6.

Resultate der Auflösung von drei geometrischen Aufgaben; für Liebhaber des algebraischen Calculs.

(Von Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

---

1. Aufgabe. Im Coordinatenraume XOY ist ein Punct B durch seine Coordinaten $OA = a$ auf OX und $AB = b$, parallel mit OY, gegeben: die Lage der Geraden durch B zu bestimmen, welche zwischen ihren Durchschnittspuncten D, E mit den Richtungen der Achsen OX, OY die bestimmte Länge $DE = c$ haben.

Wird AD durch x ausgedrückt, so wird für $x = \sqrt[3]{(ab^2)}$, $DE = \left[a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = h$ ein Minimum für c im ersten rechtwinkligen Coordinatenraum XOY, und für diesen Werth h von c finden sich noch zwei Werthe von x, nämlich

$$x = -a - \sqrt[3]{(ab^2)} \pm \sqrt{(a^2 + (abh)^{\frac{2}{3}})},$$

für welche beide $c = h$ in den anliegenden Coordinatenräumen liegt. Die Aufgabe liefert also drei Resultate, wenn $c = h$ ist.

Für alle übrigen Werthe von c, kleiner oder gröfser als h, bestimmen sich die Werthe für x aus der Formel

$$x = \tfrac{1}{2}\left[-a - \alpha \pm \sqrt{\left(3(a^2 - 2d^2) - \alpha^2 + \frac{2a(b^2 + c^2)}{\alpha}\right)}\right],$$

wenn $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ durch d^2, abc durch p^3, $p^3 + \sqrt{(p^6 + d^6)}$ durch P^3 ausgedrückt und, erstlich, wenn $c < h$ ist,

$$\alpha = + \sqrt{\left(a^2 - 2d^2 + P^2 + \frac{d^4}{P^2}\right)}$$

genommen wird, so dafs in allen diesen Fällen jedesmal nur zwei Resultate entstehen, für welche c in die beiden anliegenden Coordinatenräume fällt. Ist aber, zweitens, $c > h$, so ist

$$\alpha = \pm \sqrt{(a^2 - 4d^2 . \cos^2 \tfrac{1}{6}(2n\pi + \varphi))}$$

zu nehmen, wenn $n = -1$ oder $= 0$, oder $= +1$ gesetzt und unter φ der Winkel verstanden wird, für welchen

$$\cos\varphi = -\frac{2p^6 + d^6}{d^6}$$

ist, so dafs in allen diesen Fällen jedesmal vier Lagen für c eintreten: zwei im ersten Coordinatenraum, und in jedem der beiden anliegenden Coordinatenräume eine.

2. Aufgabe. In einem gegebenen Dreieck die Lage des Punctes A zu bestimmen, für welchen die drei Normalen aus A auf die drei Seiten das Dreieck in drei gleiche Theile theilen.

Bezeichnen α, β, γ die drei Winkel des Dreiecks; wird die α gegenüberliegende Seite zur Längen-Einheit genommen, die Winkelspitze zu β zum Anfangspunct O der Coordinaten; bezeichnen x, y die Coordinaten des gesuchten Punctes A; wird $\beta-\gamma$ durch δ, $2+\cos^2\beta$ durch a, $2+\cos^2\gamma$ durch b ausgedrückt und dann w aus der Gleichung

$$w^3-3[ab-(2+\cos^2\alpha)\sin^2\delta]\,w+(a+b)[ab-2\sin^2\alpha\sin^2\delta+9\sin^2\delta]-81\sin^2\delta=0,$$

ferner P aus der Gleichung $P^2\sin^2\alpha=\frac{1}{9}(w+a+b)$; dann B und C aus den Formeln

$$B=\tfrac{1}{2}\left[P^2-\frac{a+b}{6\sin^2\alpha}+\frac{\sin\delta}{3P\sin^3\alpha}\right],\quad C=\tfrac{1}{2}\left[P^2-\frac{a+b}{6\sin^2\alpha}-\frac{\sin\delta}{3P\sin^3\alpha}\right];$$

und dann die Werthe von z aus den Gleichungen

$$z^2+Pz+B=0 \quad \text{und} \quad z^2-Pz+C=0$$

entnommen, so hat man

$$x=z+\tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad y=\frac{\sin\delta\cot\alpha+3\cos\beta\cos\gamma-6x\cos\beta\cos\gamma}{6[x\sin\alpha-\cos\beta\sin\gamma]},$$

und nur diejenigen der sich ergebenden Werthe können der Aufgabe entsprechen, für welche A innerhalb des Dreiecks oder in eine der drei Seiten fällt.

Ist $\beta=\gamma$, so genügt $w=1$, $P=\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $B=C=0$, $z=0$, $x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{1}{2}[\operatorname{tang}\beta-\sec\beta.\sqrt{\tfrac{1}{3}}]$; welche Werthe auch aus einer besonderen unmittelbaren Lösung der Aufgabe viel einfacher hervorgehen.

3. Aufgabe. Aus den drei Transversalen a, b, c, welche die Winkel 2α, 2β, 2γ eines Dreiecks halbiren, diese Winkel unter der Voraussetzung zu finden, dafs $b=c$, also auch $\beta=\gamma$ sei.

Es ergiebt sich, wenn n die Werthe -1, 0 und 1, und φ den Winkel ausdrückt, für welchen $\cos\varphi=\frac{8a^3-27ab^2}{[4a^2+9b^2]^{\frac{3}{2}}}$ ist:

$$\sin\beta=\frac{1}{3b}\left[a+\sqrt{(4a^2+9b^2)}.\cos\tfrac{1}{3}(2n\pi+\varphi)\right].$$

Ist $a:b=1:2$, so geht aus der ursprünglichen Bedingungsgleichung sogleich $5\beta=90^0$, also $\beta=18^0$ hervor, und die Richtigkeit dieses Resultats ist leicht synthetisch nachzuweisen. Die Vermuthung, dafs die Lösung der allgemeinen Aufgabe, wenn auch b und c verschieden sind, auf symmetrische Formen führen müsse, wie die Lösung der ähnlichen Aufgabe: „Aus den drei Transversalen, welche auf den gegenüberliegenden Seiten normal stehen, oder dieselben halbiren etc." zeigt sich durch die für den besonderen Fall erhaltene Formel als richtig.