

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o 2452.

Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen.

Von Prof. H. Gylden.

In dem Aufsätze »Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper« (A. N. Nr. 2383) wurde der Begriff der intermediären Bahn in sofern festgestellt, dass in derselben die mittlere Bewegung der Apsiden, die man früher als eine Störung angesehen hat, bereits ihre Berücksichtigung finden sollte. Die analytischen Ausdrücke der intermediären Coordinaten wurden in dem besagten Aufsätze mit besonderer Berücksichtigung desjenigen Falles gegeben, wo der störende Körper immer verhältnissmässig viel entfernter vom Centralkörper als der gestörte anzunehmen war; die Excentricität der Bahn des zuletzt genannten Körpers durfte dabei beliebig gross angenommen werden. Einen derartigen Fall habe ich später, bei Gelegenheit der Mittheilung einiger Rechnungen über den d'Angos'schen Cometen, etwas ausführlicher behandelt.

Zur Darstellung der Coordinaten der Planeten ist diese Ausdrucksweise im Allgemeinen jedoch nicht die geeignetste, da man bei geringen Excentricitäten, durch Entwicklung gewisser Functionen nach den steigenden Potenzen derselben, eine wesentliche Vereinfachung herbeiführen kann. Die für solche Fälle geeignetste Form der intermediären Coordinaten habe ich in einem Vortrage bei Gelegenheit der Strassburger Astronomen-Versammlung mitgetheilt. Der Radiusvector, ausgedrückt als Function der intermediären Länge, wird zwar als ein Aggregat elliptischer Functionen dieses Arguments gefunden; lässt man aber für's Erste alle die Glieder weg, deren Coefficienten mit der störenden Masse multiplicirt sind, so gewinnt man Ausdrücke, welche mit den für die elliptische Bewegung geltenden grosse Aehnlichkeit zeigen. Es wird nämlich:

$$\frac{r_0}{a_0} = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta \cos[(1 - \zeta)v_0 - \pi]}$$

$$d\tau = \frac{a_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_1(1 + \kappa_0)}} \frac{(1 - \eta^2)^{3/2} dv_0}{[1 + \eta \cos[(1 - \zeta)v_0 - \pi]]^2},$$

wo κ_0 eine constante Grösse, von der Ordnung der störenden Kräfte, bezeichnet und die Bedeutung der übrigen Grössen leicht erkennbar ist.

Von diesem Ausgangspunkte aus sollte nun die Untersuchung weiter geführt werden, indem die Störungsfunction durch die Veränderliche v_0 ausgedrückt wurde. In Folge dieser Operation fand sich ein Resultat, welches von durchgreifender Bedeutung für die Behandlung des Problems der drei Körper sein dürfte. Es ergaben sich nämlich Glieder, welche bei der Integration der Störungsausdrücke die stö-

rende Masse als Factor verloren und die daher von derselben Grössenordnung wurden, wie die veränderlichen Glieder in den Ausdrücken für den intermediären Radiusvector und für die reducirte Zeit. Es lag nun nahe zu versuchen, alle diese Glieder, welche elementäre Glieder genannt werden sollen, zu vereinigen, und in solcher Weise wurde der Begriff einer absoluten Bahn festgestellt. Die Elemente dieser Bahn sind Integrationsconstanten, die in keiner Weise Säcularstörungen unterworfen sind. Zwar könnte man, durch entsprechende Aenderungen dieser Elemente, die Störungen, welche nun wirklich immer von der Ordnung der störenden Kräfte sind, berücksichtigen, aber ein solches Verfahren liegt keineswegs in der Natur der Sache begründet, da die Elemente, ihrer Bedeutung nach, absolut unveränderlich sind; in der Folge werde ich sie daher absolute Elemente nennen.

In Bezug auf die Coordinaten in der absoluten Bahn hat die Untersuchung nun Folgendes ergeben.

