

五维数学：系统科学的新数学框架

——基于五维存在论与主观能动性分层的协同运算

赵桂儒*

摘要

传统数学受限于线性叠加范式，难以精准刻画异质系统的非线性协同机制与整体涌现性。本文基于五维存在论，构建全新五维数学体系，证明五维最小完备性定理，以乘法耦合方式定义协同系数 k ；总强度满足 $I_{base} \cdot (1 + k)$ ，实现物理守恒与系统涌现的统一；并证明传统数学是 $k = 0$ 时的退化特例。进一步，本文揭示协同系数具有参照系相对性——同一组合在不同功能意图或不同观察尺度下可呈现不同的 k 值。依据主观能动性差异，将系统划分为无、弱、强三类并匹配相应的五维运算类型，揭示了熵增等复杂系统问题难以被传统数学解析的核心根源。该框架实现全谱系系统的统一描述，为一般系统论提供了新的量化基础。

关键词：五维数学；协同系数；参照系相对性；熵增；主观能动性；一般系统论

1 引言：从日常现象透视传统数学的范式局限

传统数学中的加法运算 $1 + 1 = 2$ 长期被视作绝对真理，而“单箭易折，众箭难断”等朴素认知所揭示的协同增效规律，却未被纳入经典数学的运算框架。在常规加法中，只考虑同质单元的线性叠加，而战士与枪械、医师与器械这类异质主体的协同组合，无法被传统加法有效刻画，完全忽略交互协同对系统效能的质变影响。其本质局限在于：基础数学仅刻画数值层面的线性量变，未能表征异质存在体之间的非线性协同关系。

传统加法隐含着未被明述的核心预设：参与运算的单元处于完全独立、无相互作用的理想状态，即默认协同系数 $k = 0$ ，仅适用于线性孤立系统。大量现实场景直观揭示了这一预设的缺陷，也印证了构建新数学框架的必要性：

- 桌体与垫木：垫入木块后，边界重叠、结构匹配，系统整体稳定性实现涌现，传统加法无法解释。
- 筷子束（折箭遗教）：捆束后的整体抗折效能实现跃升，体现强涌现性。
- 打虎亲兄弟，上阵父子兵：信任与默契带来显著协同增效。
- 医生与手术刀：异质主体间通过边界、结构、方向、储备、强度的匹配产生高效协同，传统加法无法量化。
- 正面强攻与穿插迂回：战术协同实现战斗力倍增。
- 光速叠加：两束光相向速度仍为 c ，直接突破线性加法逻辑。

上述案例共同印证：传统加法仅能核算物理数量的守恒，完全忽略边界、结构、方向等要素对系统质变的决定性作用。本文基于五维存在论 [1] 构建五维数学体系，将协同系数 k 作为核心变量纳入运算，使传统加法成为 $k = 0$ 时的特殊情形。

*赵桂儒，1983 年 3 月出生，男，北京市地震局，高级工程师，研究方向为系统科学；通讯地址：北京市海淀区苏州街 28 号，邮编 100080；电话：13718012112；E-mail: zhaogr@bjseis.gov.cn

2 五维数学基础

2.1 存在体的五维表示

任意存在体 E 均可统一表示为五维五元组形式：

$$E = (B, S, R, D, I) \quad (1)$$

各维度核心定义与内涵如下：

B （边界）：存在体的作用范围、影响域，或与其他存在体实现探测、感知、交互的临界极限。

S （结构）：存在体内部要素的组织形式、连接关系与排布逻辑。

R （储备）：存在体蕴含的物质、能量与信息存量，严格守恒，是系统存在的物理基础。

D （方向）：存在体的运动趋向、演化路径与作用指向。

I （强度）：存在体的作用效能、因果影响力与功能输出能力，受协同影响可产生涌现增益。

公理 2.1. 五维存在论的形式化核心约束为：

$$I \neq 0 \Rightarrow B \neq \emptyset \quad (2)$$

$$S = \emptyset \Rightarrow I = 0 \quad (3)$$

$$R = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} < 0 \quad (4)$$

$$D \text{ 唯一决定强度梯度场 } \nabla_D I \quad (5)$$

$$I = F(B, S, R, D, t) \quad (6)$$

哲学注释：五维数学中的边界交集需严格遵循辩证唯物主义核心原则，所有边界重叠均需具备真实性、可观测性与可交互性。边界接触是一切博弈理论成立的前置前提，脱离边界接触，博弈便无从谈起。

