

No existencia de ciclos para perfiles $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ en la dinámica acelerada de Collatz

y observaciones sobre el caso $(1^{n_a}, (d+1)^m)$

Miguel Cerdá Bennassar

Abril de 2026

Resumen

Se demuestra la no existencia de ciclos en la dinámica acelerada de Collatz para perfiles de la forma $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ con $n_a \geq 1$ y $d \geq 2$.

El argumento se basa en la ecuación de cierre

$$D m_0 = P_k, \quad D = 2^N - 3^k,$$

que reduce la existencia de ciclos a una condición de divisibilidad. En el caso $m = 1$, la estructura explícita de P_k permite obtener un cierre puramente algebraico.

Como complemento, se discute el caso general $(1^{n_a}, (d+1)^m)$ con $m \geq 2$, su reformulación en términos de una forma lineal en logaritmos de 2 y 3, y la verificación computacional de una condición necesaria en el rango $2 \leq d \leq 15$, $2 \leq m \leq 2553$. También se formaliza la equivalencia entre la formulación modular módulo 3^k y la condición original de divisibilidad.

Índice

1. Introducción	2
2. La ecuación de cierre	2
2.1. Órbitas y perfiles	2
2.2. El perfil uniforme	3
3. Cierre algebraico: caso $m = 1$	4
4. Observaciones sobre el caso $m \geq 2$	4
4.1. El resultado de Laurent	5
4.2. Verificación computacional finita	5
5. Reformulación modular equivalente	6
6. Demostración del resultado principal	6

1. Introducción

La conjetura de Collatz afirma que la iteración de la función

$$T(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3n + 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

lleva todo entero positivo a 1. Un obstáculo equivalente es descartar la existencia de ciclos no triviales.

En la *dinámica acelerada* se aplica $3x + 1$ únicamente a impares y se dividen todos los factores 2 de golpe. Todo ciclo queda entonces codificado por su *perfil orbital* (e_1, \dots, e_k) , donde k es el número de pasos impares y $e_i \geq 1$ el número de divisiones por 2 tras el i -ésimo paso impar.

En este trabajo se estudia la familia de perfiles

$$(1^{n_a}, (d+1)^m),$$

formada por n_a bloques cortos seguidos de m bloques largos. Esta clase constituye una subfamilia natural dentro del espacio de perfiles y presenta una estructura combinatoria suficientemente rígida como para permitir un análisis detallado.

El punto de partida es la ecuación de cierre

$$D m_0 = P_k, \quad D = 2^N - 3^k,$$

que permite reformular la existencia de ciclos como un problema de divisibilidad entera $D \mid P_k$. Esta reducción traslada la dinámica a un marco aritmético puro.

El resultado principal del artículo es el siguiente.

Teorema 1.1 (Resultado principal). *No existe ningún ciclo de la dinámica acelerada de Collatz cuyo perfil orbital sea de la forma $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ con $n_a \geq 1$ y $d \geq 2$.*

La demostración es puramente algebraica y se apoya en dos hechos: una expresión cerrada de P_k para $m = 1$ y una desigualdad elemental que impide la divisibilidad requerida por la ecuación de cierre.

Como complemento estructural, se incluyen observaciones sobre el caso general $(1^{n_a}, (d+1)^m)$ con $m \geq 2$. En esa región, el problema adopta una forma distinta y conduce de manera natural a considerar una forma lineal en logaritmos de 2 y 3, así como una reformulación modular equivalente del criterio de divisibilidad.

2. La ecuación de cierre

2.1. Órbitas y perfiles

Dado un entero impar positivo m_0 , la dinámica acelerada produce la sucesión

$$m_0 \xrightarrow{3x+1, /2^{e_1}} m_1 \xrightarrow{3x+1, /2^{e_2}} m_2 \longrightarrow \dots,$$

donde $e_i = v_2(3m_{i-1} + 1)$ es el exponente exacto de 2 que aparece tras cada multiplicación. Un *ciclo* de longitud k es una órbita periódica $m_k = m_0$ con perfil (e_1, \dots, e_k) .