1. Die elementären Glieder haben zwei verschiedene Formen, nämlich entweder die Form:

$$(A) \quad a_i \frac{\sin}{\cos} [\sigma_i v_0 + A_i]$$

oder die Form

$$(B) \quad b_i \frac{\sin}{\cos} [(1 - \sigma_i) v_0 + B_i].$$

Hier bedeuten die a_i , b_i , A_i und B_i von den absoluten Elementen abhängige Constanten, von denen die Coefficienten a_i und b_i die störende Masse nicht als Factor enthalten; die Grössen σ_i sind aber mit dieser Masse multiplicirt und daher von derselben Ordnung wie ζ . Selbstverständlich lassen sich mit diesen Gliedern solche vereinigen, welche zwar in Bezug auf die Argumente dieselbe Form haben, deren Coefficienten aber mit der störenden Masse, oder mit Potenzen derselben multiplicirt sind.

2. Der Ausdruck für den Radiusvector in der absoluten Bahn, ebenso wie der für das Differential der reducirten Zeit, lassen sich auf dieselben Formen zurückführen, wie die entsprechenden Ausdrücke in der intermediären Bahn. Es sei:

- μ das Verhältniss der mittleren Bewegung des störenden Planeten zu der des gestörten;
- ζ' das Verhältniss der mittleren Bewegung der Apsiden des störenden Planeten zu seiner eigenen mittleren Bewegung;

Γ, Γ' die Längen der absoluten Perihelien der beiden Planeten zu einer gegebenen Zeitepoche;
ausserdem sei:

$$\begin{aligned} v_0 &= (1-\zeta) v_0 - \Gamma \\ v_1 &= (\zeta - \mu \zeta') v_0 + \Gamma - \Gamma'; \end{aligned}$$

es mögen ferner (A) und Y zwei Functionen bezeichnen, deren Glieder zwar die Form der elementären Glieder haben, die störende Masse jedoch als Factor enthalten. Setzt man nun:

$$\begin{aligned} (a) &= a_0 [1 + (A)] \\ (n) &= \sqrt{\mu_1} (a)^{-3/2} \end{aligned}$$

so lässt sich die nachstehende Gleichung aufstellen:

$$(n)(1+Y) dt = \frac{(1-\eta^2)^{3/2} dv_0}{[1+\eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi)]^2};$$

und bezeichnet man den Radiusvector in der absoluten Bahn durch (r) , so ist:

$$(r) = \frac{(a)(1-\eta^2)}{1+\eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi)}$$

Die Grössen η und π sind aber nicht mehr, wie in der intermediären Bahn, Constanten, sondern Functionen der veränderlichen Grösse v_1 sowie auch von andern Veränderlichen derselben Natur. Die ersten Glieder dieser Functionen erkennt man aus den nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta \cos(\Gamma - \pi) &= \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 + \delta_2) \cos v_1 + \delta_4 \cos 2v_1 + \dots}{1 + \alpha_3 \cos v_1 + \dots} \\ \eta \sin(\Gamma - \pi) &= \frac{(\alpha_2 - \delta_2) \sin v_1 - \delta_4 \sin 2v_1 + \dots}{1 + \alpha_3 \cos v_1 + \dots} \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken bedeutet α_1 eine Integrationsconstante, also ein absolutes Element; α_2 einen Coefficienten, dessen grösster Theil von einem entsprechenden Element der Bahn des störenden Planeten abhängt, welcher Coefficient aber nicht etwa die störende Masse als Factor enthält. Der Coefficient α_3 ist nahezu gleich dem Producte $2\alpha_1 \alpha_2$, und die Coefficienten δ_2 und δ_4 sind dritter Ordnung in Bezug auf α_1 und α_2 , enthalten aber ebensowenig, wie die nicht angesetzten Glieder, die störende Masse als Factor.

