Sur les racines de certaines équations.

Par

A. Markoff à St. Pétersbourg.

Les équations, dont nous allons parler, se rattachent au développement en fraction continue de la fonction suivante

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\, dy - \xi \int_c^d \frac{f(y)}{z-y} dy\,. \tag{1}$$

Nous supposons ici les nombres a, b, c, d et le paramètre variable ξ réels, les différences $b-a$, $c-b$, $d-c$ et les fonctions $g(y)$, $f(y)$ positives (au moins pour $a < y < b$ et pour $c < y < d$).

Posons en général

$$\int_a^b y^i g(y)\, dy = \alpha_i, \quad \int_c^d y^i f(y)\, dy = \beta_i. \tag{2}$$

Soit maintenant $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$ une des fractions convergentes de la fonction $F(z)$ et

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n. \tag{3}$$

On aura le système des équations du premier degré

$$\text{(4)*)}\quad \begin{cases} p_0(\alpha_0 - \xi\beta_0) + p_1(\alpha_1 - \xi\beta_1) + \cdots + p_n(\alpha_n - \xi\beta_n) = 0 \\ p_0(\alpha_1 - \xi\beta_1) + p_1(\alpha_2 - \xi\beta_2) + \cdots + p_n(\alpha_{n+1} - \xi\beta_{n+1}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_0(\alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}) + p_1(\alpha_n - \xi\beta_n) + \cdots + p_n(\alpha_{2n-1} - \xi\beta_{2n-1}) = 0, \end{cases}$$

qui définit les rapports

$$\frac{p_0}{p_n}, \frac{p_1}{p_n}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. 1878, p. 287.

Ces rapports s'expriment par les fractions, dont les dénominateurs sont égaux à la fonction entière de ξ du degré n

$$(5)\qquad \Phi_n(\xi) = \begin{vmatrix} \alpha_0 - \xi\beta_0, & \alpha_1 - \xi\beta_1, & \ldots, & \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1} \\ \alpha_1 - \xi\beta_1, & \alpha_2 - \xi\beta_2, & \ldots, & \alpha_n - \xi\beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} - \xi\beta_{n-1}, & \alpha_n - \xi\beta_n, & \ldots, & \alpha_{2n-2} - \xi\beta_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

L'exception ne font que les cas, où $\Phi_n(\xi) = 0$.

On peut poser en ces cas exclusifs $p_n = 0$ et abaisser ainsi le degré de la fonction $\varphi_n(z)$, satisfaisante aux équations (4).

Dans notre but il est important de remarquer, que, $\Phi_n(\xi)$ n'étant pas $= 0$, toutes les racines de l'équation

$$\varphi_n(z) = 0$$

du degré n sont des nombres finis, et c'est à cause de celà, qu'avec l'accroissement infini d'une des racines de cette dernière équation ξ s'approche à l'une des racines de l'équation

$$\Phi_n(\xi) = 0.$$

La question à laquelle est consacrée cette note consiste, principalement, dans la détermination du nombre des racines de l'équation $\varphi(z) = 0$, comprises dans les intervalles

$$\text{de } -\infty \text{ à } a, \quad \text{de } a \text{ à } b, \quad \text{de } b \text{ à } c, \quad \text{de } c \text{ à } d, \quad \text{de } d \text{ à } +\infty$$
$$(-\infty, a), \qquad (a, b), \qquad (b, c) \qquad (c, d), \qquad (d, +\infty).$$

La résolution de cette question est renfermée dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.

La fonction $\varphi_n(z)$ dans les intervalles (a, b) et (c, d) change son signe au moins $n - 1$ fois.

Démonstration.

Supposons, que dans les intervalles (a, b) et (c, d) la fonction $\varphi_n(z)$ change son signe précisement m fois pour

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_m$$

et formons les fonctions

$$\Theta(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_m), \quad \Theta_1(z) = (z - \varepsilon)\Theta(z)$$

où ε est un nombre quelconque, compris entre b et c.

Alors les produits

$$\varphi_n(z)\,\Theta(z) \quad \text{et} \quad \varphi_n(z)\,\Theta_1(z)$$

ne changent leurs signes ni dans l'intervalle (a, b) ni dans celui (c, d): dans le premier de ces intervalles elles sont de signes contraires et dans le second de même signe.