El total de pasos pares es $N = e_1 + \dots + e_k$. La condición de periodicidad $m_k = m_0$, desarrollada paso a paso, conduce a la ecuación de cierre que se formula a continuación.

Definición 2.1. Sea (e_1, \dots, e_k) un perfil orbital. Se definen los prefijos acumulados

$$\text{pref}_0 := 0, \quad \text{pref}_j := e_1 + \dots + e_j,$$

y la sucesión de cierre $(P_j)_{j=0}^k$ mediante

$$P_0 := 0, \quad P_{j+1} := 3P_j + 2^{\text{pref}_j}, \quad j = 0, \dots, k-1.$$

El denominador de cierre es

$$D := 2^N - 3^k.$$

Lema 2.2 (Ecuación de cierre). Sea m_0 un entero impar positivo cuya órbita acelerada forma un ciclo con perfil (e_1, \dots, e_k) . Entonces

$$D m_0 = P_k.$$

En particular, $D > 0$ y $D \mid P_k$.

Demostración. Se verifica por inducción que

$$m_j = \frac{3^j m_0 + P_j}{2^{\text{pref}_j}}.$$

Para $j = 0$ es inmediato. Si vale para j , entonces

$$m_{j+1} = \frac{3m_j + 1}{2^{e_{j+1}}} = \frac{3^{j+1}m_0 + 3P_j + 2^{\text{pref}_j}}{2^{\text{pref}_{j+1}}} = \frac{3^{j+1}m_0 + P_{j+1}}{2^{\text{pref}_{j+1}}},$$

usando la recursión de la Definición 2.1. La condición de ciclo $m_k = m_0$ da

$$\frac{3^k m_0 + P_k}{2^N} = m_0,$$

es decir, $D m_0 = P_k$. Como $m_0 \geq 1$ y $P_k > 0$, se sigue $D > 0$. □

Observación 2.3. $D = 2^N - 3^k$ es siempre impar, pues 2^N es par y 3^k es impar. En particular, $\gcd(D, 2^j) = 1$ para todo $j \geq 1$.

2.2. El perfil uniforme

Para el perfil $(1^{n_a}, (d+1)^m)$, los n_a bloques cortos tienen $e_i = 1$ y los m bloques largos tienen $e_i = d+1$. Los parámetros globales son

$$k = n_a + m, \quad N = n_a + (d+1)m.$$

Durante los primeros n_a pasos, $\text{pref}_j = j$ y la recursión $P_{j+1} = 3P_j + 2^j$ con $P_0 = 0$ tiene solución

$$P_j = 3^j - 2^j \quad (j = 0, \dots, n_a),$$

verificable por inducción directa. Esta separación entre bloques cortos y largos es la que permite, en la sección siguiente, obtener una fórmula cerrada de P_k para $m = 1$.

3. Cierre algebraico: caso $m = 1$

Cuando $m = 1$ hay un único bloque largo al final del perfil. En este caso $k = n_a + 1$, $N = n_a + d + 1 = k + d$, y la fórmula iterativa de la sección anterior permite calcular P_k de forma explícita.

Lema 3.1. *Para el perfil $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ con $n_a \geq 1$ se tiene*

$$P_k = 3^k - 2^k, \quad k = n_a + 1.$$

Demostración. Como se estableció en el apartado 2.2,

$$P_{n_a} = 3^{n_a} - 2^{n_a}.$$

El bloque largo tiene $\text{pref}_{n_a} = n_a$, por lo que

$$P_k = P_{n_a+1} = 3P_{n_a} + 2^{n_a} = 3(3^{n_a} - 2^{n_a}) + 2^{n_a} = 3^{n_a+1} - 2^{n_a+1}.$$

□

Lema 3.2. *Sea $k \geq 2$, $d \geq 2$ y $D = 2^{k+d} - 3^k$. Si $D > 0$, entonces $D > 2^d - 1$.*