Aber die Functionen η und π haben auch nicht die Bedeutung elliptischer Elemente, denn hierzu wäre nöthig, dass die Gleichung

$$\frac{d(r)}{dv_0} = \frac{(a)(1-\eta^2)}{[1+\eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi)]^2} \eta \sin(v_0 + \Gamma - \pi)$$

stattfände, was aber nicht der Fall ist. Eine Keppler'sche Ellipse, deren Excentricität η und deren Perihellänge $\pi + \zeta v_0$ ist, schneidet im Allgemeinen die absolute Bahn, wenngleich der Winkel eine kleine Grösse, von der Ordnung der störenden Kräfte multiplicirt mit der Excentricität, ist.

In dem soeben Angeführten liegt der wesentlichste Unterschied zwischen der neuen Theorie der Bewegung der Himmelskörper und der älteren. Die Methode der Variation der Constanten, angewendet auf die elliptischen Elemente, musste aufgegeben werden, um beständig convergirende Entwicklungen zu erhalten. Dass aber diese Methode in solcher Weise hier überhaupt nicht zweckmässig ist, erkennt man schon aus dem Umstande, dass die Differentialgleichung, durch deren Integration die Grösse

$$(\rho) = \eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi)$$

gefunden wird, unter andern die Glieder

$$\frac{d^2(\rho)}{dv_0^2} + (\rho) = \beta_1(\rho) + \beta_3(\rho)^3$$

enthält. Denn behält man die obige Form für (ρ) bei, so wird man zwar gleichzeitig setzen können

$$\frac{d(\rho)}{dv_0} = -\eta \sin(v_0 + \Gamma - \pi),$$

allein die Differentialgleichung, durch deren Integration die Functionen $\eta \cos(\Gamma - \pi)$ und $\eta \sin(\Gamma - \pi)$ bestimmt werden, führen nun zu Gliedern, bei denen das Argument v_0 ausserhalb der sin- und cos-Zeichen vorkommt. Durch zweckmässige Kunstgriffe könnten nun allerdings solche Glieder vermieden oder weggeschafft werden; derartige Transformationen haben indessen doch nur dann wissenschaftlichen Werth, wenn eine Untersuchung über die Convergenz der betreffenden Annäherungen nebenbei geführt wird, eine Untersuchung, die nicht ohne Schwierigkeit ist. — Wenn man aber vollends die Form des Integrales der angeführten Gleichung kennt, so wird man schwerlich auf die Idee verfallen, dasselbe in einer Weise darzustellen, wie es die Variation der Constanten erheischte.*) Diese Methode ist demnach weder direct zum Ziele führend, noch in der Natur der Aufgabe begründet, und zwar einfach deshalb nicht, weil die betreffende Differentialgleichung nicht linear ist. Zu einer Zeit, wo man die dritte Potenz der Excentricität vernachlässigen zu können meinte, und wo man die durch die störenden Kräfte hervorgebrachten Aenderungen überhaupt als kleine Grössen ansah, hatte diese Methode ihre volle Berechtigung. Heut zu Tage aber, wo man zu der Erkenntniss gelangt ist, dass diese Aenderungen von der Ordnung der Excentricitäten sind, liegt keine Veranlassung mehr vor, an der besagten Form festzuhalten.

Es wird aber immerhin von Interesse sein, die Relationen zu kennen, welche zwischen den Functionen η und π einerseits und den elliptischen Elementen andererseits bestehen. Man findet diese Relationen sehr leicht.