De là il est aisé de voir, qu'une des expressions

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b g(y)\,\Theta\,(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta\,(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

et

$$\text{(B)} \qquad \int_c^d g(y)\,\Theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta_1(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

n'est pas égale au zéro.

Mais d'après les équations (4) l'expression (A) se réduit au zéro, si $m < n$, et l'expression (B) —, si $m < n - 1$.

Donc en tous cas m ne peut être moindre que $n - 1$.

On démontrera sans peine, par les considérations tout à fait analogues, les scolies suivantes.

Scolie 1.

Soit ξ positif, toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ tombent dans les intervalles

$$(-\infty, b), \qquad (c, +\infty).$$

Soit ξ négatif, toutes les racines de même équation tombent entre a et d.

Scolie 2.

Pour $\xi = 0$ toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ sont comprises entre a et b.

Pour $\xi = \pm\infty$, au contraire, toutes les racines de même équation sont comprises entre c et d, car alors la fonction $-\frac{F(z)}{\xi}$ devient

$$\int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy.$$

Corollaire.

L'équation $\varphi_n(z) = 0$ n'a pas de racines égales; en d'autres termes la dérivée $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial z}$ ne peut être réduite au zéro, quand $\varphi_n(z) = 0$.

Lemme.

La dérivée $\frac{\partial\varphi_n(z)}{\partial\xi}$ ne peut être réduite au zéro, quand

$$\varphi_n(z) = 0.$$

Démonstration.

D'après les équations (4) nous avons

$$\text{(6)} \qquad \int_a^b g(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy - \xi\int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy$$

quelque soit la fonction entière $\Theta(z)$ du degré $n - 1$.

En différentiant l'équation (6) et en posant $\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial \xi} = \omega_n(z)$ nous déduisons

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b g(y)\,\Theta(y)\,\omega_n(y)\,dy - \xi \int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\omega_n(y)\,dy \\ - \int_c^d f(y)\,\Theta(y)\,\varphi_n(y)\,dy \end{aligned} \right\} = 0.$$

Admettons maintenant que les équations

$$\varphi_n(z) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_n(z) = 0$$

ont une racine commune $z = \varepsilon$.

Alors rien ne nous empêche de poser

$$\text{dans la formule (6)} \qquad \Theta(z) = \frac{\omega_n(z)}{z - \varepsilon}$$

$$\text{et dans la formule (7)} \qquad \Theta(z) = \frac{\varphi_n(z)}{z - \varepsilon}.$$

Nous aurons ainsi les équations suivantes

$$\int_a^b g(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot \omega_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy - \xi \int_c^d f(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot \omega_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b g(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot \omega_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy - \xi \int_c^d f(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot \omega_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy \\ - \int_c^d f(y) \frac{\varphi_n(y) \cdot \varphi_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy \end{aligned} \right\} = 0,$$

d'où il suit

$$\int_c^d f(y) \cdot \frac{\varphi_n(y) \cdot \varphi_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy = 0$$

et ensuite

$$\int_a^b g(y) \cdot \frac{\varphi_n(y) \cdot \varphi_n(y)}{y - \varepsilon}\,dy = 0.$$

Mais les deux égalités dernières sont impossibles.

Cette contradiction indique, que les fonctions $\varphi_n(z)$ et $\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial \xi}$ ne peuvent être simultanément égales au zéro.

Corollaire.

Lorsque ξ décroît continuellement de zéro jusqu'à $-\infty$, chaque racine de l'équation se varie aussi continuellement et toujours dans même sens: elle croit; car elle passe de l'intervalle (a, b) dans celui (c, d).

Et lorsque ξ croît continuellement de zéro jusqu'à $+\infty$ chaque racine de l'équation, en variant aussi continuellement, décroît toujours excepté les cas, où cette racine franchit $\pm\infty$.

De là résultent les théorèmes suivants.

Théorème 2.

Lorsque ξ décroît de 0 *jusqu'à* $-\infty$ *toutes les racines de l'équation* $\varphi_n(z) = 0$, *franchissant successivement* b *et* c, *passent de l'intervalle* (a, b) *dans celui* (c, d).