Demostración. Para $k \geq 2$,

$$D = 2^d \cdot 2^k - 3^k \geq 2^d \cdot 4 - 9 = 4 \cdot 2^d - 9.$$

La desigualdad $4 \cdot 2^d - 9 > 2^d - 1$ equivale a $3 \cdot 2^d > 8$, que se verifica para todo $d \geq 2$. □

Teorema 3.3. *No existe ningún ciclo de la dinámica acelerada con perfil $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ para $n_a \geq 1$ y $d \geq 2$.*

Demostración. Por el Lema 2.2 basta ver que $D \nmid P_k$. Con $k = n_a + 1 \geq 2$ y $P_k = 3^k - 2^k$ por el Lema 3.1, escribimos

$$3^k - 2^k = (3^k - 2^{k+d}) + (2^{k+d} - 2^k) = -D + 2^k(2^d - 1).$$

Luego

$$3^k - 2^k \equiv 2^k(2^d - 1) \pmod{D}.$$

Como D es impar por la Observación 2.3, la condición $D \mid (3^k - 2^k)$ equivale a $D \mid (2^d - 1)$. Pero $2^d - 1 \geq 3 > 0$ y $D > 2^d - 1$ por el Lema 3.2, luego $D \nmid (2^d - 1)$. □

Observación 3.4. El caso $n_a = 0$ se resuelve aún más directamente: $P_1 = 1$ y $D = 2^{d+1} - 3 \geq 5$, luego $D \nmid 1$.

4. Observaciones sobre el caso $m \geq 2$

Para $m \geq 2$, la expresión de P_k ya no se reduce a $3^k - 2^k$, pues los bloques largos introducen potencias de 2 mayores. En consecuencia, el argumento algebraico del caso $m = 1$ no se extiende de forma inmediata.

El análisis del borde admisible conduce a considerar la forma lineal

$$\Lambda_d(m) := (n_a + m) \log 3 - (n_a + (d+1)m) \log 2,$$

donde $n_a = n_a^{\max}(d, m)$ es el mayor valor admisible con $D > 0$.

La existencia de un ciclo en ese borde sugiere una aproximación muy fina entre las escalas exponenciales 3^{n_a+m} y $2^{n_a+(d+1)m}$. En este contexto, el resultado explícito de Laurent ofrece una herramienta natural para excluir tales aproximaciones cuando m es grande.

4.1. El resultado de Laurent

Teorema 4.1 (Laurent 2008, Cor. 2, [1]). Sean α_1, α_2 reales algebraicos positivos multiplicativamente independientes y b_1, b_2 enteros positivos. Con $B := \max(b_1, b_2)$,

$$\log |b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1| > -C_2 (1 + \log B)^2,$$

donde $C_2 = 25,2$ es la constante de la Tabla 1 de [1].

Aplicado a $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$,

$$b_1 = n_a + (d+1)m, \quad b_2 = n_a + m,$$

el Teorema 4.1 da una cota inferior efectiva para

$$\Lambda_d(m) = (n_a + m) \log 3 - (n_a + (d+1)m) \log 2.$$

Para d fijo, se obtiene así un umbral $M_0(d)$ a partir del cual quedan excluidas aproximaciones exponencialmente pequeñas.

4.2. Verificación computacional finita

En el rango

$$2 \leq d \leq 15, \quad 2 \leq m \leq 2553,$$

se ha verificado computacionalmente la desigualdad

$$|\Lambda_d(m)| > 3^{-m},$$

mediante aritmética de alta precisión.

Proposición 4.2. Para todo

$$d \in \{2, \dots, 15\}, \quad m \in \{2, \dots, 2553\},$$

la desigualdad

$$|\Lambda_d(m)| > 3^{-m}$$

se verifica computacionalmente mediante aritmética de alta precisión. El margen mínimo observado es positivo en todos los casos.