Durch Differentiation der Gleichung

$$(\rho) = \eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi)$$

erlangt man ein Resultat von der Form

*) Dass man die elliptischen Functionen durch eine solche Form immerhin darstellen kann, ist nicht schwer einzusehen. Man braucht z. B. nur die Functionen e und π aus den Gleichungen

$$x \sin x = e \sin(x - \pi) \quad x \cos x \, dx = e \cos(x - \pi),$$

wo x eine beliebige Constante bezeichnet, zu bestimmen, um die verlangte Form zu erhalten. Man findet:

$$\begin{aligned} e &= x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x \, \text{cn}^2 x} \\ \pi &= x - \arctan \left(\frac{\text{tang am } x}{\text{dn } x} \right). \end{aligned}$$

$$\frac{d(\rho)}{dv_0} = -\eta \sin(v_0 + \Gamma - \pi) - \lambda,$$

wo λ eine Function bedeutet, die mit ς oder mit Grössen derselben Ordnung multiplicirt ist. Setzt man nun:

$$\begin{aligned}\eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi) &= e \cos(v_0 + \Gamma - \pi_1) \\ \lambda + \eta \sin(v_0 + \Gamma - \pi) &= e \sin(v_0 + \Gamma - \pi_1),\end{aligned}$$

so sind e und $\pi_1 + \varsigma v_0$ elliptische Elemente.

Die angeführten Gleichungen geben uns:

$$\begin{aligned}e \cos(\Gamma - \pi_1) &= \eta \cos(\Gamma - \pi) + \lambda \sin v_0 \\ e \sin(\Gamma - \pi_1) &= \eta \sin(\Gamma - \pi) + \lambda \cos v_0,\end{aligned}$$

woraus leicht gefolgert wird

$$e^2 = \eta^2 + 2\eta\lambda \sin(v_0 + \Gamma - \pi) + \lambda^2$$

Setzt man ferner

$$(a_1) = (a) \left[1 + \frac{2e\lambda \sin(v_0 + \Gamma - \pi_1) - \lambda^2}{1 - e^2} \right]$$

so wird:

$$(r) = \frac{(a_1)(1 - e^2)}{1 + e \cos(v_0 + \Gamma - \pi_1)};$$

und endlich findet sich

$$(n_1)(1 + Y) d\tau = \frac{(1 - e^2)^{3/2} dv_0}{[1 + e \cos(v_0 + \Gamma - \pi_1)]^2}$$

wenn man setzt

$$(n_1) = V_{\mu_1} (a_1)^{-3/2}$$

Hierdurch ist der Radiusvector in der absoluten Bahn, ebenso wie das Differential der reducirten Zeit durch die elliptischen Elemente ausgedrückt.

Die Functionen $e \cos(\Gamma - \pi_1)$ und $e \sin(\Gamma - \pi_1)$ sind indessen nicht so einfach wie die entsprechenden $\eta \cos(\Gamma - \pi)$ und $\eta \sin(\Gamma - \pi)$; während nämlich die letzteren nur Glieder langer Perioden enthalten, finden sich in den ersteren auch Glieder von kurzer Periode und diese würden in dem Integrale:

$$\int \frac{(1 - e^2)^{3/2} dv_0}{[1 + e \cos(v_0 + \Gamma - \pi_1)]^2}$$

nicht nur elementäre Glieder veranlassen, sondern sogar ein Glied, welches dem Argumente v_0 proportional wüchse. Es hat sich demnach ergeben, dass die Functionen, welche elliptische Elemente repräsentiren, nicht nur schwer direct zu ermitteln sind, sondern auch für den späteren Gebrauch eine wenig zweckentsprechende Form haben; finden sich also nicht noch Eigenschaften dieser Functionen, welche zu Gunsten ihrer Beibehaltung in der Theorie des Problems der drei Körper sprechen, so wird ihre Rolle bei den tiefer

gehenden Untersuchungen über die Bewegung der Planeten so ziemlich ausgespielt sein.