Par conséquent toutes les racines des équations

$$\varphi_n(b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(c) = 0,$$

du degré n *par rapport à l'inconnue* ξ, *sont réelles et négatives.*

D'ailleurs si nous désignons dans l'ordre décroissant les racines

de l'équation $\varphi_n(b) = 0$ *par* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$,
de l'équation $\varphi_n(c) = 0$ *par* $\eta_1', \eta_2', \ldots, \eta_n'$,

nous aurons les inégalités suivantes

$$\eta_1 > \eta_1' > \eta_2 > \eta_2' > \cdots > \eta_n > \eta_n'.$$

Enfin quant aux racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ *nous pouvons assurer, que*

pour $\eta_i > \xi > \eta_i'$	$n - i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b
	une	b *et* c
	$i - 1$	c *et* d
et pour $\eta_i' > \xi > \eta_{i+1}$	$n - i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b
	i	c *et* d.

Scolie.

Soient

$$z = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z) = 0$ dans l'ordre croîssant.

Alors aux inégalités

$$0 > \sigma > \sigma'.$$

correspond la suivante

$$(x_i)_{\xi=\sigma} < (x_i)_{\xi=\sigma'}$$

et par suite

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma} > \left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\sigma'} \tag{8}$$

Théorème 3.

Lorsque ξ augmente de 0 *jusqu'à* $+\infty$ *toutes les racines de l'équation* $\varphi_n(z) = 0$, *franchissant successivement*

$$a, \ -\infty, \ +\infty, \ d$$

passent de l'intervalle (a, b) *dans celui* (c, d).

De là résulte que toutes les racines des équations

$$\varphi_n(a)=0,\quad \Phi_n(\xi)=0,\quad \varphi_n(d)=0,$$

du degré n par rapport à l'inconnue ξ, sont réelles et positives.

D'ailleurs, si dans l'ordre croîssant les racines de l'équation

$$\begin{array}{lll} \varphi_n(a)=0 & \textit{sont} & \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n, \\ \Phi_n(\xi)=0 & & \xi_1',\ \xi_2',\ \ldots,\ \xi_n', \\ \varphi_n(d)=0 & & \xi_1'',\ \xi_2'',\ldots,\ \xi_n'', \end{array}$$

nous avons les inégalités suivantes

$$\xi_1<\xi_1'<\xi_1''<\xi_2<\xi_2'<\xi_2''<\cdots<\xi_n<\xi_n'<\xi_n''.$$

Enfin, quant aux racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$, nous pouvons assurer que

pour $\xi_i<\xi<\xi_i'$	$n-i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b,
	une	a *et* $-\infty$,
	$i-1$	c *et* d,
pour $\xi_i'<\xi<\xi_i''$	$n-i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b,
	une	$+\infty$ *et* d,
	$i-1$	c *et* d,
pour $\xi_i''<\xi<\xi_{i+1}$	$n-i$ *de celles sont comprises entre*	a *et* b,
	i	c *et* d.

Scolie.

Soient pour $\xi>0$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

toutes les racines de l'équation $\varphi_n(z)=0$ dans le même ordre que nous représentent les nombres

$$b,\ a,\ -\infty,\ +\infty,\ d,\ c.$$

Soit encore h un nombre quelconque comprise entre b et c.

Alors aux inégalités

$$0<\tau<\tau'$$

correspond

$$\left(\frac{1}{h-x_i}\right)_{\xi=\tau}>\left(\frac{1}{h-x_i}\right)_{\xi=\tau'}$$

et par suite

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau}>\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\tau'} \tag{9}$$

Lemme.

$$\left\{\begin{aligned} p_n\Phi_{n+1}(\xi)&=\left\{\begin{aligned}&p_0(\alpha_n-\xi\beta_n)+p_1(\alpha_{n+1}-\xi\beta_{n+1})+\cdots\\&\cdots+p_{n-1}(\alpha_{2n-1}-\xi\beta_{2n-1})+p_n(\alpha_{2n}-\xi\beta_{2n})\end{aligned}\right\}\Phi_n(\xi)\\ &=\Phi_n(\xi)\left\{\int_a^b g(y)\cdot y^n\varphi_n(y)\,dy-\xi\int_c^d f(y)y^n\varphi_n(y)\,dy\right\}.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Nous obtenons cette formule au moyen du théorème sur le développement d'un déterminant suivant les éléments de quelque colonne.