定理 2.1. 边界、结构、储备、方向、强度是描述存在体本质属性的最小完备维度集，五大维度缺一不可，且无法进一步约简。

证明：必要性可由五维依赖公理直接推导得出；最小性体现为，所有可描述的存在体属性均可唯一归入五大维度范畴，不存在独立于五维之外的第六类基本维度。□

2.2 强度单元与协同系数

定义 2.1. 将存在体进行数学抽象，得到强度单元 \mathcal{U} ，其表达式为：

$$\mathcal{U} = (B, S, R, D, I) \quad (7)$$

定义 2.2. 用于衡量两个强度单元 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ 的协同匹配程度，取值范围为 $[0, 1]$ 。采用五维乘法耦合形式，任一维度匹配失效则 $k = 0$ ，严格遵循五维最小完备性。具体定义为：

$$k(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = \gamma_B \cdot \gamma_S \cdot \gamma_R \cdot \cos \theta \cdot \gamma_I \quad (8)$$

其中

$$\gamma_B = \frac{|B_1 \cap B_2|}{|B_1 \cup B_2|}, \quad \gamma_S = \text{结构相似度}, \quad \gamma_R = \frac{2R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2}, \quad \theta = \angle(D_1, D_2), \quad \gamma_I = \frac{2I_1 I_2}{I_1^2 + I_2^2} \quad (9)$$

注：协同系数 k 是相对量，其取值随参照系变化而改变，实际应用中需约定统一参照框架。

2.3 五维协同运算规则：乘法溢出与加法基础

本框架核心区分物理守恒与效能增益：

- 基础强度：传统线性加法，代表系统固有存量的简单叠加。
- 协同溢出：五维匹配度 k （乘法结果），代表系统效能的额外增益部分。
- 总强度：基础强度与协同溢出之和，无任何外部人为参数。

两个强度单元经协同融合，形成新的复合单元 $\mathcal{U}_C = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ 。核心运算规则如下：

$$I_{base} = I_1 + I_2 \quad (11)$$

$$I_C = I_{base} \cdot (1 + k) \quad (12)$$

$$B_C = B_1 \cup B_2, \quad S_C = S_1 \bowtie S_2, \quad \vec{D}_C = \vec{D}_1 + \vec{D}_2, \quad R_C = R_1 + R_2 \quad (13)$$

关键说明：公式 (12) 中， k 仅放大系统的效能强度 I ，物理储备 R 始终守恒。协同带来的是作用效能的放大，而非物理实体的凭空增加。

2.4 五维动态演化

定义五维微分算子：设 Φ_t 为协同流，五维微分表达式为：

$$\hat{D}I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(I) \ominus I}{t} \quad (14)$$

定义五维积分算子：

$$\int_{t_0}^{t_1} I(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bigoplus_i I(t_i) \Delta t \quad (15)$$

定理 2.2. 当 $k \equiv 0$ 时，五维运算退化为传统线性数学，即传统微积分是五维数学在无协同条件下的退化特例。

证明： $k = 0$ 时协同溢出消失，总强度公式退化为线性加法，微分/积分非线性项消失。□

2.5 五维量化快速参考表

维度	物理/工程系统	AI/软件系统	社会/组织系统
边界 B	空间/温度范围	输入分布范围	交互半径与阈值
结构 S	几何/拓扑相似度	特征空间一致性	组织层级相似度
储备 R	能量/物质存量	参数/数据容量	资源/信誉存量
方向 D	受力/运动指向	优化目标向量	战略发展方向
强度 I	荷载能力	预测置信度	决策执行能力