Es wurde oben gesagt, dass die Functionen Y und (A) mit der störenden Masse verschwinden; man kann in der That auch nachweisen, dass, wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{(r)} &= \frac{1 + (\rho)}{(\rho)}; \\ (\rho) &= \eta \cos(v_0 + \Gamma - \pi);\end{aligned}$$

und wenn alle Glieder, welche die störende Masse als Factor enthalten, vernachlässigt werden, die Gleichung

$$(\rho) = 1 - \eta^2$$

besteht; man kann ferner für Y eine algebraische Relation von der Form

$$Y = -\frac{1}{2} \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} (A) + \dots$$

herleiten, wo die hier nicht angesetzten Glieder beweislich von der Ordnung der störenden Kräfte und überdies rein periodisch sind. Aus diesen beiden Sätzen geht sofort hervor, dass sowohl (A) als auch Y mit der störenden Masse verschwinden müssen.

Die Function (ρ) suche ich übrigens nicht direct, sondern zunächst eine andere, r , welche mit der erstgenannten durch die Relation

$$[1 + (\rho)] (1 + Y)^2 = 1 + r$$

verbunden ist. Durch successive Integration von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r}{dv_0^2} + r &= \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \dots \\ &+ [A] + [B]\end{aligned}$$

wird die Grösse r bestimmt, und es bedeuten in der angesetzten Gleichung β_0, β_1, \dots kleine constante Grössen, die mit der störenden Masse multiplicirt sind, $[A]$ eine Summe von Gliedern der Form (A) und $[B]$ eine Summe von Gliedern der Form (B) , welche aber alle die störende Masse als Factor enthalten. — Die Behandlung der obigen Gleichung geschieht nun am einfachsten, indem sie auf eine Reihe von sogenannten Lamé'schen Gleichungen zurückgeführt wird; denn mit Hülfe der bekannten Formen der Integrale dieser Gleichungen und der von Hermite gegebenen Formeln für die Differentiation elliptischer Functionen in Bezug auf den Modul lassen sich die unmittelbar auftretenden Glieder, welche das Argument als Factor erhalten, zum Verschwinden bringen. Und eine solche Elimination derartiger Glieder lässt sich, so weit ich übersehen kann, immer bewerkstelligen, wie weit man auch die eigentlichen Störungsglieder beliebig hoher Ordnung berücksichtigt, indem man nämlich die entsprechenden Aenderungen sowohl der Coefficienten β_0, β_1, \dots als auch der Coefficienten in den Summen $[A]$ und $[B]$ anbringt. Auf diesem Wege gelangt man zu der Einsicht,

dass die Function r ausser einer Constante lauter rein periodische Glieder enthält. Ich setze nun

$$r = (L) + (K),$$

indem (L) die Summe der Constante und der Glieder der Form (A) , (K) wiederum die Summe der Glieder der Form (B) bezeichnet, und die Glieder anderer Formen, die jedenfalls von der Ordnung der störenden Kräfte sind, als mit den eigentlichen Störungsgliedern vereinigt gedacht werden.

Der angeführte Werth von r giebt uns nun:

$$1 + (\varphi) = \frac{1 + (L) + (K)}{(1 + Y)^2}$$

und hieraus findet sich, wenn (φ) nur Glieder der Form (B) enthalten soll, die nachstehende Bedingungsgleichung

$$1 = \frac{1 + (L)}{(1 + Y)^2},$$

woraus folgt:

$$1 + Y = \sqrt{1 + (L)}$$

oder:

$$Y = \frac{1}{2} (L) - \frac{1}{8} (L)^2 + \dots$$

Es ist zu bemerken, dass bloss die Glieder der Form (B) in der Function r einen elementären Character annehmen; die Function (L) bleibt demnach nach der Integration von der Ordnung der störenden Kräfte, und dieses ist, der angeführten Beziehung zufolge, auch der Fall mit Y . — Nachdem die Function Y in solcher Weise bestimmt worden ist, findet sich (φ) aus der Gleichung

