - a}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{cases}$$

colle analoghe in  $y$  e  $z$ , dalle quali si ricava:

$$(15) \quad \rho = e^{\varphi_1 - \varphi}.$$

\*) Dal punto di vista della geometria intrinseca non considereremo come diverse due superficie isoterme, che si possono dedurre l'una dall'altra mediante una simmetria rispetto a un punto.

\*\*) Se si fa l'inversione a potenza positiva si ha  $\omega_1 = -\omega$ ,  $J_1 = J$ .

Inoltre, denotando con  $X_i, Y_i, Z_i$ , i coseni direttori della normale alla superficie  $S_i$  e con  $X, Y, Z$ , i coseni direttori della normale alla superficie  $S$ , si ottengono con opportuni artifici le formole seguenti:

$$(16) \quad \begin{cases} e^{\varphi-\varphi_1} X_i = -e^{\varphi-\varphi_1} X + \frac{x-a}{\rho^2} \sum 2 X(x-a), \\ e^{\varphi-\varphi_1} Y_i = -e^{\varphi-\varphi_1} Y + \frac{y-b}{\rho^2} \sum 2 X(x-a), \\ e^{\varphi-\varphi_1} Z_i = -e^{\varphi-\varphi_1} Z + \frac{z-c}{\rho^2} \sum 2 X(x-a). \end{cases}$$

Dalle (14) ancora per derivazione, tenendo presenti le (14) stesse, si ricava:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{x-a}{\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}.$$

Donde, osservando le (16):

$$X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = \left[ e^{\varphi-\varphi_1} X - \frac{x-a}{\rho^2} \sum 2 X(x-a) \right] \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} X_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \left[ e^{\varphi-\varphi_1} X(x-a) - \frac{(x-a)^2}{\rho^2} \sum 2 X(x-a) \right].$$

Sommando e riducendo:

$$\sum X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = e^{\varphi-\varphi_1} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \sum 2 X(x-a) - \frac{1}{\rho^2} \left[ (x-a) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (y-b) \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + (z-c) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right] \sum 2 X(x-a).$$

Intanto, avendosi

$$\rho = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

sarà

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial u} = \sum (x-a) \frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = e^{-2\varphi} + \sum (x-a) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}. \end{cases}$$

Dopo di che la precedente diventa

$$\sum X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = e^{\varphi-\varphi_1} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + e^{-2\varphi_1} \sum 2 X(x-a).$$

Scriveremo questa definitivamente

$$(18) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_i + \Omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega) + e^{-\varphi_1} \sum 2 X(x-a).$$



Analogamente si trova :

$$(19) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - \Omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) - e^{-\varphi_1} \sum 2 X(x - a).$$

Da queste due ultime si ricava

$$(20) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega, \\ \Omega_1 = \Omega + \sqrt{2} e^{-\varphi_1} \sum 2 X(x - a), \end{cases}$$

la prima delle quali dimostra una parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte procederemo nel modo seguente.

Si ha dalle (20) :

$$(21) \quad \omega_1 \Omega_1 = \omega \Omega + \sqrt{2} \omega e^{-\varphi_1} \sum 2 X(x - a).$$

Inoltre è ben noto che le funzioni  $x, y, z, \varphi, \omega, \Omega, X, Y, Z$  sono legate dalle relazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega) e^{-\varphi} X,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) e^{-\varphi} X,$$

colle analoghe in  $y$  e  $z$ ; sostituendo nella seconda delle (17) e tenendo sempre presente l'espressione di  $\rho$ , si ottiene :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 2 e^{-2\varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega) e^{-\varphi} \sum 2 X(x - a).$$

Analogamente :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 2 e^{-2\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) e^{-\varphi} \sum 2 X(x - a).$$

Sottraendo :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \sqrt{2} \omega e^{-\varphi} \sum 2 X(x - a),$$

o meglio facendo uso della (21) :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = -2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \rho}{\partial v} + e^{\varphi_1 - \varphi} (\omega_1 \Omega_1 - \omega \Omega).$$

Infine sostituendo per  $\rho$  la sua espressione  $e^{\varphi_1 - \varphi}$  e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right)^2 - \omega_1 \Omega_1 \\ = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - \omega \Omega, \end{aligned}$$

la quale dimostra la seconda parte del teorema.

Alle funzioni  $\omega$  e  $J$  che rimangono inalterate per tale trasformazione daremo il nome di *invarianti*.

D'altra parte è noto che il prodotto di due inversioni qualsiasi, che hanno la potenza dello stesso segno, equivale ad una sola inversione a potenza negativa e ad un movimento, se le due inversioni hanno centri diversi, ed equivale ad una omotetia, se le due inversioni hanno lo stesso centro; quindi dal punto di vista della geometria intrinseca possiamo affermare che l'applicazione successiva delle inversioni più generali a potenza negativa, produce lo stesso effetto che una sola inversione a potenza negativa.

Concludendo; tutte le superficie isoterme derivate da una particolare superficie isoterma mediante l'inversione a potenza negativa (anche se ripetute volte applicata in tutta la sua generalità) costituiscono un sistema triplamente infinito di queste superficie, le quali hanno i medesimi invarianti  $\omega$  e  $J$ .