Demostración. La comprobación se realizó con aritmética multiprecisión (`mpmath`, 1300 dígitos decimales), evaluando el signo de

$$\log |\Lambda_d(m)| + m \log 3$$

para todos los pares (d, m) del rango indicado. En todos los casos el margen resultó estrictamente positivo. \square

Observación 4.3. El código utilizado para la verificación computacional está disponible a petición del autor.

5. Reformulación modular equivalente

La condición de cierre también admite una lectura modular. Fijado un perfil con parámetros (N, k) , definimos

$$\alpha_k \equiv P_k (2^N)^{-1} \pmod{3^k},$$

bien definido porque $\gcd(2^N, 3^k) = 1$.

Por otra parte, la positividad del posible cociente $m_0 = P_k/D$ lo sitúa en un intervalo real $(L, U]$ asociado al perfil, obtenido a partir de las cotas estándar de la ecuación de cierre. La formulación modular pide entonces compatibilizar simultáneamente la congruencia módulo 3^k y la pertenencia al intervalo.

Proposición 5.1 (Equivalencia estructural). *Sea un perfil orbital fijo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe un ciclo con ese perfil.*
2. *Se cumple $D \mid P_k$.*
3. *Existe un entero $m_0 \in (L, U]$ tal que*

$$m_0 \equiv \alpha_k \pmod{3^k}.$$

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es el Lema 2.2. Si $D \mid P_k$, entonces $m_0 = P_k/D$ es un entero positivo y, por construcción,

$$P_k = Dm_0 = (2^N - 3^k)m_0,$$

de donde

$$2^N m_0 \equiv P_k \pmod{3^k},$$

es decir,

$$m_0 \equiv P_k (2^N)^{-1} \equiv \alpha_k \pmod{3^k}.$$

Además, la positividad del cociente y las cotas estructurales del perfil implican $m_0 \in (L, U]$.

Recíprocamente, si existe un entero $m_0 \in (L, U]$ con $m_0 \equiv \alpha_k \pmod{3^k}$, entonces

$$2^N m_0 \equiv P_k \pmod{3^k}.$$

La condición $m_0 \in (L, U]$ identifica al único candidato positivo compatible con el cierre, y por tanto se recupera $Dm_0 = P_k$. En consecuencia, $D \mid P_k$. \square

Observación 5.2. La Proposición 5.1 muestra que la reformulación modular no constituye una vía independiente de demostración: es una traducción exacta de la divisibilidad original.

6. Demostración del resultado principal

Demostración del Teorema 1.1. Supóngase que existe un ciclo con perfil

$$(1^{n_a}, (d+1)^1), \quad n_a \geq 1, \quad d \geq 2.$$

Por el Lema 2.2, se tiene $D \mid P_k$. Pero el Teorema 3.3 implica $D \nmid P_k$. Contradicción. \square

Observaciones finales

El resultado principal del trabajo proporciona un cierre puramente algebraico para la familia de perfiles $(1^{n_a}, (d+1)^1)$ en la dinámica acelerada de Collatz.

Para $m \geq 2$, el problema adopta una forma distinta y parece estar gobernado por una aproximación exponencial entre las escalas 2^N y 3^k . La reformulación en términos de la forma lineal $\Lambda_d(m)$, junto con la verificación computacional en el rango $2 \leq d \leq 15$, $2 \leq m \leq 2553$, apunta a la no existencia de ciclos también en esa región, pero el paso deductivo completo desde la divisibilidad $D \mid P_k$ hasta la cota analítica correspondiente no se desarrolla aquí en forma autosuficiente.

Desde un punto de vista estructural, la ecuación de cierre permite interpretar la dinámica como un problema aritmético de divisibilidad. La reformulación modular en términos de clases residuales módulo 3^k es equivalente a dicha divisibilidad y, por tanto, constituye una reinterpretación exacta del mismo obstáculo.

Referencias

- [1] M. Laurent, *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II*, Acta Arith. **133** (2008), no. 4, 325–348.
- [2] M. Laurent, M. Mignotte, Yu. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, J. Number Theory **55** (1995), 285–321.
- [3] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.