$$(\varphi) = \frac{(K)}{(1 + Y)^2}$$

Unser Ergebniss ist nun dies, dass weder in (φ) noch in Y oder in (A) Glieder vorkommen, welche proportional der Zeit wachsen, oder die Zeit ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthalten; dies Resultat ist aber nicht etwa als eine directe Erweiterung unserer Erkenntniss zu betrachten, sondern zeigt nur an, dass die Hypothese, von der wir ausgegangen sind, widerspruchsfrei ist. Wir haben nämlich vorausgesetzt, dass die Entwicklung der Störungsfuction nach den steigenden Potenzen der Grösse (φ) geschehen könne; hätte es sich nun erwiesen, dass (φ) mit der Zeit über alle Grenzen hinaus wachsen müsse, so wäre die Voraussetzung offenbar eine unrichtige gewesen und hätte höchstens Gültigkeit während einer begrenzten Zeit. Die Frage nach der Stabilität eines Systems von drei Körpern wird überhaupt nicht immer richtig gestellt. Man darf nämlich nicht von der Lösung des Problems der drei Körper erwarten, dass sie diese Frage entscheidet, denn sie giebt nur an, ob ein solches System stabil sein kann, nicht, ob es wirklich stabil ist. Wir müssen daher die Frage in der folgenden Weise formuliren: ist es möglich, dass in einem Systeme von drei Körpern die Constanten des Problems solche Werthe haben, dass die Stabilität des Systems während

unbegrenzter Zeiten bestehen bleibt? Auf einem indirecten Wege haben wir durch die vorhergehenden Betrachtungen gefunden, dass das Bestehen der Stabilität in der That nicht unmöglich ist. In Bezug auf das Sonnensystem werden wir aber dieses Ergebniss etwas positiver aussprechen können. Wir wissen nämlich durch Erfahrung, dass die vorgenommenen Entwicklungen während langer Zeiträume factisch convergent sind. Die Annahme der Convergenz während einer begrenzten Zeit ist demnach hier keine Hypothese sondern ist assertorisch gewiss. Da nun aber diese Voraussetzung, auch wenn man ihre Consequenzen über unbegrenzte Zeiten ausdehnt, niemals zu einem Punkt führt, wo die Convergenz aufhörte, so muss man schliessen, dass die Stabilität immer stattfindet. Denn beständige Stabilität ist in diesem Falle gleichbedeutend mit beständiger Convergenz bei der Entwicklung der Störungsfuction.

Man würde mich sehr missverstehen, wenn man der Meinung wäre, ich habe im Vorhergehenden die Ansicht vertreten, dass die bekannten Störungsformeln, wie sie z. B. Lagrange gegeben hat, nicht exact wären; über die Richtigkeit dieser kann kein Zweifel obwalten. Mit der Anwendung der betreffenden Formeln ist es aber eine andere Sache, und in der That meine ich, dass die Resultate, welche man bis jetzt mit Hülfe derselben erlangt hat, oder, ohne besondere Kunstgriffe zu Hülfe zu nehmen, erlangen kann, nicht den heutigen Anforderungen der Wissenschaft entsprechen. Denn man kann sehr wohl, wie Prof. Weierstrass in seinen Vorlesungen über das Problem der Störungen bemerkt, eine Gleichung der Form

$$a_1 = \int f(a_1, a_2, \dots, t) dt$$

aufstellen, aber es ist, deshalb nicht gesagt, dass man einem richtigen Resultate entgegengeführt wird, wenn man in erster Annäherung constante Werthe der Functionen a_1, a_2, \dots unter dem Integralzeichen substituirt; und eine wirkliche Annäherung erhält man auf diesem Wege in der That auch nicht. Die Ausführung der bezeichneten Operationen wird immer mit der Zeit wachsende Glieder zum Vorschein bringen, eine Erscheinung, welche der Natur des Problems zuwider ist.