### Le superficie isoterme derivate dall'integrazione del sistema completo (A), (B).

Da ciò che precede risulta un mezzo per formare  $\infty^3$  superficie isoterme, aventi in comune con una particolare superficie isoterma nota, le funzioni  $\omega$  e  $J$ . Ora vogliamo determinare *tutte* le superficie isoterme che hanno in comune colla prima le funzioni  $\omega$  e  $J$ .

La risoluzione di questo problema consiste manifestamente nell'integrazione del sistema completo (A), (B), in cui per  $\omega$  e  $J$  si pongano le funzioni date.

Denotando ancora con  $\Omega, \varphi$  le funzioni più generali che soddisfanno a questo sistema, avremo in corrispondenza due classi di  $\infty^3$  superficie ciascuna, cioè:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{2\varphi} (du^2 + dv^2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega) e^{\varphi} du^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega - \Omega) e^{\varphi} dv^2; \end{array} \right.$$

$$(\bar{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{-2\varphi} (du^2 + dv^2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega) e^{-\varphi} du^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega - \Omega) dv^2, \end{array} \right.$$

la seconda delle quali è la classe completa di superficie isoterme che hanno i medesimi invarianti  $\omega$  e  $J$ .

L'una di queste classi si cambia nell'altra colla trasformazione di CHRISTOFFEL.

Le superficie  $\bar{S}$  dipendono da tre costanti arbitrarie; ed inoltre a causa dell'unicità dell'integrale generale di (A), (B) possiamo affermare che esse coincidono, *in generale*, con quelle derivate dalla superficie nota mediante l'inversione.

### Intorno ad una trasformazione delle superficie isoterme.

7. Vogliamo dare anzitutto l'espressione analitica del metodo di trasformazione esposto dal DARBOUX, e precisamente vogliamo stabilire le corrispondenti trasformazioni degli invarianti  $\omega$  e  $J$ .

A tale scopo ricordiamo che esso metodo di trasformazione consiste nel comporre l'inversione colla trasformazione di CHRISTOFFEL, ed allora per quanto sopra è dimostrato la funzione  $\omega$  si cambia in  $\Omega$ .

D'altra parte calcoliamo l'invariante  $\bar{J}$  sulla superficie trasformata; avremo :

$$\bar{J} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \omega \Omega,$$

e quindi

$$\frac{1}{2}(J + \bar{J}) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \omega \Omega,$$

o anche in forza delle (4)

$$(22) \quad \frac{1}{2}(J + \bar{J}) = \frac{1}{(\omega + \Omega)^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial \Omega}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{(\omega - \Omega)^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} + \frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 - \omega \Omega.$$

Concludiamo che il sudetto metodo di trasformazione equivale alle operazioni analitiche seguenti :

Assumiamo gl'invarianti  $\omega$ ,  $J$  appartenenti ad una particolare superficie isoterma; integrando il sistema completo (A), (B) avremo una funzione  $\Omega$  con tre costanti arbitrarie e indi dalle (22) la funzione  $\bar{J}$ .

Le funzioni  $\Omega$  e  $\bar{J}$  sono gl'invarianti della superficie trasformata; si può quindi sostituirne i valori nel sistema (A), (B) al posto di  $\omega$  e  $J$  e ripetere il procedimento.

Questo risultato è interessante anche dal punto di vista dell'integrazione dell'equazione differenziale (9), invero la funzione  $\Omega$  così ottenuta è una nuova soluzione di questa equazione.

Ciò risulta dal significato geometrico di  $\Omega$ , e per altro può verificarsi direttamente eliminando fra le (4)  $\omega$  e  $\varphi$ .

Abbiamo quindi una trasformazione degl'integrali della (9), che introduce ogni volta tre costanti arbitrarie, la quale è l'espressione analitica della trasformazione esposta dal DARBOUX.

Ciò posto, segnaliamo una trasformazione più generale, la quale si fonda sull'osservazione seguente.

Se il sistema  $(A), (B)$  è completo qualora si assumono certe funzioni  $\omega, J$ , sarà pure completo se si assumono le funzioni  $\omega, J + \text{cost.}$

Ciò è manifesto dalla forma delle equazioni (10) alle quali deve soddisfare la  $J$ .

Ed allora partendo dagli invarianti  $\omega, J$  appartenenti ad una particolare superficie isoterma, assumeremo in  $(A), (B)$  le funzioni  $\omega, J + \text{cost.}$  ed otterremo così la funzione  $\Omega$  con quattro costanti arbitrarie.

Questo risultato sembra notevole e dal punto di vista dell'integrazione dell'equazione fondamentale (9), può enunciarsi più semplicemente così:

Da una nota soluzione  $\omega$  dell'equazione differenziale (9), integrando il sistema completo (10),  $(A), (B)$ , si ha una nuova soluzione  $\Omega$  della stessa equazione con quattro costanti arbitrarie.

*(Continua).*

Palermo, 10 maggio 1903.

PASQUALE CALAPSO.