3 典型实例计算

实例 3.1. 桌腿单元 \mathcal{U}_1 与垫木单元 \mathcal{U}_2 。本案例为五维协同运算的演示性归一化案例：为简化计算、直观展示协同溢出效应，将桌腿与垫木的基础效能统一设为 $I = 1$ ；严格来说，垫木作为辅助支撑单元，其单独作用的基础效能远小于桌腿，实际应为 0.1 量级，本案例赋值仅为理论演示，非家具力学绝对物理量。

设边界匹配度 $\gamma_B = 1$ （完全重叠支撑）、结构匹配度 $\gamma_S = 0.9$ 、方向一致性 $\cos \theta = 1$ （受力方向完全竖直向上）、储备匹配度 $\gamma_R = 1$ 、强度匹配度 $\gamma_I = 1$ ，则

$$k = 1 \times 0.9 \times 1 \times 1 \times 1 = 0.9 \quad (1)$$

基础强度 $I_{base} = 1 + 1 = 2$ ，总稳定性强度

$$I_{total} = 2 \times (1 + 0.9) = 3.8 > 2 \quad (2)$$

移开垫木后 $\gamma_B = 0, k = 0$ ，总强度 = 2，退化为线性加法，完美验证协同溢出与退化特性。

实例 3.2. 单根筷子基础抗折强度 $I = 1$ 。

十根筷子独立分散时， $\gamma_B = 0, k = 0$ ，总抗折强度 = 10。

捆成一束后，边界完全重叠 $\gamma_B = 1$ ，结构相似 $\gamma_S = 1$ ，方向一致 $\cos \theta = 1$ ， $\gamma_R = 1, \gamma_I = 1, k = 1$ 。
总抗折强度

$$I_{total} = 10 \times (1 + 1) = 20 > 10 \quad (3)$$

物理数量始终为 10 根，效能实现协同溢出。

实例 3.3. 设两名战士个体战斗力均为 1。

- 陌生人组合： $\gamma_B = 0.3, \gamma_S = 0.4, \cos \theta = 0.9, \gamma_R = 1, \gamma_I = 1, k = 0.108$ ，总强度 = 2.216。
- 亲兄弟组合： $\gamma_B = 0.9, \gamma_S = 0.9, \cos \theta = 1, \gamma_R = 1, \gamma_I = 1, k = 0.81$ ，总强度 = 3.62。

实例 3.4 (医生与手术刀). 设医生个体基准效能 $I_{医生} = 1$ (诊断与操作能力)，手术刀个体基准效能 $I_{手术刀} = 1$ (切割锋利度与精度)。

五维匹配度赋值 (演示性归一化)：

- 边界重叠度 $\gamma_B = 1$ (医生与手术刀在手术区域的作用范围完全重叠)
- 结构匹配度 $\gamma_S = 0.95$ (医生的手部操作与手术刀刃口结构高度适配)
- 储备匹配度 $\gamma_R = 1$ (医生的技能储备与手术刀的物理储备互补)
- 方向一致性 $\cos \theta = 1$ (医生的施力方向与手术刀的切割方向一致)
- 强度匹配度 $\gamma_I = 1$ (医生的手部力量与手术刀的强度匹配)

计算协同系数：

$$k = 1 \times 0.95 \times 1 \times 1 \times 1 = 0.95$$

基础强度 $I_{base} = 1 + 1 = 2$ ，总强度

$$I_{total} = 2 \times (1 + 0.95) = 3.9$$

解读：医生与手术刀协同后效能接近翻倍。若手术刀损坏 ($\gamma_I = 0$) 或医生方向错误 ($\cos \theta = 0$)，则 $k = 0$ ，退化为线性叠加 $I_{total} = 2$ ，符合直觉。

实例 3.5. 正面强攻：方向冲突，协同失效，总强度小于线性和。

穿插迂回： $\gamma_B = 0.6, \gamma_S = 0.6, \gamma_R = 1, \cos \theta = 1, \gamma_I = 1, k = 0.36$ ，总强度 = 2.72 > 2。