Die Nothwendigkeit der neuen Formen für die Ausdrücke, welche die Lösung des Störungsproblems angeben, wird man übrigens auch daraus erkennen, dass man die elliptischen Elemente nebst ihren Säcularstörungen, wie sie Laplace und Lagrange durch periodische Glieder ausgedrückt haben, in die Störungsfuction einführt. Aber einen derartigen Versuch hat man eigentlich nie gemacht und Le Verrier, dem die Nothwendigkeit dieses Schrittes wohl vorgeschwebt haben mochte, glaubte die damit verbundenen Schwierigkeiten umgehen zu können, indem er die Aenderungen der Elemente durch mechanische Quadratur bestimmte, und die Störungen mit verschiedenen, für weit von einander gelegene Epochen geltenden Elementen berechnete.

Dass Le Verrier's grossartige Bemühungen, die gestellte Aufgabe zu bewältigen, nicht zu einem völlig genügenden Resultate führten, scheint ausserdem auf einem anderen Umstande zu beruhen, den ich hier noch kurz hervorheben möchte. Das Element α'_1 der Bahn des störenden Planeten

tritt in dem Ausdrucke von x_2 mit einem Factor multiplicirt auf, der jedenfalls nicht ein kleiner Bruch ist. Es leuchtet daher ein, dass man aus den Beobachtungen eines Planeten — wenn er von einem andern gestört wird und wenn die Beobachtungen nur eine mässige Anzahl von Umläufen umfassen, nicht die Elemente selbst bestimmen kann, sondern bloss gewisse Combinationen der Elemente beider Planeten. Um die Elemente selbst aus solchen Combinationen auszusondern, müssen auch die Beobachtungen des störenden Planeten hinzugezogen werden. Man kann also nicht die Elemente der Jupitersbahn aus den Beobachtungen dieses Körpers allein, nicht die Elemente der Saturnsbahn aus den Saturnsbeobachtungen allein bestimmen, sondern es ist erforderlich, die Elemente beider Bahnen aus der Gesamtheit des, sich auf diese beiden Körper beziehenden Beobachtungsmaterials gleichzeitig zu bestimmen. — Anders würde man der Aufgabe gegenüber stehen können, wenn die Beobachtungen sich auf einen sieben- bis achthundert Mal grösseren Zeitraum erstreckten, als es jetzt der Fall ist. Wären die Beobachtungen auf einen Zeitraum von etwa

100 000 Jahren vertheilt — sie brauchten desshalb im Ganzen nicht zahlreicher zu sein, als die gegenwärtig vorhandenen sind — so könnte man aus den Beobachtungen des einen Planeten nicht nur die Elemente seiner eigenen Bahn bestimmen, sondern müsste gleichzeitig auch die Elemente x_1' und I' der Bahn des störenden Körpers finden. — Nun kann man freilich, statt der wirklichen Integrationsconstanten diejenigen Combinationen derselben als Unbekannte ansehen, welche die Werthe der elliptischen Elemente zu einer bestimmten Zeitepoche haben, aber selbstverständlich muss in diesem Falle die Abhängigkeit dieser Combinationen von den Integrationsconstanten ermittelt sein. Kümmt man sich jedoch nicht um diese Abhängigkeit, sondern sieht die elliptischen Elemente als Integrationsconstanten an, so hat man kleine Fehler in den Bedingungs- gleichungen zu befürchten, die aber mit der Zeit wachsen. Es erscheint kaum möglich, dass Vernachlässigungen dieser Art auf die bisherigen Bestimmungen der Elemente der Planetenbahnen ohne Einfluss geblieben sind.

Einleitende Untersuchung über den Gang der neuen Normaluhr Hohwü 34 der Sternwarte zu Upsala.

Ogleich eine umfassendere Beobachtungsreihe mit dieser Pendeluhr, welche erst im vergangenen Sommer hier aufgestellt wurde, noch nicht vorhanden sein kann, die bisherige kurze Erfahrung aber schon sehr vortheilhaft für diese neue Leistung unseres berühmten Künstlers zeugt, erlaube ich mir hiermit, Ihnen schon jetzt einen vorläufigen Bericht über diese Uhr mitzuthemen.