Lemme.

ξ étant positif, pour $\varphi_n(a) = 0$ le produit $\Phi_{n+1}(\xi) \cdot \Phi_n(\xi)$ est un nombre négatif; au contraire pour $\varphi_n(d) = 0$ le même produit est un nombre positif.

Démonstration.

Pour $\varphi_n(a) = 0$ l'expression $\dfrac{\varphi_n(z) \cdot (z-b)}{z-a}$ représente une fonction entière de z, du degré n.

Le coefficient de z^n dans cette fonction est égal à p_n. Cela étant il est aisé de transformer la formule (10) dans la suivante

$$p_n^2 \Phi_{n+1}(\xi)\Phi_n(\xi) = \left(\Phi_n(\xi)\right)^2 \left\{ \int_a^b g(y) \frac{(\varphi_n(y))^2 \cdot (y-b)}{y-a} dy - \xi \int_c^d g(y) \frac{(\varphi_n(y))^2 (y-b)}{y-a} dy \right\}$$

dont on déduit immédiatement l'inégalité

$$\Phi_n(\xi)\, \Phi_{n+1}(\xi) < 0.$$

Tout de même on peut démontrer la seconde partie de notre lemme.

Corollaire.

Toutes les racines de l'équation

$$\Phi_{n+1}(\xi) = 0$$

sont comprises, une à une, dans les intervalles suivantes

$$(0, \xi_1), (\xi_1'', \xi_2), (\xi_2'', \xi_3), \ldots, (\xi_{n-1}'', \xi_n), (\xi_n'', +\infty).$$

Théorème 4.

Soient

$$\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_{n+1}^0$$

toutes les racines de l'équation $\Phi_{n+1}(\xi) = 0$ *dans l'ordre croissant.*

Alors pour

$$\xi = \xi_\varkappa^0$$

$n - \varkappa + 1$ *racines de l'équation*

$$\varphi_n(z) = 0$$

sont comprises entre a et b et les autres $\varkappa - 1$ entre c et d.

En même temps nous avons les inégalités suivantes

$$\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_\varkappa^0} > \left(\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)_{\xi=\xi_{\varkappa+1}^0}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_\varkappa^0} > \left(\frac{\varphi_n'(h)}{\varphi_n(h)}\right)_{\xi=\xi_{\varkappa+1}^0} \tag{12}$$

où h est un nombre quelconque, compris entre b et c.

Démonstration.

Toutes les conclusions de ce théorème sont des corollaires évidents des propositions précédentes, excepté l'inégalité (11).

Quant à cette dérnière inégalité, elle se réduit à l'inégalité (8), si nous remarquons, que pour $\Phi_{n+1}(\xi) = 0$ la fonction $\varphi_n(z)$ devient le dénominateur d'une fraction convergente de la fonction

$$F_1(z) = \int_a^b \frac{(b-y)g(y)}{z-y}\,dy - (-\xi)\int_c^d \frac{(y-b)f(y)}{z-y}\,dy$$

où

$$(b-y)g(y) > 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b$$

et

$$(y-b)f(y) > 0 \quad \text{pour} \quad c < y < d.$$

Remarque.

Ces considérations sont analogues à plusieurs égards à celles de Sturm sur les racines des certaines équations, qui se rattachent à l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.*)

D'ailleurs il faut remarquer que les fonctions de Lamé peuvent être considerées comme les cas particuliers des fonctions $\varphi_n(z)$.**)

De là il est aisé de voir la liaison entre nos théorèmes et celui de M. Klein, suppléé par M. Ljapounoff.***)

30. septembre 1885.

---

*) Sturm. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Journal de M. Liouville, première série, tome I.

**) Heine. Handbuch der Kugelfunctionen 1878. § 102. — Sochotzky. Sur les intégrales définies et les fonctions, dont on se sert pour les développements dans les séries. 1873. Chapitre II (russe).

***) Klein. Ueber Lamé'sche Functionen. Mathematische Annalen XVIII. — Ljapounoff. De la stabilité des formes éllipsoidales de l'équilibre d'une masse liquide, douée d'une rotation (russe) 1884. Chapitre IV. — Voir aussi Stieltjes. Sur certaines polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé. Acta Mathematica VI.