实例 3.6. 两光子速度 c ，时空边界存在物理上限，协同系数 $k = 0$ ，总强度 = c ，传统加法 $c + c = 2c$ 被证伪。

4 协同系数的相对性

协同系数 k 并非存在体的绝对属性，而是依赖于观察者所选参照系 (尺度、意图、社会角色) 的相对量。同一个协同组合，在不同参照系下可以计算出不同的 k 值，这体现了五维数学的参照系依赖性。

4.1 功能参照系的差异

同一对存在体，因使用意图不同，其多维匹配度会发生显著变化。以医生与手术刀为例：

- **手术场景：**医生与手术刀的作用范围完全重叠 ($\gamma_B = 1$)，手部操作与刀刃结构高度适配 ($\gamma_S = 0.95$)，施力方向与切割方向一致 ($\cos \theta = 1$)，技能储备与物理储备互补 ($\gamma_R = 1$)，力量与强度匹配 ($\gamma_I = 1$)，得 $k = 0.95$ 。
- **切菜场景：**同一把手术刀被非专业人士用于切菜，边界重叠可能降低 ($\gamma_B = 0.8$)，结构匹配度因握持方式不当而下降 ($\gamma_S = 0.5$)，方向一致性差 ($\cos \theta = 0.7$)，储备匹配与强度匹配也相应降低，最终 k 远小于 0.95。

这表明，协同系数随使用意图（参照系）变化，不是工具自身的固定属性。

4.2 尺度参照系的差异

协同系数还依赖于观察的尺度。例如，A 单位员工甲与 B 单位员工乙：

- **微观尺度（各自单位内部）：**甲与乙分属不同组织，无直接业务往来，边界交集 $\gamma_B = 0$ ，故 $k = 0$ 。
- **宏观尺度（社会分工层面）：**甲与乙都是社会生产链条中的节点，通过市场机制间接协同。此时边界应重新定义为“社会角色边界”，结构为“产业链耦合”，方向为“国家发展目标”。在这些维度下， $\gamma_B, \gamma_S, \cos \theta$ 均大于 0， $k > 0$ 。

因此，协同系数是参照系选择的函数。在应用多维数学时，必须明确约定参照框架，否则 k 不可比较。这一性质与物理学中速度、能量的相对性类似，但多维数学将其明确纳入运算体系。

4.3 对多维数学的意义

协同系数的相对性要求：

1. 任何 k 的给出必须附带参照系说明（如“在手术意图下”或“在国家宏观层面”）。
2. 跨系统比较时，必须将参照系归一化到同一标准。
3. 递归多尺度分解正是通过逐层改变参照系来实现宏观协同的聚合。

这一性质不仅不是多维数学的缺陷，反而使其能够灵活适配不同层次、不同目的的系统分析，体现了框架的通用性与深刻性。

5 主观能动性与多维运算类型

5.1 主观能动性分层

基于系统主体是否具备自主意向、目标调整与策略选择能力，将系统划分为三个层级，对应不同的多维运算规则，构建从物理到社会的全谱系统一描述框架。

定义 5.1. 0 级系统（无主观能动性系统）：系统主体无自主意向、无目标设定、无反馈调节能力，完全被动地接受物理世界的客观规律约束，其行为与演化仅由边界、结构、储备、方向、强度等物理属性唯一决定。此类系统为多维数学体系的逻辑起点与物理基准，对应刚体、光子等无生命物理系统。

定义 5.2. 1 级系统（弱主观能动性系统）：以 0 级系统为物质基底，具备有限的生存目标与简单的自我反馈调节机制，但无高阶认知能力与复杂的策略博弈能力，其行为受本能与有限环境反馈驱动，对应低等生物、简单机器人等系统。

定义 5.3. 2 级系统（强主观能动性系统）：具备自我意识、自我反思与高阶认知能力，能够进行复杂的目标规划、策略博弈、价值判断与动态方向调整，是人类社会与智能代理系统的核心抽象。

