

Über die Darstellung der Zahlen als Summen von Biquadraten.

Von

ARTHUR WIEFERICH in Münster i/W.

Anknüpfend an die Abhandlung des Herrn E. Landau „Über die Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von Biquadraten“ in den „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo“, Bd. 23 (1907), p. 91—96 soll im vorliegenden nachgewiesen werden, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von 37 Biquadraten darstellen läßt.

Liouville*) hat zuerst bewiesen, daß sich eine jede Zahl additiv in 53 Biquadrate zerlegen läßt. Diese Zahl wurde von Realis**) auf 47, von Lucas***) auf 45, resp. 41 und von Herrn Fleck†) auf 39 reduziert. Herr E. Landau hat sodann in der oben zitierten Arbeit die Zerlegbarkeit in 38 Biquadrate nachgewiesen.

1.

Herr Landau hat für eine jede der 48 Restklassen modulo 48 die geringste Anzahl der zur Zerlegung hinreichenden Biquadrate angegeben. Bezeichnet B_i diese Zahl, so hat er gefunden, daß alle Restklassen mit Ausnahme von $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ sich als Summe von höchstens 37 Biquadraten darstellen lassen. Für jene drei Klassen ergab sich dagegen die Schranke 38. Er setzte diese nun folgendermaßen zusammen:

*) Siehe: Lebesgue, Exercices d'Analyse numérique, Paris 1859, p. 113—115.

**) Note sur un théorème d'Arithmétique (Nouvelle Correspondance Mathématique, Bd. 4, 1878, p. 209/210).

***) Sur la décomposition des nombres en bicarrés, ebenda p. 323—325 und Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés (Nouvelles Annales de Mathématiques, Ser. 2, Bd. 17, 1878, p. 536/537).

†) Über die Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und als Summen von Biquadraten ganzer Zahlen (Sitzungsberichte der Berliner math. Gesellschaft, 5. Jahrgang, 1906, p. 2—9).

$$\begin{aligned}
48n + 11 &= (48n + 9) + 1^4 + 1^4, \\
48n + 27 &= (48n + 25) + 1^4 + 1^4, \\
48n + 43 &= (48(n-1) + 9) + 1^4 + 3^4,
\end{aligned}$$

und erhielt so, da er $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{36} bestimmt hatte, eben die drei Klassen gleich B_{38} . Kann demnach gezeigt werden, daß sowohl $48n + 9$ wie $48n + 25$ gleich B_{35} ist, so wäre bewiesen, daß obige drei Klassen gleich B_{37} sind, d. h. daß eine jede Zahl in 37 Biquadrate zerlegbar ist.

2.

Es sei zunächst:

$$\begin{aligned}
24N_i &= 48n + 9 - (6\varepsilon_i + 3)^4 \\
&= 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 108\varepsilon_i^3 - 81\varepsilon_i^2 - 27\varepsilon_i - 3],
\end{aligned}$$

wo ε_i der Reihe nach gleich $0, 1, \dots, 7$ sein möge. Es ergeben sich dann leicht folgende Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
N_0 &\equiv 2n + 13, & N_1 &\equiv 2n + 15, & N_2 &\equiv 2n + 3, \\
N_3 &\equiv 2n + 9, & N_4 &\equiv 2n + 1, & N_5 &\equiv 2n + 11, \pmod{16} \\
N_6 &\equiv 2n + 7, & N_7 &\equiv 2n + 5,
\end{aligned}$$

aus denen sofort folgt, daß für eine der Zahlen ε_i N_i die Form $16n_1 + 13$ haben muß. Ich kann also stets $\varepsilon_i = 0, 1, \dots, 7$ so bestimmen, daß

$$48n + 9 = (6\varepsilon_i + 3)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

3.

Ebenso erhält man, falls man:

$$\begin{aligned}
24N_i &= 48n + 25 - (6\varepsilon_i + 1)^4 \\
&= 24[2n - 54\varepsilon_i^4 - 36\varepsilon_i^3 - 9\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i + 1]
\end{aligned}$$

setzt, die Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
N_0 &\equiv 2n + 1, & N_1 &\equiv 2n + 13, & N_{-1} &\equiv 2n + 7, \\
N_2 &\equiv 2n + 11, & N_{-2} &\equiv 2n + 15, & N_{-3} &\equiv 2n + 9, \pmod{16} \\
N_{-4} &\equiv 2n + 5, & N_{-5} &\equiv 2n + 3,
\end{aligned}$$

d. h. für eine der Zahlen $\varepsilon_i = 0, \pm 1, \pm 2, -3, -4, -5$ muß N_i die Form $16n_1 + 13$ annehmen. Ich kann demnach durch geeignete Wahl von ε_i bewirken, daß

$$48n + 25 = (6\varepsilon_i + 1)^4 + 24(16n_1 + 13)$$

wird.

4.

Wie leicht zu verifizieren, kann nun eine Zahl $16n_1 + 13$ nur auf folgende Weise als Summe dreier Quadrate dargestellt werden:

$$16n_1 + 13 = (4x)^2 + (8y \pm 2)^2 + (8z \pm 3)^2.$$

Es wird dann also:

$$24(16n_1 + 13) = 6(8x)^2 + 6 \cdot 2^4 \cdot (4y \pm 1)^2 + 24(8z \pm 3)^2.$$

Es ist nun, wie Herr Landau zeigte: $6 \cdot 2^4(4y \pm 1)^2 = B_{11}$. Ferner folgt aus der Identität:

$$24(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^2 = 2(z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(-z_1 + z_2 + z_3)^4 + 2(z_1 - z_2 + z_3)^4 \\ + 2(z_1 + z_2 - z_3)^4 + (2z_1)^4 + (2z_2)^4 + (2z_3)^4,$$

daß auch:

$$24(8z \pm 3)^2 = B_{11}$$

ist. Da bekanntlich allgemein: $6m^2 = B_{12}$ ist, so ergibt sich:

$$24(16n_1 + 13) = B_{34}.$$

5.

Es ist also jede der Formen $48n + 9$ und $48n + 25$ gleich B_{35} und demnach eine jede Zahl der Restklassen $48n + 11$, $48n + 27$, $48n + 43$ als Summe von 37 Biquadraten darstellbar, falls diese Zahl $> 45^4$ ist, da 45^4 das größte von $48n + 9$ abzusondernde Biquadrat ist. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß auch jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{37} ist. Subtrahiert man nämlich von einer Zahl $< 45^4$ das größte sie nicht übertreffende Biquadrat, so findet man, daß die Differenz $< 45^4 - 44^4 = 352529$ ist; ferner, daß ihr Überschuß über das größte sie nicht übertreffende Biquadrat $< 24^4 - 23^4 = 51935$ ist. Da nun, wie schon Herr Landau zeigte, jede Zahl $< 21^4$ gleich B_{26} ist, so ergibt sich leicht, daß jede Zahl $< 45^4$ gleich B_{28} , d. h. sicher gleich B_{37} wird. Hiermit ist also allgemein bewiesen, daß alle Zahlen sich als Summen von 37 Biquadraten darstellen lassen. Sehr viel weitergehende Reduzierungen dürften sich jedoch aus den bisher benutzten Identitäten kaum mehr ergeben.

Münster i./W., Mai 1908.