Da ein Instrument für genauere Zeitbestimmung bis zur letzten Zeit hier fehlte, hätte ich jedenfalls das Studium der neuen Uhr nicht mit Vortheil unmittelbar vornehmen können, wenn ich nicht gleichzeitig ein feines Durchgangsinstrument ($3\frac{1}{2}$ Zoll Oeffn.) von Repsold erhalten hätte, und ein Registrirapparat kurz vorher angeschafft worden wäre. Ich habe selbst die Untersuchung der neuen Apparate übernommen; da hier aber alle Stücke des Systems — vom Instrumenten-Pfeiler an — neu waren, und die noch unbekannten Eigenthümlichkeiten der Instrumente auf einmal und oft combinirt auftraten, so ist es begreiflich, dass bei dem Studium der Uhr oft störende Schwierigkeiten auftraten, welche hinsichtlich des Durchgangsinstruments noch nicht ganz beseitigt sind, von welchen ich aber erst bei einer anderen Gelegenheit berichten werde. Der Registrirapparat, welcher in einem vom Instrumente entfernten Zimmer aufgestellt, und also mit solchen Vorrichtungen versehen ist, dass man vom Instrumente aus denselben in Bewegung setzen oder arretiren und seine Arbeit kontrolliren kann, verursachte auch im Anfange viele Störungen, bis kleine noch vorhandene Unvollkommenheiten entdeckt und beseitigt wurden.

Die Uhr, welche mit Dampfschiff von Amsterdam nach Stockholm befördert wurde, kam den 22. Juli des vorigen Jahres in Upsala an, wo ein vorläufiges Oeffnen der Kisten zeigte, dass Alles in guter Ordnung und unbeschädigt war. Die Uhr blieb dann in den Kisten bis zum 15. August, da

in Folge noch rückständiger Arbeiten an der Uhr-Nische die Uhr erst diesen Tag aufgestellt werden konnte. Die Uebernahme und Aufstellung der Uhr wurde mit aller wünschenswerthen Sorgfalt und Umsicht von meinem geschickten Uhrmacher Herrn Schweder aus Stockholm besorgt.

Es war ursprünglich beabsichtigt die Uhr so anzubringen, dass die Temperatur derselben im Laufe des Jahres nahe constant verbleiben sollte und ich war im Voraus so sicher, damit zu Stande zu kommen, dass ich glaubte, Herrn Hohwü ziemlich unbedingt solche Anordnungen versprechen zu können. Unerwartete Schwierigkeiten begegneten mir aber bei der Ausführung und kleine hier kaum angebbare Verhältnisse, hauptsächlich öconomischer Natur, haben leider vor der Hand meine guten Absichten ganz vereitelt; auch die Möglichkeit, die Uhr in einem gewöhnlichen warmen Zimmer aufzuhängen, war dadurch abgeschnitten, dass das meteorologische Institut, welches von der Sternwarte noch nicht ganz abgesondert ist, gerade über die Zimmer disponirt, welche allein für den Zweck geeignet gewesen wären. Die factische, hoffentlich aber nur vorläufige Anbringung der Uhr hat indessen in ihrer Einfachheit und gerade auch aus diesem Gesichtspunkte nicht zu unterschätzende Vortheile. Einerseits ist die Uhr keinen heftigen Temperaturvariationen ausgesetzt und andererseits kann dieselbe, im Meridianzimmer aufgehängt und gut geschützt, bequem auf einmal sowohl als Beobachtungs- wie als Normaluhr dienen. Die fragliche Anordnung, durch die grosse Festigkeit der Mauern der Sternwarte bedingt, besteht ganz einfach darin, dass die Uhr in einer für diesen Zweck in der inneren Wand des Meridianzimmers angebrachten Nische aufgehängt wurde. Die Wand hat eine Dicke von mehr als 100 cm; die innere Fläche der Nische ist mit einem doppelten Ueberzug von Zink und von Filz versehen; die Vorderseite ist durch