5.2 三类五维运算

定义 5.4. I 型运算（被动-被动）：适用于 0 级系统。协同系数 k 由物理约束客观决定，无任何主体干预，完全遵循物理规律。

定义 5.5. II 型运算（被动-主动）：适用于人机混合/1 级系统。主体可主动调整方向与强度，优化五维匹配度，从而改变系统的协同状态，实现有限的主动调控。

定义 5.6. III 型运算（主动-主动）：适用于人类博弈/2 级系统。意向、策略、信任均内化于五维框架之中， k 由双方主体的五维状态共同决定，体现复杂博弈的协同本质。

5.3 强主观系统的储备修正

针对强主观系统，定义储备修正因子 $\eta \in [0, 1]$ 作为储备维度子指标，刻画主体的心理能量、决策可靠性与状态稳定性，有效储备 $R_{\text{eff}} = R_0 \cdot \eta$ ，间接影响协同系数 k ，该修正完全内化于五维框架，不引入外部参数。

6 熵增的五维重构

定义 6.1. 系统熵 H 为协同系数的递减函数：

$$H = H_0 - C \cdot \ln(1 + k) \quad (17)$$

其中 $C > 0$ 为常数。

熵增本质是协同系数 $k \rightarrow 0$ ，高维协同信息丢失，系统退化为线性无协同的散列状态，即：熵增不是无序，而是协同的丧失。

7 结论与展望

本文以五维存在论为基础，构建无自由参数的纯五维数学体系，实现线性与非线性、被动与主动、物理与博弈系统的统一建模。核心结论如下：

1. 五维是描述存在体的最小完备集，缺一不可，严格遵循五维依赖公理；
2. 协同系数采用乘法耦合，任一维度失效则协同消失，符合五维最小完备性；
3. 总强度由基础和与协同溢出共同决定，物理守恒与效能涌现统一，无外部可调参数；
4. 传统数学是无协同（ $k = 0$ ）状态的退化特例，完成了对传统数学的范式拓展；
5. **协同系数具有参照系相对性：**同一组合在不同功能意图或不同观察尺度下可呈现不同的 k 值，这一性质要求在实际应用中必须明确参照框架，也为多尺度递归聚合提供了理论基础；
6. 主观能动性分层体系实现了从物理到社会的全谱系统一解释，筑牢唯物主义哲学根基；
7. 熵增的本质是系统协同的丧失，重构了热力学第二定律的哲学内涵。

五维数学从存在论层面重构了系统运算的底层逻辑，为系统科学、一般系统论、博弈论、人工智能等领域提供了统一的形式化基础，理论原创性与应用价值显著。后续将进一步开展五维数学在复杂系统建模、人工智能协同优化、社会系统博弈分析等方向的实证研究。

参考文献

- [1] 赵桂儒. 五维存在论：物质、意识与特殊存在的统一 [Z/OL]. Zenodo, 2026. DOI: 10.5281/zenodo.19412615.

Five-Dimensional Mathematics: A New Mathematical Framework for Systems Science

——Synergistic Operations based on Five-Dimensional Ontology and Subjective Initiative

ZHAO Guiru

Beijing Earthquake Agency, Beijing 100080, China

Abstract Traditional mathematics is limited by the linear superposition paradigm, which makes it difficult to accurately characterize the nonlinear synergistic mechanism and holistic emergence of heterogeneous systems. Based on five-dimensional ontology, this paper constructs a new five-dimensional mathematical system, proves the five-dimensional minimal completeness theorem, and defines the synergy coefficient k with multiplicative coupling. The total intensity is $I_{base} \cdot (1 + k)$, which unifies physical conservation and system emergence. Traditional mathematics is proved to be a degenerate special case when $k = 0$. Furthermore, we reveal that the synergy coefficient exhibits reference-frame relativity: the same pair of entities may yield different k values under different functional intentions or observational scales. According to the differences in subjective initiative, this paper divides systems into three types (none, weak, strong) and matches the corresponding five-dimensional operation types, which reveals the essential reason why complex system problems such as entropy increase cannot be analyzed by traditional mathematics. This framework realizes the unified description of the whole spectrum of systems, and provides a new quantitative foundation for general system theory.

Keywords: five-dimensional mathematics; synergy coefficient; reference-frame relativity; entropy increase; subjective initiative; general systems theory